D. MANGERON • N. IRIMICIUC

Mecanica rigidelor cu aplicatii în inginerie

Mecanica vibrațiilor sistemelor de rigide

EDITURA TEHNICA

CamScanner

Scanned with CamScanner

DUMITRU MANGERON * NICOLAIE IRIMICIUC

MECANICA RIGIDELOR CU APLICAŢII ÎN INGINERIE

Volumul III

MECANICA VIBRAŢIILOR SISTEMELOR DE RIGIDE

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI

CamScanner
Scanned with CamScanner

CUPRINS

pag.

Introducere 7

Partea a cincea: MODELAREA MATEMATICĂ A VIBRAŢIILOR SISTEMELOR DE RIGIDE 9

Capitolul IX: **Cinematica vibraţiilor sistemelor de rigide** 10

§ 21. *Probleme generale ale cinematicii vibraţiilor* 10

21.1. Clasificarea cinematică a vibraţiilor sistemelor mecanice 10

21.2. Probleme cinematice ale elementelor sistemelor vibrante 22

§ 22. *Elemente de cinematica vibraţiilor deterministe* 23

22.1. Forme uzuale ale ecuaţiilor finite ale vibraţiilor de tip determinist 24

22.2. Compunerea vibraţiilor rectilinii armonice ortogonale 86

22.3. Compunerea a trei vibraţii armonice ortogonale 94

Capitolul X. **Dinamica vibraţiilor sistemelor de rigide** 99

§ 23. *Caracteristicile mecanice inerţiale şi cinetice ale sistemelor vibrante* 99

23.1. Caracteristicile inerţiale generalizate ale sistemelor vibrante 99

23.2. Caracteristicile cinetice ale sistemelor vibrante 108

§ 24. *Caracteristicile dinamice generalizate ale sistemelor vibrante* 109

§ 25. *Excitarea sistemelor vibrante* 172

25.1. Clasificarea şi caracterizarea excitaţiilor 173

25.2. Principii constructive ale excitatoarelor 186

§ 26. *Forme ale ecuaţiilor diferenţiale ale mişcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice* 202

26.1. Ecuaţiile diferenţiale, în coordonate generalizate, ale vibraţiilor sistemelor mecanice efectuate în jurul poziţiilor lor de echilibru static 204

26.2. Ecuaţiile diferenţiale, în variabile de stare, ale vibraţiilor sistemelor mecanice efectuate în jurul poziţiilor lor de echilibru static 257

§ 27. *Răspunsul sistemelor vibrante supuse la excitaţii ddterministe* 263

27.1. Studiul răspunsurilor sistemelor vibrante liniare 265

27.2. Studiul răspunsurilor sistemelor vibrante neliniare 403

27.3. Determinarea răspunsurilor sistemelor vibrante prin integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcărilor lor vibratorii 440

CamScanner

Scanned with CamScanner

§ 28. *Răspunsul sistemelor vibrante liniare supuse la excitații aleatoare* 446
28.1. Caracteristicile dinamice de răspuns ale sistemelor vibrante liniare . . 446
28.2. Relațiile între caracteristicile statistice ale excitației și răspunsului la un sistem vibrant liniar cu un grad de libertate, excitat aleatoriu 450
28.3. Studiul răspunsului unui sistem vibrant liniar excitat aleatoriu . . . 458

Capitolul XI. **Stabilitatea mișcărilor sistemelor vibrante** 473
§ 29. *Studiul stabilității mișcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice* 473
29.1. Studiul stabilității mișcărilor sistemelor vibrante autonome 475
29.2. Studiul stabilității mișcărilor sistemelor vibrante neautonome . . . 530
Bibliografie 549

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

INTRODUCERE

Introducerea, în programele analitice ale disciplinelor de mecanică predate în facultăţile tehnice, a studiului vibraţiilor mecanice a fost justificată iniţial de necesitatea imperioasă a atenuării efectelor dăunătoare ale acestor fenomene mecanice, apărute tot mai frecvent în tehnică în ultimele două decenii. Larga răspîndire a acestor efecte nedorite — între care trebuie menţionate, în primul rînd, cele datorate rezonanţei — , poate fi explicată, în mare măsură, prin cele două trăsături caracteristice ale tehnicii moderne, şi anume, creşterea apreciabilă a vitezelor de lucru ale utilajelor, pe de o parte, şi reducerea substanţială a raportului dintre masa maşinii şi puterea mecanică a ei, pe de altă parte.

Recentele utilizări date fenomenelor vibratorii, prin crearea unei întregi game de maşini şi utilaje de tip nou, cu organe de lucru funcţionînd prin vibraţii, iar alteori prin vibraţii şi şocuri, cum sînt : maşinile vibropercutante pentru înfigerea piloţilor în pămînt, maşinile vibratoare de compactat, grătarele vibratoare pentru desbaterea formelor de turnătorie, forjele şi ştanţele vibropercutante, vibropercutoarele de transportat şi cernut etc., fac în prezent şi mai indispensabilă inginerului mecanic studierea acestor fenomene.

În acest volum al lucrării *) vor fi prezentate principalele probleme teoretice ale mecanicii vibraţiilor sistemelor de rigide, precum şi aplicaţiile lor mai importante folosite în tehnică.

---

*) Se face menţiunea că acest volum poate fi înţeles şi fără consultarea prealabilă a volumelor precedente, cu condiţia să se cunoască noţiunile de bază ale mecanicii teoretice.

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

Partea a cincea

MODELAREA MATEMATICĂ A VIBRAȚIILOR SISTEMELOR DE RIGIDE

În cadrul acestei prime părți a volumului vor fi prezentate noțiunile fundamentale ale mecanicii vibrațiilor sistemelor de rigide, unele elemente de cinematica fenomenelor vibratorii, precum și principalele probleme ale dinamicii mișcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice, legate de stabilirea ecuațiilor diferențiale ale acestor mișcări și de integrarea lor.

Aceste probleme se vor referi numai la acele sisteme mecanice în care cel puțin unele din legăturile lor, fie exterioare fie interioare, sînt active, adică sînt realizate prin elemente elastice cu mase neglijabile : arcuri elicoidale și spirale, bare elastice deformate prin încovoiere, tije elastice deformate prin torsionare. Este ușor de înțeles, însă, că tot în această categorie de sisteme mecanice vor intra și acele sisteme de rigide în care nu pot fi neglijate deformațiile elastice ale unor elemente de legătură, cu caracteristici inerțiale neglijabile în raport cu cele ale restului elementelor sistemelor respective și care sînt considerate, într-o primă aproximație, ca perfect rigide — cum sînt arborii și axurile roților și șaibelor, tijele de ghidare etc. —, deformații care dau posibilitatea elementelor sistemelor să execute și unele mișcări relative independente, care se suprapun peste mișcările lor normale.

Se poate trage de aici concluzia că numărul gradelor de libertate ale unui sistem mecanic, în care se iau în considerație și deformațiile elastice ale unor elemente de legătură cu mase neglijabile, este superior celui corespunzător aceluiași sistem, dar cu legăturile între elemente presupuse perfect rigide.

Acest număr de grade de libertate va trebui deci stabilit cu cea mai mare precizie chiar de la început, pe baza unor date experimentale privind comportarea — rigidă sau elastică — a diverselor elemente de legătură în timpul funcționării sistemului mecanic. Pentru a se sublinia că numărul gradelor de libertate ale unui sistem mecanic a fost stabilit în condițiile noilor ipoteze de lucru, el va fi notat, în continuare, cu r în loc de p.

Scanned with CamScanner

Capitolul IX

CINEMATICA VIBRAȚIILOR SISTEMELOR DE RIGIDE

§ 21. Probleme generale ale cinematicii vibrațiilor

21.1. *Clasificarea cinematică a vibrațiilor sistemelor mecanice*

21.1.1. Definiții. Noțiuni fundamentale în cinematica vibrațiilor

Considerind un sistem mecanic avind, in ipoteza perfectei rigidități a tuturor legăturilor sale pasive, un număr de p grade de libertate și supus unui sistem de solicitări intilnit obișnuit in funcționarea lui, cu acțiune permanentă, mișcarea sistemului mecanic va fi determinată prin ecuațiile finite

$$q_k = q_k(t), \ (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{21.1}$$

constituind soluția determinată, corespunzătoare condițiilor inițiale

$$t = 0 \ \{q_k(0) = \dot{q}_k^{*}; \ \dot{q}_k(0) = \dot{q}_k^{\circ}, \ (k = 1, 2, \ldots, p)\} \tag{21.2}$$

a sistemului lagrangeian de ecuații diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{d_k}, \ (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{21.3}$$

cu forțele generalizate disipative considerate cunoscute.

Mișcarea sistemului mecanic determinată prin ecuațiile (21.1) va fi numită, in continuare, *mișcare principală a sistemului mecanic*, iar ecuația generală (21.1) se va numi *ecuația finită a mișcării prin-*

Scanned with CamScanner

cipale corespunzătoare gradului de libertate k, a sistemului mecanic considerat.

Comportarea în realitate elastică a unora dintre elementele de legătură considerate obișnuit rigide — de exemplu, a tijelor de cuplare a două roți dințate sau a două șaibe de transmisie etc. —, comportare care permite apariția unor noi mișcări relative ale organelor cuplate prin acele elemente de legătură, mărește numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic de la p la $r > p$ — adică, se introduc noi parametri lagrangeieni și deci, corespunzător lor, trebuie luată în considerație o nouă valoare a energiei cinetice a sistemului mecanic —, iar prezența unor excitații perturbatoare, de tip determinist sau aleator, externi sau interni, avînd diverse origini — șocuri repetate, variații periodice sau aleatoare ale unor parametri constructivi sau funcționali ai sistemului mecanic, excitații inerțiale provocate de imperfecta centrare a pieselor în rotație etc. — și suprapunîndu-se peste solicitările obișnuite, corespunzătoare mișcării principale, modifică și valorile forțelor generalizate.

În unele situații — și numai acestea vor fi luate în considerație în continuare —, noile ecuații finite ale mișcării corespunzătoare situației menționate mai sus și reprezentînd soluția determinată

$$q_k^* = q_k^*(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.4}$$

pentru condițiile inițiale

$$t = 0: \{q_k^*(0) = q_k^{*\circ}\,;\ \dot{q}_k^*(0) = \dot{q}_k^{*\circ}\,;\ (k = 1, 2, \ldots, r)\} \tag{21.5}$$

a noului sistem de ecuații lagrangeiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}^*}{\partial \dot{q}_k^*}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}^*}{\partial q_k^*} = Q_{a_k}^* + Q_{d_k}^*, \tag{21.6}$$

cu mărimile $\mathscr{E}^*$, $Q_{a_k}^*$ și $Q_{d_k}^*$ corespunzind, de asemenea, noii situații, se prezintă sub forma

$$q_k^* = q_k(t) + w_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.7}$$

unde q_k — cu un mumăr de $(r - p)$ dintre ei identic egali cu zero — determină mișcarea principală, iar $w_k(t)$ reprezintă variațiile parametrilor lagrangeieni — respectiv, expresiile noilor parametri generalizați introduși în sistem —, apărute ca urmare a modificărilor de structură și solicitare a sistemului mecanic, amintite mai sus.

Scanned with CamScanner

Mişcarea sistemului mecanic determinată prin cea de-a doua serie de termeni din membrul drept al ecuațiilor (21.7), adică prin ecuațiile

$$w_k = w_k(t), \ (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.8}$$

cu funcțiile $w_k(t)$ considerate continue şi de cel puțin două ori derivabile în raport cu timpul — sau cel puțin continue și derivabile pe porțiuni —, va fi numită *mişcare perturbatoare a sistemului mecanic*, ecuația generică (21.8) numindu-se și ea *ecuația finită a mişcării perturbatoare corespunzătoare gradului de libertate k* a sistemului mecanic.

Mişcarea reală a sistemului mecanic, definită prin ecuațiile (21.7), va fi numită *mişcare perturbată a sistemului mecanic*, iar ecuația generică (21.7) va căpăta şi ea denumirea de *ecuația finită a mişcării perturbate, corespunzătoare gradului de libertate k*, a sistemului mecanic.

Apropierea, sau îndepărtarea, mişcării perturbate de la mişcarea principală este condiționată, evident, de evoluția valorilor variațiilor $w_k(t)$ ale parametrilor lagrangeieni, ulterioară apariției acestor variații. Această apropiere, sau îndepărtare, poate fi caracterizată cu ajutorul noțiunilor de *stabilitate* şi *instabilitate a mişcării principale*, introduse de A. M. Liapunov.

Definiție: Mişcarea principală a unui sistem mecanic este stabilă atunci cînd satisfacerea sistemului de condiții

$$\begin{aligned} |w_k(0)| &= |w_k^{\circ}| < \varepsilon_k^{\circ}, \\ & (k = 1, 2, \ldots, r), \\ |\dot{w}_k(0)| &= |\dot{w}_k^{\circ}| < \eta_{k}^{\circ}, \end{aligned} \tag{21.9}$$

în care ε_k° şi η_k° sînt două serii de numere pozitive, fixate dinainte arbitrar de mici, are drept consecință valabilitatea, pentru orice moment ulterior al mişcării perturbate, a relațiilor

$$\begin{aligned} |w_k| &< \varepsilon_k; \\ & (k = 1, 2, \ldots, r), \\ |\dot{w}_k| &< \eta_{k}, \end{aligned} \tag{21.10}$$

ε_k şi η_k reprezentînd alte două serii de numere pozitive, satisfăcînd condițiile

$$\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_k^{\circ}; \ \eta_k \leqslant \eta_{k}^{\circ}, \ (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{21.11}$$

Scanned with CamScanner

Condițiile (21.10), ale căror semnificații fizice vor fi stabilite ulterior, exprimă în fond că deviațiile sistemului mecanic de la mișcarea sa principală sînt foarte mici, astfel încît mișcarea definită prin ecuațiile (21.7) diferă foarte puțin de cea determinată prin ecuațiile (21.1).

În cazul cind variațiile $w_k(t)$ satisfac condițiile

$$|w_k(t)|_{t\to\infty} \to 0\,; \quad |\dot{w}_k(t)|_{t\to\infty} \to 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.12}$$

mișcarea sistemului este numită *asimptotic stabilă.*

Dacă mărimile q_k din membrul drept al ecuațiilor (21.7) se reduc la niște constante, adică

$$q_k = q_{k_{st}} = \text{const}\,; \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.13}$$

ele determinind poziția de echilibru static în care se găsește sistemul mecanic la apariția variațiilor perturbatoare $w_k(t)$ și aceste variații, precum și derivatele lor de ordinul întîi în raport cu timpul, satisfac condițiile (21.9) și (21.10), se spune în acest caz, că *poziția de echilibru static a sistemului mecanic este stabilă.*

Noțiunea de „stabil" exprimă, de astă dată, faptul că variațiile $w_k(t)$ nu indepărtează, în mod sensibil, sistemul mecanic de poziția sa de echilibru static.

Dacă condițiile (21.9) și (21.10) nu sînt satisfăcute și deci mișcarea sistemului mecanic definită prin ecuațiile (21.7) diferă foarte mult de mișcarea neperturbată definită prin ecuațiile (21.1), atunci se spune că *mișcarea principală a sistemului este instabilă*, respectiv că *poziția de echilibru static a sistemului este instabilă*, după cum mărimile q_k sînt funcții de timp, sau sînt constante.

Considerînd în continuare numai cazurile cînd variațiile $w_k = w_k(t)$, presupuse continue precum și derivatele lor de ordinul întîi în raport cu timpul satisfac condițiile de stabilitate (21.9) și (21.10), se vor scoate în evidență două consecințe ale acestor condiții, care vor juca un rol important în stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice, aceste consecințe rezultînd pe baza următoarelor două observații :

Observația I : Condițiile

$$\begin{aligned} &|w_k^\circ| < \varepsilon_k^\circ, \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \\ &|w_k| < \varepsilon_k, \end{aligned} \tag{21.14}$$

Scanned with CamScanner

permit să se considere variațiile $w_k(t)$ ale parametrilor lagrangeieni ai sistemului mecanic corespunzători mișcării perturbate, $q_k^* = q_k + w_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$, drept creșteri ale variabilelor q_k^*.

În consecință, orice funcție Φ de coordonatele lagrangeiene ale sistemului mecanic, adică de forma

$$\Phi = \Phi(q^*) = \Phi(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_r^*) = \Phi(q_1 + w_1; q_2 + w_2; \ldots; q_r + w_r), \tag{21.15}$$

care caracterizează din punct de vedere dinamic mișcarea sistemului mecanic, va putea fi dezvoltată în serie MacLaurin în jurul valorilor $q_k^* = q_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$, adică se va putea serie

$$\Phi(q^*) = \Phi_{(q)} + \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i^*}\right)_{(q)} w_i + \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k^* \, \partial q_i^*}\right)_{(q)} w_k w_i + \ldots \tag{21.16}$$

Mai mult, datorită acelorași condiții precizate mai sus, termenii dezvoltării precedente, de la un anumit grad în sus în variațiile w_i, vor putea fi neglijați în raport cu cei de grad inferior. După cum se va vedea ulterior, în cele mai multe situații, dezvoltarea precedentă se va opri la termenii de gradul doi în variațiile w_i.

Observația a II-a : Condițiile

$$|\dot{w}_k^0| < \gamma_k^0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \qquad |\dot{w}_k| < \gamma_{1k}, \tag{21.17}$$

îndreptățesc să se considere derivatele de ordinul întîi în raport cu timpul ale variațiilor $w_k(t)$ drept creșteri ale vitezelor generalizate $\dot{q}_k^* = \dot{q}_k + \dot{w}_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Ca urmare, orice funcție ψ de coordonatele generalizate și de vitezele generalizate, derivabilă în raport cu aceste mărimi, de forma

$$\psi = \psi(q^*; \dot{q}^*) = \psi(q_1 + w_1, \ldots, q_r + w_r; \dot{q}_1 + \dot{w}_1, \ldots, \dot{q}_r + \dot{w}_r) \tag{21.18}$$

care, de asemenea, caracterizează din punct de vedere dinamic mișcarea sistemului mecanic, va putea fi dezvoltată, în baza condițiilor (21.14) și (21.15), în serie MacLaurin, în jurul valorilor $q_k^* = q_k$;

Scanned with CamScanner

$\dot{q}_k^* = \dot{q}_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ ale variabilelor q_k și $\dot{q}_k$, adică se va putea scrie

$$\psi(q^*;\dot{q}^*) = \psi(q^*;\dot{q}^*)_{(q,\dot{q})} + \sum_{i=1}^{r}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i^*}\right)_{(q;\dot{q})} w_i + \left(\frac{\partial\psi}{\partial \dot{q}_i^*}\right)_{(q,\dot{q})} \dot{w}_i\right] + \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_k^*\,\partial q_i^*}\right)_{(q;\dot{q})} w_k w_i + 2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_k^*\,\partial \dot{q}_i^*}\right)_{(q,\dot{q})} w_k\dot{w}_i + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial \dot{q}_k^*\,\partial \dot{q}_i^*}\right)_{(q,\dot{q})} \dot{w}_k\dot{w}_i\right] + \ldots \tag{21.19}$$

(Indicii inferiori (q) și $(q, \dot{q})$ indică faptul că în expresiile cărora le sînt aplicați trebuie făcute înlocuirile $\dot{q}_i^* = q_i$ și $\dot{q}_i^* = \dot{q}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$).

Și în acest caz, datorită condițiilor de stabilitate a mișcării, termenii dezvoltării precedente, de la un anumit grad în sus în w_i și $\dot{w}_i$ — obișnuit, termenii de grad superior gradului unu —, vor putea fi neglijați în raport cu termenii de grad inferior.

După cum s-a mai spus, funcțiile $w_k = w_k(t)$, reprezentînd variațiile parametrilor lagrangeieni ai sistemului mecanic perturbat, pot fi fie continue în tot intervalul de timp $\mathcal{T} = (t_f - t_0)$ în care se studiază mișcarea — t_0 fiind momentul inițial, iar t_f momentul final al intervalului —, în care caz reprezentarea grafică, în planul de coordonate carteziene ortogonale $\Omega_k t w_k$, a unei asemenea funcții $w_k(t)$ are forma unei curbe (Γ_{wk}) care nu prezintă nici un fel de discontinuități (fig. 21.1, a), fie continue pe porțiuni corespunzătoare intervalelor de timp $\tau_{kh} = t_{k,h+1} - t_{k,h}$, $(h = 1, 2, \ldots, n_k)$, funcția $w_k(t)$ fiind reprezentată în acest caz printr-o curbă prezentînd discontinuități de specia întîi, de forma graficului pulsatoriu din fig. 21.1, b sau a graficului în scară din fig. 21.1, c.

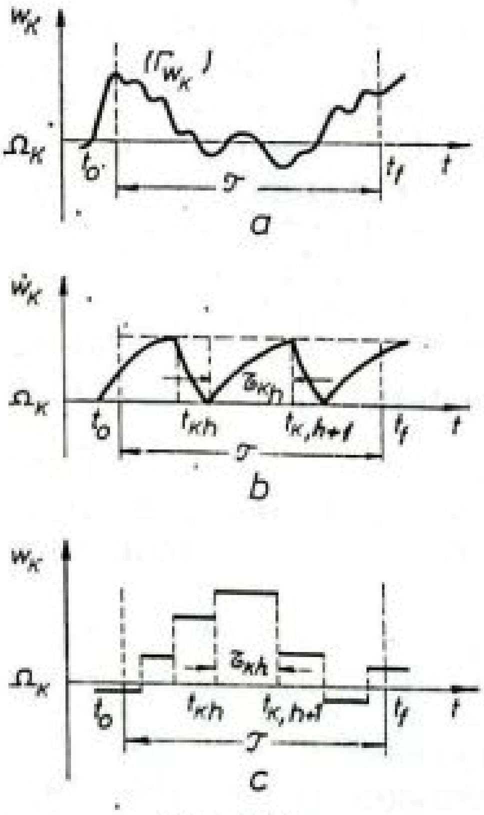


Fig. 21.1.

Pe baza precizărilor și observațiilor făcute pînă acum, se poate trece la defi-

nirea noțiunii de vibrație: Se numește *mișcare vibratorie, oscilație mecanică*, sau simplu *vibrație* a unui sistem mecanic, mișcarea perturbatoare a sistemului care prezintă următoarele caracteristici principale

1) Variațiile $w_k(t)$ ale parametrilor lagrangeieni de poziție ai sistemului mecanic sînt fie funcții continue și de cel puțin două ori derivabile în raport cu timpul, fie funcții continue și derivabile pe porțiuni.

2) În evoluția lor, variațiile $w_k(t)$ trec în mod repetat prin valoarea zero, caracterul evoluției lor putînd fi fie *alternativ* — cînd intervale cu valori negative urmează intervalelor cu valori pozitive și invers —, fie *pulsatoriu* — cînd variațiile se produc numai intr-un singur sens, cu reveniri succesive la valoarea zero.

3) Intervalele de timp în care se produc revenirile la valoarea zero sînt cuprinse între cele de ordinul cîtorva miimi de secundă și cele de ordinul cîtorva secunde.

Sistemul de funcții

$$w_k = w_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{21.20}$$

satisfăcînd condițiile precizate mai sus, poartă numele de *ecuațiile finite ale mișcării vibratorii a sistemului mecanic* considerat, una — oricare — dintre aceste relații, cu numărul de ordine generic k, numindu-se *ecuația finită a vibrației corespunzătoare gradului de libertate k* a sistemului mecanic.

Cel mai adesea funcțiile $w_k = w_k(t)$, reprezentînd ecuațiile finite ale vibrațiilor unui sistem mecanic, satisfac condițiile de stabilitate (21.9) și (21.10); se spune, în aceste cazuri, că sistemul mecanic execută:

— *vibrații în jurul mișcării principale stabile*, atunci cînd mărimile q_k sînt funcții de timp, adică

$$q_k = q_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{21.21}$$

— *vibrații în jurul poziției de echilibru stabil*, atunci cînd mărimile q_k sînt constante, adică:

$$q_k = q_{k_{st}} = \text{const}; \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{21.22}$$

În ultima situație, printr-o alegere convenabilă a coordonatelor lagrangeiene, constantele $q_{k_{st}}$, reprezentînd valorile parametrilor lagrangeieni corespunzătoare poziției de echilibru static a sistemului mecanic, vor putea fi considerate chiar zero.

Un sistem mecanic care execută mișcări vibratorii fie în jurul unei mișcări principale, fie în jurul poziției sale de echilibru static, este numit *sistem vibrant*, sau *oscilator mecanic.*

De asemenea, sistemul de ecuații finite ale vibrațiilor unui sistem mecanic — este vorba de ecuațiile (21.20) — mai este numit uneori *răspunsul oscilatorului mecanic*, ultima denumire fiind folosită, îndeosebi, în cazurile cînd variațiile $w_k(t)$ apar în urma aplicării unor excitații exterioare.

Vibrațiile se numesc *întreținute* dacă durata variațiilor $w_k(t)$ este foarte mare, de ordinul celei a mișcării principale și *tranzitorii*, dacă durata lor este relativ mică în comparație cu durata mișcării principale, în ultima situație aceasta din urmă mișcare fiind, de regulă, stabilă.

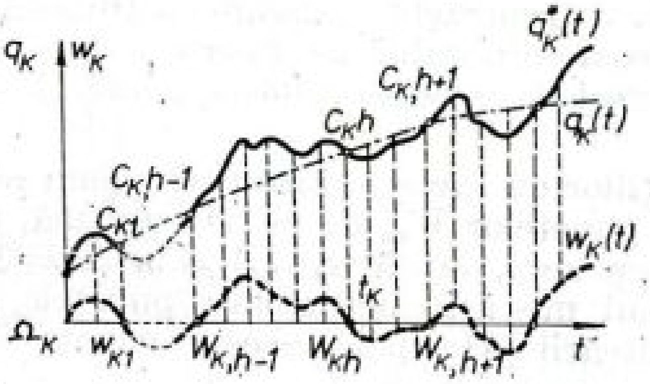


Fig. 21.2

Funcțiile $q_k = q_k(t)$ pot fi reprezentate grafic într-un reper cartezian ortogonal $\Omega_k t q_k$, o asemenea curbă reprezentativă — curba trasată prin linii și puncte în fig. 21.2 — purtînd numele de *graficul mișcării principale, corespunzătoare gradului de libertate k, a sistemului vibrant.*

De asemenea, și funcțiile $w_k = w_k(t)$ pot fi reprezentate, în aceleași repere carteziene $\Omega_k t w_k$ — evident, la aceeași scară a timpului și a ordonatei — prin grafice, curba reprezentativă — este vorba de curba trasată prin linie întreruptă în fig. 21.2 — fiind numită *graficul vibrației corespunzătoare gradului de libertate k a sistemului vibrant.* Acest grafic mai este numit și *vibrograma vibrației corespunzătoare gradului de libertate k a sistemului vibrant*, ultima denumire — înlocuită în unele ramuri ale tehnicii (de exemplu, în electrotehnică) cu aceea de *oscilogramă* — fiind justificată de faptul că o asemenea curbă poate fi obținută pe cale experimentală cu ajutorul unor [aparate de înregistrare a vibrațiilor numite *vibrografe*, respectiv *oscilo-*

grafe. (Se face precizarea însă că aceste aparate pot înregistra nu numai variațiile coordonatelor generalizate — deplasări liniare sau unghiulare —, ci și viteze generalizate și chiar accelerații ale vibrațiilor.)

Valoarea variației $w_k(t)$ într-un moment oarecare al intervalului de timp în care este definită mișcarea vibratorie a sistemului mecanic este numită *elongație* a vibrației respective, iar valoarea acestei variații corespunzătoare uneia din extremele graficului $w_k(t)$, de exemplu, cel cuprins în intervalul de timp $\tau_{kh} = t_{k,h+1} - t_{k,h}$, se va numi *amplitudine a vibrației în intervalul de timp* τ_{kh} sau încă *amplitudine a vibrației în vîrful corespunzător intervalului de timp* τ_{kh}.

Curba $q_k^* = q_k^*(t)$, trasată prin linie neîntreruptă în fig. 21.2 și construită prin însumarea, în orice moment t, a ordonatelor corespunzătoare acelui moment ale punctelor de pe graficele $q_k = q_k(t)$ și $w_k = w_k(t)$, va reprezenta mișcarea peturbată a sistemului mecanic corespunzătoare gradului de libertate k și este numită *graficul mișcării perturbate, corespunzătoare gradului de libertate k, a sistemului vibrant.*

În cazul vibrațiilor cu caracter alternativ, cum este cea reprezentată în fig. 21.2, punctelor W_{kh} de pe vibrogramă, în care elongația devine egală cu zero, adică $w_k(t_{k,h}) = 0$, $(h = 1, 2, \ldots)$, le corespund pe graficul mișcării perturbate punctele C_{kh}, situate chiar pe graficul mișcării principale, aceste puncte fiind numite *centre de oscilație ale vibrației corespunzătoare gradului de libertate k.*

Fragmentul din mișcarea vibratorie care cuprinde o alternanță cu valori pozitive și una cu valori negative a variațiilor $w_k(t)$ și căruia îi corespund, pe graficul mișcării perturbate, trei poziții succesive $C_{k,h-1}$, $C_{k,h}$ și $C_{k,h+1}$ ale centrului de oscilație, se numește *oscilație completă*, timpul în care se execută acest fragment al fenomenului vibratoriu avînd valoarea

$$T_{kh} = \tau_{k,h-1} + \tau_{kh} = (t_{kh} - t_{k,h-1}) + (t_{k,h+1} - t_{k,h}) = (t_{k,h+1} - t_{k,h-1}). \tag{21.23}$$

În cazul vibrațiilor cu caracter pulsatoriu, oscilație completă se va numi fragmentul de mișcare cuprins între două reveniri succesive la valoarea zero; durata acestei oscilații complete va fi formată însă atît din intervalul de timp determinat de cele două reveniri succesive la valoarea zero, cît și din intervalul imediat următor ultimei reveniri, în care elongația se menține constant zero.

Dacă pentru toate cele r vibrograme $w_k = w_k(t)$, corespunzătoare celor r grade de libertate ale sistemului vibrant, momentele

Scanned with CamScanner

t_{kh} în care elongațiile devin egale cu zero sînt aceleași, adică, pentru $t_{1h} = t_{2h} = \ldots = t_{kh} = \ldots = t_{rh} = t_h$ rezultă

$$w_1(t_h) = w_2(t_h) = \ldots = w_k(t_h) = \ldots = w_r(t_h) = 0,$$

atunci pozițiilor sincrone, într-un asemenea moment $t_{kh} = t_h$, ale centrelor de oscilație ale vibrațiilor sistemului mecanic le vor corespunde, într-un reper cartezian generalizat r-ortogonal $\Omega q_1^* q_2^* \ldots q_r^*$, un punct figurativ $C_h(q_k^*(t_h))$, care va fi numit în continuare *centru de oscilație a sistemului vibrant*; se înțelege că în cazul unui sistem vibrant care execută mișcări vibratorii în jurul unei mișcări principale poziția acestui ultim centru de oscilație se va schimba continuu în reperul cartezian $\Omega q_1^* \ldots q_r^*$, în timp ce în cazul unui sistem vibrant care execută mișcări vibratorii în jurul poziției sale de echilibru, poziția acestui centru de oscilație va fi fixă în reperul menționat mai sus, ea coincizind chiar cu originea Ω a acestui sistem de referință ($C \equiv \Omega$) dacă se aleg astfel coordonatele lagrangeiene încît să rezulte condițiile:

$$q_{k_{st}} = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, r).$$

21.1.2. Clasificarea cinematică a vibrațiilor

Funcțiile $w_k = w_k(t)$, care definesc mișcarea vibratorie a unui sistem mecanic, efectuată fie în jurul unei mișcări principale, fie în jurul poziției de echilibru static a sistemului vibrant, pot fi date, în aplicațiile tehnice concrete, sub următoarele trei forme principale:

— *analitic,* formă folosită îndeosebi atunci cînd aceste funcții rezultă ca soluție a sistemului lagrangeian de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului vibrant, obținerea acestei soluții implicînd deci stabilirea prealabilă și integrarea sistemului respectiv de ecuații;

— *grafic,* sub forma vibrogramelor, atunci cînd studiul fenomenelor vibratorii se face prin prelucrarea vibrogramelor de diverse tipuri, care înregistrează variațiile mărimilor ce caracterizează mișcarea vibratorie cercetată;

— *tabelar,* atunci cînd studiul vibrațiilor se face pe baza măsurătorilor efectuate în momente determinate t_i asupra mărimilor care caracterizează vibrațiile, acestea fiind, în cele mai multe din situații,

elongațiile deplasărilor liniare sau unghiulare, stabilindu-se apoi tabele cu corespondențele

$$t_i \to w_k(t_i),\ (k = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Este ușor de înțeles că, în ultimă instanță, pot fi construite vibrogramele funcțiilor $w_k = w_k(t)$ și în cazurile cînd aceste funcții sînt date sub forma analitică și chiar în cazurile cînd sînt date tabelar, în ultima situație reprezentările grafice avînd însă un caracter de aproximație; această aproximație poate fi totuși oricît de mult îmbunătățită, prin efectuarea măsurătorilor într-un număr oricît de mare de momente ale intervalului de timp în care se studiază mișcarea vibratorie.

Pentru examinarea caracterului vibrațiilor unui sistem mecanic, cea mai avantajoasă formă de prezentare a funcțiilor $w_k(t)$ este însă cea a vibrogramelor, reunite într-o vibrogramă globală pentru toate cele r grade de libertate ale sistemului vibrant, adoptîndu-se peste tot aceleași scări de reprezentare a timpului și a elongațiilor și fixînd originile una sub alta (fig. 21.3); o asemenea vibrogramă globală, care va fi numită *vibrograma sistemului vibrant*, va furniza informații imediate asupra valorilor variațiilor $w_k(t)$ corespunzătoare unui moment oarecare t aparținind intervalului de timp pentru care s-a făcut înregistrarea și, în anumite situații ce vor fi analizate pe parcurs, va oferi chiar posibilitatea previziunii evoluției ulterioare a fenomenului vibratoriu studiat, lucrul cel mai important pentru practica inginerească.

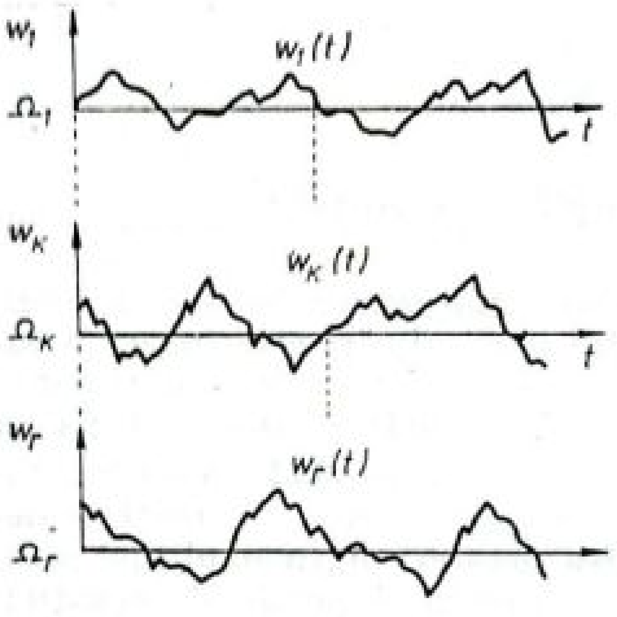


Fig. 21.3

Se înțelege, însă, că pentru o descriere corectă a acestei comportări ulterioare, o singură înregistrare a variațiilor $w_k(t)$ ale parametrilor lagrangeieni ai sistemului vibrant nu va fi concludentă, deoarece în afara unor factori controlabili care influențează direct fenomenul, există întotdeauna și o serie de factori aleatori (întîmplători) — solicitări aleatoare, variații aleatoare ale unor caracteristici

ale sistemului vibrant etc. —, care nu pot fi înlăturați și care influențează și ei, într-o măsură mai mare sau mai mică, comportarea sistemului. Numai repetarea de un număr mare de ori a experimentului, în condiții controlabil identice de lucru, poate arăta gradul de influențare a factorilor aleatori, reflectat prin asemănarea, sau nu, a vibrogramelor înregistrate pentru fiecare vibrație $w_k(t)$ a sistemului vibrant.

Obținerea, la repetarea experimentului pentru vibrația corespunzătoare unui anumit grad de libertate k, a unor vibrograme care nu se deosebesc între ele decît prin amănunte neesențiale, va indica o influență nesemnificativă a factorilor aleatori și va permite, după cum se va vedea ulterior, elaborarea unor modele matematice capabile să descrie, cu o precizie satisfăcătoare, comportarea ulterioară experimentului a fenomenului vibratoriu studiat.

Obținerea, în schimb, a unor vibrograme cu diferențieri sensibile de la un experiment la altul, pentru un același grad de libertate k, va indica, dimpotrivă, o influență covîrșitoare a factorilor aleatori, fapt care nu va mai face posibilă elaborarea de modele matematice capabile să descrie cu precizie evoluția ulterioară experimentului a fenomenului vibratoriu respectiv; se va vedea totuși că anumite informații asupra unei posibile evoluții ulterioare vor putea fi obținute apelîndu-se la metodele statisticii matematice.

Observațiile precedente justifică împărțirea vibrațiilor în următoarele două mari clase:

1°. *Vibrații deterministe*, reprezentate prin mișcările vibratorii practic neinfluențate de factorii aleatori și pentru care este posibilă o modelare matematică capabilă să descrie evoluția lor în timp.

2°. *Vibrații aleatoare*, reprezentate prin mișcările vibratorii puternic influențate de factorii aleatori și a căror evoluție în timp poate fi caracterizată numai statistic.

Întrucît în cazul vibrațiilor deterministe vibrogramele evidențiază imediat prezența, sau absența, caracterului de periodicitate în manifestarea fenomenului vibratoriu studiat, apare posibilitatea unei subîmpărțiri a vibrațiilor deterministe în următoarele subclase:

— vibrații periodice;
— vibrații cvasiperiodice;
— vibrații neperiodice.

Principalele tipuri din fiecare din clasele și subclasele de vibrații menționate mai sus vor fi examinate separat, în §22 și §23 al lucrării.

Scanned with CamScanner

21.2. *Problemele cinematicii elementelor sistemelor vibrante*

În continuare, va fi examinat modul de rezolvare a principalelor probleme ale cinematicii rigidelor ce execută vibrații — problemele privind determinările de traiectorii, de viteze și de accelerații ale punctelor elementelor ce alcătuiesc sistemele vibrante întîlnite curent în tehnică —, luîndu-se în considerație numai cazul sistemelor mecanice ce execută vibrații deterministe în jurul poziției de echilibru stabil. În această situație, prin alegerea convenabilă a coordonatelor lagrangeiene, astfel încît valorile lor corespunzătoare poziției de echilibru static să fie zero, parametrii lagrangeieni care vor determina poziția, într-un moment oarecare, a sistemului vibrant se vor reduce numai la variațiile $w_k(t)$, adică se va putea scrie

$$q_k^* = w_k(t), \ (k = 1, 2, \ldots, r). \qquad (21.24)$$

$w_k(t)$ fiind considerați deci funcții cunoscute de timp.

21.2.1. Determinarea traiectoriilor punctelor elementelor sistemelor vibrante

În baza ecuațiilor legăturilor — exterioare și interioare — aplicate sistemului vibrant, toți parametrii de poziție variabili în timp ai sistemului vibrant vor putea fi exprimați, prin intermediul coordonatelor generalizate $q_k^*(t)$, determinate prin ecuațiile finite (21.24), ca funcții de timp, adică vor putea fi considerate cunoscute ecuațiile finite ale mișcării fiecărui element al sistemului mecanic.

În aceste condiții, problemele de determinări de traiectorii ale punctelor elementelor sistemului mecanic se vor rezolva folosind procedeele cunoscute ale cinematicii rigidului.

Se face mențiunea că pentru anumite puncte, alese în mod convenabil în elementele unui sistem vibrant, traiectoriile lor pot fi determinate și pe cale experimentală, folosindu-se aparatură specială de înregistrare a variațiilor coordonatelor lor.

Întrucît unele din aceste traiectori, corespunzătoare unor forme particulare ale ecuațiilor (21.24), prezintă o importanță deosebită pentru aplicațiile tehnice, ele vor fi studiate la sfîrșitul paragrafului următor, după prezentarea noțiunilor necesare discutării lor.

Scanned with CamScanner

21.2.2. Determinarea vitezelor punctelor elementelor sistemelor vibrante

Utilizîndu-se sistemul de ecuații de transmisie a mișcării, obținut prin derivarea în raport cu timpul a sistemului de ecuații de legătură aplicate sistemului vibrant, precum și prin considerarea ecuațiilor finite (21.24) și a celor rezultînd prin derivarea lor în raport cu timpul, vor putea fi determinați, ca funcții cunoscute de timp, parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic, care vor permite apoi calculul, după procedeele cunoscute din cinematica rigidului, al vitezelor diverselor puncte ale elementelor ce alcătuiesc sistemul vibrant considerat.

Se menționează și aici faptul că, în unele situații, vitezele unor puncte determinate, convenabil alese, ale elementelor sistemului mecanic vor putea fi determinate și experimental, prin înregistrări ale variațiilor lor, folosindu-se aparatură și metode adecvate de lucru.

21.2.3. Determinarea accelerațiilor punctelor elementelor sistemelor vibrante

Prin derivarea, în raport cu timpul, a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului vibrant vor putea fi obținuți și parametrii cinematici de ordinul doi ai acelorași elemente și deci vor putea fi determinate, după procedeele cunoscute din cinematica rigidului, accelerațiile punctelor acestor elemente.

Concluzii analoge celor de la subpunctul precedent sînt valabile și pentru determinarea, pe cale experimentală, a accelerațiilor unor puncte convenabil alese în elementele sistemului vibrant considerat.

§ 22. Elemente de cinematica vibrațiilor deterministe

Acest paragraf al lucrării se referă la următoarele două probleme ale cinematicii vibrațiilor :

— prezentarea formelor uzuale de ecuații finite ale vibrațiilor de tip determinist ;

— studiul compunerii de mișcări vibratorii rectilinii armonice ortogonale.

Scanned with CamScanner

Se fac următoarele precizări privind notațiile ce vor fi folosite în prezentarea conținutului paragrafului :

— În primul rînd, pentru simplificarea scrierii, se va renunța peste tot la indicele generic k, ce caracterizează gradul de libertate, considerîndu-se și acum însă vibrația

$$w = w(t) \tag{22.1}$$

ca o vibrație generică, corespunzătoare oricăruia din gradele de libertate ale sistemului vibrant.

— În al doilea rînd, întrucît fiecare dintre vibrațiile $w_k(t)$ poate avea un număr oarecare de componente $w_{ki}(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, s_k)$, aceste componente vor fi notate, în cadrul aceleiași convenții de notare menționată mai sus, numai cu un singur indice, pus între paranteze, adică se va scrie relația

$$w = \sum_{i=1}^{s} w_{(i)}(t). \tag{22.2}$$

22.1. *Forme uzuale ale ecuațiilor finite ale vibrațiilor de tip determinist*

22.1.1. Forme ale ecuațiilor vibrațiilor periodice

Se numește *vibrație periodică*, oscilația mecanică pentru care variația $w = w(t)$ se prezintă ca o funcție periodică de timp, satisfăcînd deci relația

$$w(t) = w(t + hT), \ (h = 1, 2, 3, \ldots), \tag{22.3}$$

unde

$$T = \frac{2\pi}{k} \tag{22.4}$$

este *perioada vibrației*, iar mărimea

$$k = \frac{2\pi}{T} \tag{22.5}$$

este *pulsația* ei.

Inversul perioadei, adică mărimea

$$\nu = f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \ (\mathrm{Hz}) \tag{22.6}$$

Scanned with CamScanner

reprezintă *frecvența vibrației* considerate și pentru aplicațiile tehnice mecanice curente că este cuprinsă între citeva fracțiuni de hertz și citeva sute de herți.

După cum se observă, tehnica mecanică curentă a vibrațiilor se extinde numai asupra *vibrațiilor infrasonore* ($\nu < 16$ Hz) și asupra *vibrațiilor sonore* cu frecvențe cuprinse în zona inferioară a intervalului 16 Hz — 16 000 Hz de frecvențe audibile. Din acest motiv, vibrațiile tehnice uzuale sînt numite *vibrații de joasă frecvență*, în timp ce oscilațiile mecanice cu frecvențele situate în zona superioară a intervalului sonor, precum și *oscilațiile mecanice ultrasonore* sînt numite *vibrații de înaltă frecvență*.

Întrucît, așa cum se știe din analiza matematică, în cazul unei funcții periodice de timp continue și derivabile, derivata ei în raport cu timpul este, de asemenea, funcție periodică de timp, de aceeași perioadă ca și funcția, rezultă că este valabilă, în acest caz, și relația

$$\dot{w}(t) = \dot{w}(t + hT), \ (h = 1, 2, 3, \ldots). \tag{22.7}$$

Sistemul de relații (21.27) și (21.31) exprimă faptul că după intervale de timp egale cu cel mai mic multiplu comun al tuturor perioadelor T_k, ($k = 1, 2, \ldots, r$), corespunzătoare celor r grade de libertate ale sistemului vibrant, acesta capătă periodic aceleași variații ale parametrilor săi lagrangeieni și aceleași variații ale vitezelor sale generalizate ; în cazul cînd vibrațiile se efectuează în jurul poziției de echilibru static, ecuațiile menționate mai sus exprimă faptul că după intervale de timp egale cu cel mai mic multiplu comun al tuturor perioadelor T_k, ($k = 1, 2, \ldots, r$), parametrii lagrangeieni ai sistemului vibrant și vitezele generalizate corespunzătoare capătă aceleași valori, adică sistemul mecanic trece mereu prin aceleași poziții în spațiu și în același sens.

Vibrograma unei asemenea vibrații rezultă dintr-o succesiune regulată de porțiuni identice de curbă (Γ_λ), corespunzătoare intervalelor de timp T luate pe axa absciselor (fig. 22.1), într-o astfel de porțiune forma curbei putînd fi însă cu totul neregulată.

Porțiunea de vibrogramă corespunzătoare perioadei T mai poartă, în acest caz, numele de *ciclu*, datorită faptului că prin eliminarea timpului între relațiile

$$w = w(t) \text{ și } \dot{w} = \dot{w}(t) \tag{22.8}$$

se obține funcția

$$f(w, \dot{w}) = 0, \tag{22.9}$$

Scanned with CamScanner

a cărei reprezentare grafică într-un reper cartezian ortogonal $W w \dot{w}$ — numit *planul fazelor* — este o curbă închisă (fig. 22.2).

O vibraţie periodică poate fi caracterizată prin următoarele mărimi, purtînd din acest motiv numele de *caracteristici* ale vibraţiei :

— *valoarea medie a elongaţiei în intervalul unei perioade*, definită prin relaţia

$$w_m = \overline{w(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w(t)\,dt\,; \tag{22.10}$$

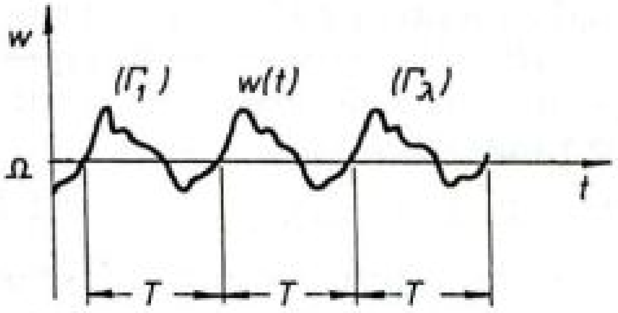


Fig. 22.1

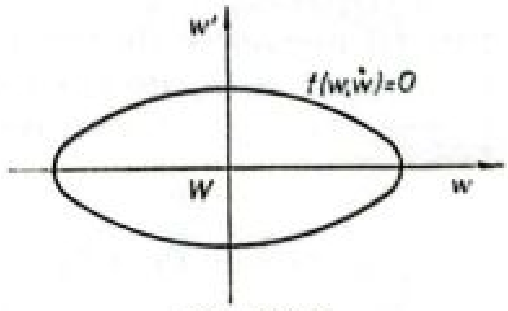


Fig. 22.2

— *media pătratică a elongaţiei în intervalul unei perioade*, definită cu ajutorul relaţiei

$$\mu_p = \overline{w^2(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w^2(t)\,dt. \tag{22.11}$$

În cazul cînd vibrograma va înregistra o viteză generalizată $\dot{w} = \dot{w}(t)$, media pătratică a acesteia va purta numele de *putere medie*;

— *valoarea eficace a elongaţiei în intervalul unei perioade*, definită prin relaţia

$$w_{ef} = \sqrt{\mu_p} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} w^2(t)\,dt}\,; \tag{22.12}$$

— *factorul de formă al vibraţiei* determinat prin relaţia

$$f_w = \frac{w_{ef}}{w_m}. \tag{22.13}$$

În continuare, vor fi examinate principalele categorii și tipuri de vibrații periodice.

1°. Vibrații armonice

Vibrația armonică este cea mai simplă vibrație periodică, ea fiind definită prin ecuația

$$\boxed{w = A \sin (kt + \alpha)}, \tag{22.14}$$

A, k și α fiind constante, primele două considerate totdeauna pozitive în cele ce urmează.

Se înțelege că tot vibrație armonică va fi și vibrația definită prin ecuația

$$w = A \cos (kt + \alpha),$$

deoarece prin înlocuirea constantei α cu constanta α^* satisfăcind relația

$$\alpha = \alpha^* - \frac{\pi}{2},$$

se va putea scrie

$$w = A \cos \left[(kt + \alpha^*) - \frac{\pi}{2} \right] = A \sin (kt + \alpha^*).$$

Cele trei constante care figurează în ecuația (21.14) au următoarele semnificații :

— constanta A, reprezentind *amplitudinea* vibrației armonice, indică valoarea maximă a modulului elongației w;

— constanta k, considerată pozitivă, reprezintă pulsația vibrației armonice, ea furnizind, prin raportul

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{22.15}$$

perioada vibrației armonice considerate :

— constanta α, numită *fază inițială* a vibrației armonice și satisfăcind, obișnuit, condiția

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \tag{22.16}$$

Scanned with CamScanner

determină *valoarea inițială a elongației vibrației*

$$w(0) = w^\circ = A \sin \alpha, \tag{22.17}$$

adică deviația inițială a parametrului lagrangeian față de valoarea corespunzătoare centrului de oscilație inițial.

Argumentul funcției trigonometrice din ecuația (22.14), adică funcția liniară de timp

$$\varphi(t) = kt + \alpha, \tag{22.18}$$

poartă numele de *fază la momentul t* a vibrației armonice.

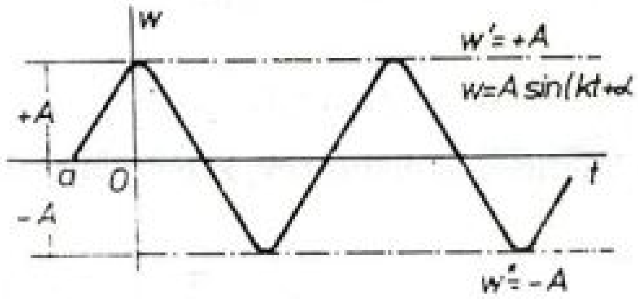


Fig. 22.3.

Vibrograma vibrației armonice are forma din fig. 22.3, fiind reprezentată printr-o sinusoidă *decalată* față de origine — adică translatată în lungul axei absciselor Ot cu distanța

$$t^* = \overline{Oa} = -\frac{\alpha}{k}, \tag{22.19}$$

reprezentind valoarea particulară a timpului, care anulează argumentul — și deformată în lungul axei ordonatelor prin amplificare cu factorul constant A; vîrfurile graficului sînt situate pe dreptele paralele la axa absciselor, determinate prin ecuațiile

$$w' = +A\,; \; w'' = -A \tag{22.20}$$

și purtind numele de *înfășurătoarele vibrogramei* vibrației armonice.

În unele ramuri ale tehnicii — îndeosebi, în situațiile cind trebuie reprezentate un număr mai mare de vibrații armonice

$$w_{(i)} = A_i \sin (k_i t + \alpha_i), \; (i = 1, 2, \ldots, s),$$

s fiind numărul total al acestora —, este curent folosită și o altă formă de reprezentare a vibrațiilor armonice, numită *spectrogramă*, care

scoate imediat în evidență cele două elemente principale specifice ale fiecărei vibrații: pulsația k_i, reprezentată pe axa pulsațiilor Ok (fig. 22.4) prin segmentul

$$\overline{OK}_i = k_i, \ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

și amplitudinea A_i, reprezentată prin segmentul

$$\overline{K_iW_i} = A_i, \ (i = 1, 2, \ldots, s), \quad (22.21)$$

luat normal la axa timpului în punctul K_i.

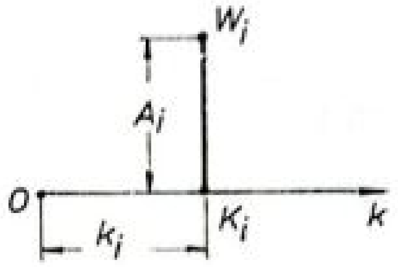


Fig. 22.4.

Trecînd la calculul caracteristicilor vibrației armonice, se va verifica mai întîi că valoarea medie a elongației ei în intervalul unei perioade rezultă egală cu zero; din acest motiv, toate caracteristicile vibrației armonice vor fi definite pentru o semi-perioadă, așa cum se va vedea mai jos.

— *Valoarea medie a elongației în intervalul unei semiperioade* va fi dată de relația

$$w_m = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{t^*}^{t^*+\frac{T}{2}} A \sin (kt + \alpha) \, dt = -\frac{2}{T} \frac{A}{k} \cos (kt + \alpha) \Big|_{t^*}^{t^*+\frac{T}{2}},$$

t^* fiind momentul în care începe o buclă a sinusoidei cu valori pozitive ale ordonatei, acest moment satisfăcînd deci relațiile

$$\sin (kt^* + \alpha) = 0; \ \cos (kt^* + \alpha) = 1. \quad (22.22)$$

După efectuarea calculelor, rezultă valoarea

$$\boxed{w_m = \overline{w(t)} = \frac{2A}{\pi} = \frac{4A}{kT}.} \quad (22.23)$$

— *Media pătratică a elongației în intervalul unei semiperioade* va fi dată de relația

$$\mu_p = \overline{w^2(t)} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{t^*}^{t^*+\frac{T}{2}} A^2 \sin^2 (kt + \alpha) \, dt =$$

$$= \frac{2}{T} A^2 \int_{t^*}^{t^*+\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos[2(kt + \alpha)]}{2} \, dt,$$

rezultînd și acum, după efectuarea calculelor și ținînd seama și de astă dată de condițiile (22.22), valoarea

$$\mu_p = \overline{w^2(t)} = \frac{1}{2}A^2 = 0{,}5A^2. \tag{22.24}$$

— *Valoarea eficace a elongației într-o semiperioadă* va rezulta egală cu

$$w_{ef} = \sqrt{\mu_p} = \frac{A}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\ A. \tag{22.25}$$

— *Factorul de formă al vibrației armonice* va avea valoarea

$$f_w = \frac{w_{ef}}{w_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}1. \tag{22.26}$$

O ultimă problemă ce va mai fi discutată în legătură cu vibrațiile armonice va fi aceea a *suprapunerii* lor. După cum se va vedea în dinamica vibrațiilor, ecuațiile finite ale vibrațiilor armonice vor rezulta ca soluții particulare ale sistemului lagrangeian de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului vibrant, în situațiile cînd aceste ecuații se prezintă ca un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi în coordonatele generalizate, liniare, cu coeficienți constanți, omogene și fără termenii conținînd derivatele de ordinul întîi ale coordonatelor generalizate.

Se știe, însă, că pentru un asemenea sistem de ecuații diferențiale este valabil *principiul suprapunerii*, adică, dacă

$$q_{k\rho} = q_{k\rho}(t),\ (\rho = 1, 2, \ldots, r_k)$$

reprezintă un sistem de soluții particulare, corespunzătoare gradului de libertate k, ale sistemului de ecuații diferențiale, atunci și funcția

$$q_k = \sum_{\rho=1}^{r_k} q_{k\rho}(t)$$

reprezintă, de asemenea, o soluție, corespunzătoare aceluiași grad de libertate k, a sistemului de ecuații diferențiale.

Se poate trage deci concluzia că, în aceste situații, mișcarea vibratorie, corespunzătoare unui grad de libertate k, a unui sistem

CamScanner

Scanned with CamScanner

vibrant rezultă prin suprapunerea unui număr oarecare de vibrații armonice, cu amplitudini, pulsații și faze inițiale în general diferite.

În cele ce urmează va fi examinat efectul suprapunerii a două vibrații armonice, corespunzătoare unui același grad de libertate, aceste vibrații, determinate prin ecuațiile

$$w_{(1)} = A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1);\ w_{(2)} = A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2), \qquad (22.27)$$

dînd o mișcare rezultantă definită prin ecuația

$$w = w_{(1)} + w_{(2)} = A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2), \qquad (22.28)$$

urmînd apoi, ca pe baza constatărilor făcute cu acest prilej, să se tragă concluzii referitoare la suprapunerea unui număr oarecare de asemenea vibrații armonice.

Admițînd, pentru fixarea ideilor, ipoteza

$$k_2 \geqslant k_1 \qquad (22.29)$$

și adunînd și scăzînd în același timp, în membrul drept al ecuației (22.28), termenii $\frac{A_1}{2} \sin (k_2 t + \alpha_2)$ și $\frac{A_2}{2} \sin (k_1 t + \alpha_1)$, această ecuație va putea fi adusă la forma

$$w = \frac{A_1 + A_2}{2} [\sin (k_2 t + \alpha_2) + \sin (k_1 t + \alpha_1)] +$$

$$+ \frac{A_2 - A_1}{2} [\sin (k_2 t + \alpha_2) - \sin (k_1 t + \alpha_1)].$$

Folosind, în continuare, formulele de transformare a sumei, respectiv diferenței, de două sinusuri în produse de sinusuri și cosinusuri, ultima relație va mai putea fi scrisă sub forma

$$w = (A_1 + A_2) \cos \left[\frac{k_2 - k_1}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right] \sin \left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] +$$

$$+ (A_2 - A_1) \sin \left[\frac{k_2 - k_1}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right] \cos \left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right],$$

sau încă, scoțînd forțat în factor produsul $(A_1 + A_2) \cos \left[\frac{k_2 - k_1}{2} t + \right.$

Scanned with CamScanner

$+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\Big]$, care va fi diferit de zero chiar și în cazul particular $k_1 = k_2$ și $\alpha_1 = \alpha_2$, se va mai putea scrie

$$w=(A_1+A_2)\cos\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]\left\{\sin\left[\frac{k_1+k_2}{2}t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{A_2-A_1}{A_1+A_2}\,\frac{\sin\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]}{\cos\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]}\cos\left[\frac{k_1+k_2}{2}t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]\right\}. \quad (22.30)$$

Introducînd, în fine, notația

$$\operatorname{tg}\alpha(t)=\frac{A_2-A_1}{A_1+A_2}\,\frac{\sin\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right]}{\cos\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]}=$$

$$=\frac{A_2-A_1}{A_1+A_2}\operatorname{tg}\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right], \quad (22.31)$$

cu

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(k_2-k_1)t+(\alpha_2-\alpha_1)]}}{(A_1+A_2)\cos\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]}=$$

$$=\frac{A(t)}{(A_1+A_2)\cos\left[\frac{k_2-k_1}{2}t+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]},$$

unde prin $A(t)$ s-a notat radicalul de la numărător, se va putea aduce ecuația (22.30) la următoarea formă finală

$$\boxed{w=A(t)\sin\left[\frac{k_1+k_2}{2}t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\alpha(t)\right],} \quad (22.32)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(k_2 - k_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]},$$
$$\alpha(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \operatorname{tg}\left[\frac{k_2 - k_1}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]\right]. \tag{22.33}$$

După cum se observă, prin suprapunerea a două vibrații armonice se obține o mișcare vibratorie rezultantă care prezintă următoarele deosebiri esențiale față de o vibrație armonică :

— amplitudinea vibrației rezultante este o funcție periodică de timp, de perioadă

$$T_A = \frac{2\pi}{k_2 - k_1}, \tag{22.34}$$

ea satisfăcînd deci relația

$$A(t + hT_A) = A(t), \ (h = 1, 2, 3, \dots) \tag{22.35}$$

și fiind cuprinsă între limitele

$$A_{max} = A_1 + A_2; \ A_{min} = |A_2 - A_1|; \tag{22.36}$$

— faza, la momentul t, a vibrației rezultante nu mai este liniară în variabila independentă t, ea fiind dată acum de relația

$$\varphi(t) = \frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t), \tag{22.37}$$

cu $\alpha(t)$ dat de cea de-a doua dintre relațiile (22.33), în care expresia din paranteza patrată este funcție periodică de timp, de perioadă

$$T_f = \frac{\pi}{\frac{k_2 - k_1}{2}} = \frac{2\pi}{k_2 - k_1} = T_A, \tag{22.38}$$

faza satisfăcînd deci ecuația

$$\alpha(t + hT_f) = \alpha(t) + \lambda\pi,$$
$$(h = 1, 2, \dots; \ \lambda = 0, 1, 2, \dots); \tag{22.39}$$

Scanned with CamScanner

— pulsația vibrației rezultante, definită prin relația

$$k(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \dot{\alpha}(t) \qquad (22.40)$$

cu

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \frac{(k_2 - k_1)(A_2^2 - A_1^2)}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [(k_2 - k_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)]} \qquad (22.41)$$

nu mai este constantă, ci variază periodic cu timpul, cu perioada

$$T_k = T_A = T_f = \frac{2\pi}{k_2 - k_1}, \qquad (22.42)$$

adică se poate scrie

$$k(t + hT_k) = k(t), \ (h = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (22.43)$$

Se va remarca că ultima caracteristică constituie de fapt o consecință directă a celei precedente, deoarece modificarea în timp a fazei implică și modificarea pulsației și deci și a frecvenței.

O vibrație definită printr-o ecuație de forma

$$w = A(t) \sin [kt + \alpha_0 + \alpha(t)], \qquad (22.44)$$

cu funcțiile $A(t)$ și $\alpha(t)$ oarecare, este numită, în general, *vibrație cvasiarmonică cu modulație în amplitudine și în fază*, sau *vibrație cvasiarmonică cu modulație în amplitudine și în frecvență*, $A(t)$ fiind *funcția de modulație a amplitudinii*, $\alpha(t)$ *funcția de modulație a fazei*, iar $\dot{\alpha}(t)$ *funcția de modulație a frecvenței (pulsației)*.

Mișcarea vibratorie rezultantă definită prin ecuația (22.32) constituie un caz particular de asemenea vibrație modulată, corespunzător variațiilor periodice ale celor două funcții de modulație, din care motiv va fi numită *vibrație cvasiarmonică cu modulație periodică în amplitudine și în frecvență.*

Este important de reținut faptul că deși funcțiile de modulație ale amplitudinii și frecvenței sînt periodice, totuși vibrația rezultantă va fi periodică atunci numai cînd pulsațiile k_1 și k_2 ale vibrațiilor componente vor fi comensurabile, adică raportul lor va fi egal cu raportul dintre două numere întregi, n_1 și n_2, considerate — prin simplificarea eventualilor divizori comuni — prime între ele

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (22.45)$$

cu consecințele

$$\frac{k_2 \pm k_1}{k_1} = \frac{n_2 \pm n_1}{n_1}, \tag{22.46}$$

perioada avînd în această situație valoarea

$$T = n_1 \frac{2\pi}{k_1} = n_2 \frac{2\pi}{k_2} = (n_1 + n_2) \frac{2\pi}{k_1 + k_2} = (n_2 - n_1) \frac{2\pi}{k_2 - k_1} =$$
$$= (n_2 - n_1) T_A. \tag{22.46}$$

Într-adevăr, este suficient să se urmărească șirul de relații de mai jos

$$w(t + hT) = A(t + hT) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2}(t + hT) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t + hT)\right] =$$
$$= A(t + h(n_2 - n_1)T_A) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \right.$$
$$\left. + \alpha\left(t + h(n_2 - n_1)\, T_f + \frac{k_1 + k_2}{2} hT\right)\right]$$

și să se țină seama de egalitățile (22.35) și (22.39), pentru a se ajunge la concluzia

$$w(t + hT) = A(t) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t) + \left(\lambda\pi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{k_1 + k_2}{2} h(n_1 + n_2) \frac{2\pi}{k_1 + k_2}\right)\right] = A(t) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \right.$$
$$\left. + \alpha(t) + (\lambda + h(n_1 + n_2)\pi\right] \quad (h = 1, 2, 3, \ldots;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

sau încă, luînd în considerație numai valorile lui λ care satisfac relația

$$\lambda = h(n_1 + n_2),$$

cu consecința

$$[\lambda + h(n_1 + n_2)]\pi = h(n_1 + n_2) \cdot 2\pi,$$

Scanned with CamScanner

la concluzia

$$w(t + hT) = A(t) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t)\right] = w(t), \quad (22.47)$$

care justifică afirmația făcută cu privire la perioada mișcării vibratorii rezultante.

Se înțelege că în cazul cînd pulsația k_2 este foarte mare în comparație cu pulsația k_1, deci cînd perioada vibrației rezultante devine și ea foarte mare în comparație cu T_A, sesizarea concretă a periodicității vibrației rezultante poate deveni practic imposibilă.

Vibrograma vibrației rezultante (22.32) se va prezenta, în condițiile de periodicitate (22.45), sub forma unei sinusoide deformate periodic atît în lungul axei absciselor, cu perioada de deformare $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$, cît și în lungul axei ordonatelor, cu perioada $T_A = T_f = \dfrac{2\pi}{k_2 - k_1}$, această sinusoidă deformată fiind cuprinsă între înfășurătoarele (Γ'_A) și (Γ''_A), (fig. 22.5), trasate punctat în figură și determinate prin ecuațiile

$$w'_A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[(k_2 - k_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)\right]},$$
$$(22.48)$$
$$w''_A = -\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[(k_2 - k_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)\right]}.$$

Cele două înfășurătoare ale vibrogramei sînt limitate, la rîndul lor, de perechile de drepte

$$\begin{aligned} w'_1 &= +A_{max}, \\ w'_2 &= +A_{min}, \end{aligned} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} w''_1 = -A_{max}, \\ w''_2 = -A_{min}. \end{cases}$$

În ceea ce privește spectrograma vibrației rezultante, ea va avea forma corespunzătoare celor două vibrații armonice componente (fig. 22.6, a).

Ecuația (22.32) a vibrației rezultante și expresiile (22.33) ale caracteristicilor ei capătă forme simplificate în următoarele cazuri particulare :

— *Cazul vibrațiilor armonice asincrone* ($k_1 \neq k_2$), *de amplitudini egale și faze inițiale oarecari*, caracterizat prin condițiile :

$$k_1 \neq k_2;\; A_1 = A_2;\; \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

Scanned with CamScanner

pentru care relațiile (22.32) și (22.33) iau formele

$$w = A(t) \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha\right], \qquad (22.49)$$

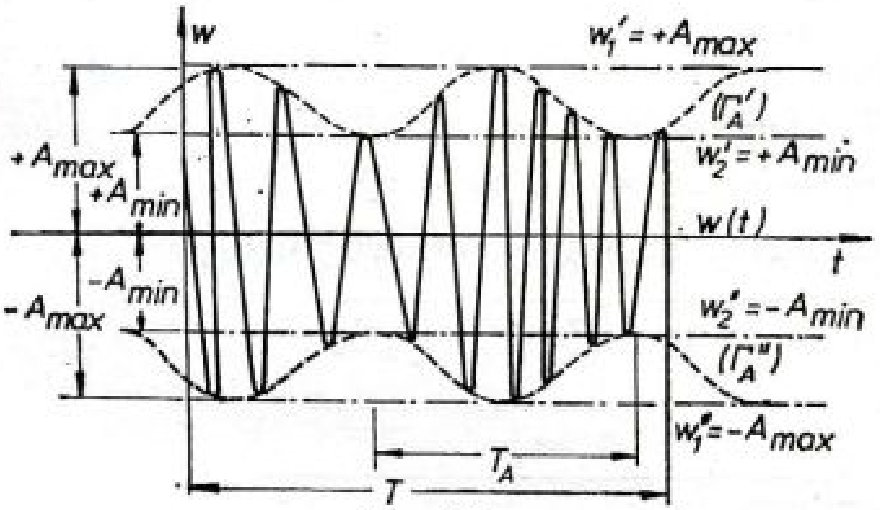


Fig. 22.5.

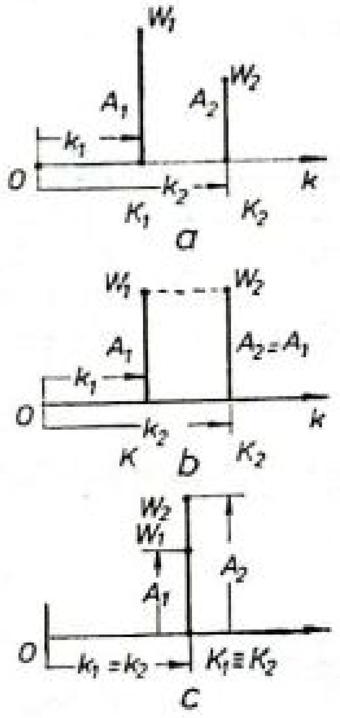


Fig. 22.6.

respectiv

$$A(t) = 2A_1 \cos\left[\frac{k_2 - k_1}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right],$$
$$\alpha(t) = \alpha = \lambda\pi, \; (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (22.50)$$

Introducînd notațiile

$$2A_1 = A,$$
$$\frac{k_2 - k_1}{2} = \omega_A, \qquad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \beta - \frac{\pi}{2}, \qquad (22.51)$$
$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k, \qquad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \lambda\pi = \alpha,$$

Scanned with CamScanner

ecuația (22.50) a vibrației rezultante corespunzătoare condițiilor precizate va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{w = [A \sin(\omega_A t + \beta)] \sin(kt + \alpha),} \tag{22.52}$$

ea definind un caz particular al unei vibrații armonice mai generale, avînd ecuația

$$w = [a + A \sin(\omega_A t + \beta)] \sin(kt + \alpha), \tag{22.53}$$

numită *vibrație armonică cu modulație armonică în amplitudine* și care va fi examinată ulterior. Spectrograma corespunzătoare acestui caz este prezentată în figura 22.6, b.

— *Cazul vibrațiilor armonice sincrone* ($k_1 = k_2$), *de amplitudini și faze inițiale oarecare*, caracterizat prin condițiile

$$k_1 = k_2, \; A_1 \neq A_2, \; \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

pentru care relațiile (22.32) și (22.33) iau formele particulare

$$\boxed{w = A \sin\left[kt + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha\right],} \tag{22.54}$$

respectiv

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}\left[\frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right], \end{aligned}} \tag{22.55}$$

rezultînd de aici că în această situație vibrația rezultantă este tot armonică, de aceeași pulsație, dar cu altă amplitudine și cu altă fază inițială. Spectrograma respectivă este prezentată în fig. 22.6, c.

În legătură cu suprapunerea a două vibrații armonice, mai trebuie semnalată apariția, în condițiile unor valori foarte apropiate între ele ale pulsațiilor celor două vibrații componente, a *fenomenului de bătăi*, manifestat prin situarea frecvențelor de variație periodică a amplitudinii vibrației rezultante în domeniul frecvențelor foarte joase, uneori chiar al frecvențelor sonore grave, fapt care face procesul de variație periodică a amplitudinii posibil de evidențiat prin *rezonatori* și uneori chiar perceptibil urechii umane.

Într-adevăr, dacă cele două pulsații, k_1 și k_2, sînt foarte apropiate între ele, atunci diferența $\Delta k = k_2 - k_1$, considerată pozitivă

conform ipotezei de lucru adoptate ($k_2 > k_1$) este foarte mică și relația (22.32) care va lua acum forma

$$w = A(t) \sin\left[\left(k_1 + \frac{\Delta k}{2}\right)t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \alpha(t)\right], \qquad (22.56)$$

cu

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\Delta kt + (\alpha_2 - \alpha_1)\right]},$$

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{A_2 - A_1}{A_1 - A_2} \operatorname{tg}\left(\frac{\Delta k}{2} t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right], \qquad (22.57)$$

scoate în evidență faptul că în această situație perioada de variație a amplitudinii — aceeași ca și a funcției de modulație a fazei — devine foarte mare în comparație cu perioadele vibrațiilor componente

$$T_A = T_b = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{k_2 - k_1} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} > T_1 > T_2,$$

iar frecvența de variație periodică a amplitudinii, avînd valoarea

$$\nu_A = \nu_b = \frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \nu_2 - \nu_1,$$

devine foarte mică; aceste din urmă două mărimi, T_b și ν_b, au primit numele de *perioada bătăilor*, respectiv de *frecvența bătăilor*.

Trecînd acum la examinarea cazului general, cînd se suprapun mai multe vibrații armonice, este ușor de înțeles că determinarea mișcării rezultante va putea fi făcută prin compunerea mai întîi a primelor două vibrații, apoi prin compunerea acestei prime mișcări rezultante parțiale cu cea de-a treia vibrație ș.a.m.d.

Este evident însă faptul că în ecuația mișcării rezultante finale, funcțiile de modulație a amplitudinii și fazei inițiale vor avea expresii mult mai complicate și că, de asemenea, vibrograma corespunzătoare unei asemenea mișcări rezultante finale va diferi foarte mult de cea reprezentată în fig. 22.5.

Excepție de la această concluzie generală o face cazul cînd toate vibrațiile armonice componente, în număr de n, sînt sincrone, în această situație și vibrația rezultantă

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(kt + \alpha_i) \qquad (22.58)$$

fiind tot armonică.

Într-adevăr, dezvoltînd în fiecare termen al sumei din membrul drept al relației precedente sinusul sumei și scoțînd factori comuni pe $\sin(kt)$ și $\cos(kt)$, rezultă egalitatea

$$w = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i\right)\sin(kt) + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\alpha_i\right)\cos(kt) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i}\cos(kt) + \sin(kt)\right],$$

sau încă, introducînd notația

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{22.59}$$

cu

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\alpha_i \sum_{j=1}^{n} A_j \sin\alpha_j}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i \sum_{j=1}^{n} A_j \cos\alpha_j}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)}}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\alpha_i}$$

se mai poate scrie

$$w = A\sin(kt + \alpha), \tag{22.60}$$

cu amplitudinea A și faza inițială α date de relațiile

$$\boxed{A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)},} \tag{22.61}$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos \alpha_i},} \tag{22.62}$$

O ultimă problemă care va mai fi discutată în legătură cu suprapunerea vibrațiilor armonice, va fi aceea a suprapunerii unui număr de trei asemenea vibrații, cu pulsațiile și fazele inițiale în progresie aritmetică și cu amplitudinile celor două vibrații cu pulsații extreme avînd valori egale, adică

$$w_1 = \frac{a}{2} \sin [(k - \omega_A) t + \alpha - \beta^*],$$

$$w_2 = A \sin (kt + \alpha), \tag{22.63}$$

$$w_3 = \frac{a}{2} \sin [(k + \omega_A)t + \alpha + \beta^*],$$

$\omega_A < k$ fiind rația progresiei pulsațiilor, β^* rația progresiei fazelor inițiale, iar $\frac{a}{2}$ fiind valoarea comună a amplitudinilor celor două vibrații cu pulsații și faze inițiale de valori extreme.

Prin înlocuirea lui β^* cu valoarea

$$\beta^* = \beta - \pi/2, \tag{22.64}$$

suma $w_1 + w_3$ poate fi adusă la forma

$$w_1 + w_3 = \frac{a}{2} \{\cos [(k - \omega_A) t + \alpha - \beta] - $$
$$ - \cos [(k + \omega_A) t + \alpha + \beta]\},$$

sau încă, transformînd diferența de cosinusuri în produs de sinusuri, se mai poate scrie

$$w_1 + w_3 = a \sin (\omega_A t + \beta) \sin (kt + \alpha). \tag{22.65}$$

Scanned with CamScanner

În baza ultimei relații, vibrația rezultantă corespunzătoare celor trei vibrații armonice definite prin ecuațiile (22.63) va putea fi descrisă prin ecuația unică

$$\boxed{w = [A + a\sin(\omega_A t + \beta)]\sin(kt + \alpha)} \tag{22.66}$$

și va fi periodică numai în cazul cînd pulsațiile k și ω_A vor fi comensurabile, adică se va putea scrie

$$\frac{k}{\omega} = \frac{n}{m} \tag{22.67}$$

— n și m fiind numere întregi, prime între ele —, perioada avînd în această situație valoarea

$$T = n \cdot \frac{2\pi}{k} = m \cdot \frac{2\pi}{\omega_A}, \tag{22.68}$$

așa cum rezultă din șirul următor de relații

$$w(t + hT) = \{A + a\sin[\omega_A(t + hT) + \beta]\}\sin[k(t + hT) + \alpha] =$$

$$= \{A + a\sin\left[\omega_A t + \beta + \omega_A \cdot h \cdot m\frac{2\pi}{\omega_A}\right]\sin\left[kt + \alpha + \right.$$

$$\left. + k \cdot h \cdot n \cdot \frac{2\pi}{k}\right],$$

care confirmă valabilitatea condiției de periodicitate

$$w(t + hT) = \omega(t), \ (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Vibrația definită prin ecuația (22.66) și satisfăcînd condiția de periodicitate (22.67) este numită *vibrație armonică cu modulație armonică în amplitudine*, funcția

$$A(t) = A + a\sin(\omega_A t + \beta) \tag{22.69}$$

fiind *funcția de modulație a amplitudinii* acestei vibrații, cu constantele a, ω_A și β purtînd, respectiv, numele de *amplitudine a funcției de modulație*, *pulsație a funcției de modulație* și *fază inițială a funcției de modulație*.

Scanned with CamScanner

Mărimea

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} \tag{22.70}$$

poartă numele de *perioada de modulație a amplitudinii* vibrației armonice modulate definită prin ecuația (22.66), iar mărimea

$$T_p = \frac{2\pi}{k} < T_A \tag{22.71}$$

este numită *pseudoperioadă* a vibrației armonice cu modulație armonică în amplitudine, datorită faptului că timpul T_p nu mai reprezintă intervalul de periodicitate a funcției $w(t)$, care este acum

$$T = nT_p, \tag{22.72}$$

ci numai intervalul după care funcția $\omega(t)$ trece, în același sens, prin valoarea zero. Într-adevăr, dacă t^* este unul din momentele în care funcția $w(t)$ ia valoarea zero, adică este valabilă egalitatea

$$w(t^*) = [A + a \sin(\omega_A t^* + \beta)] \sin(kt^* + \alpha) = 0,$$

atunci rezultă imediat și condiția

$$w(t^* + hT_p) = \{A + a \sin[\omega_A t^* + \beta + \omega_A \cdot h \cdot T_p]\} \sin\left[kt^* + \alpha + \right.$$

$$\left. + k \cdot h \cdot \frac{2\pi}{k}\right] = 0, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

deși pentru orice alt moment $t \neq t^*$ este evidentă concluzia

$$w(t) \neq w(t + hT_p)$$

dacă h nu este un multiplu întreg al lui n.

În cazul $A \neq 0$ — deci în prezența *vibrației purtătoare*, cum mai este numită vibrația definită prin cea de-a doua dintre ecuațiile (22.63) —, ecuația (22.66) a vibrației rezultante poate fi scrisă sub forma

$$w = A[1 + \gamma \sin(\omega_A t + \beta)] \sin(kt + \alpha), \tag{22.73}$$

Scanned with CamScanner

unde prin γ s-a notat raportul

$$\gamma = a/A \tag{22.74}$$

numit *grad de modulație în amplitudine* și avînd, în general, valoare subunitară, ($\gamma < 1$).

Vibrograma vibrației armonice cu modulație armonică în amplitudine, considerată în condițiile de periodicitate (22.67), are forma din fig. 22.7, a pentru $A \neq 0$ și forma din fig. 22.7, b pentru

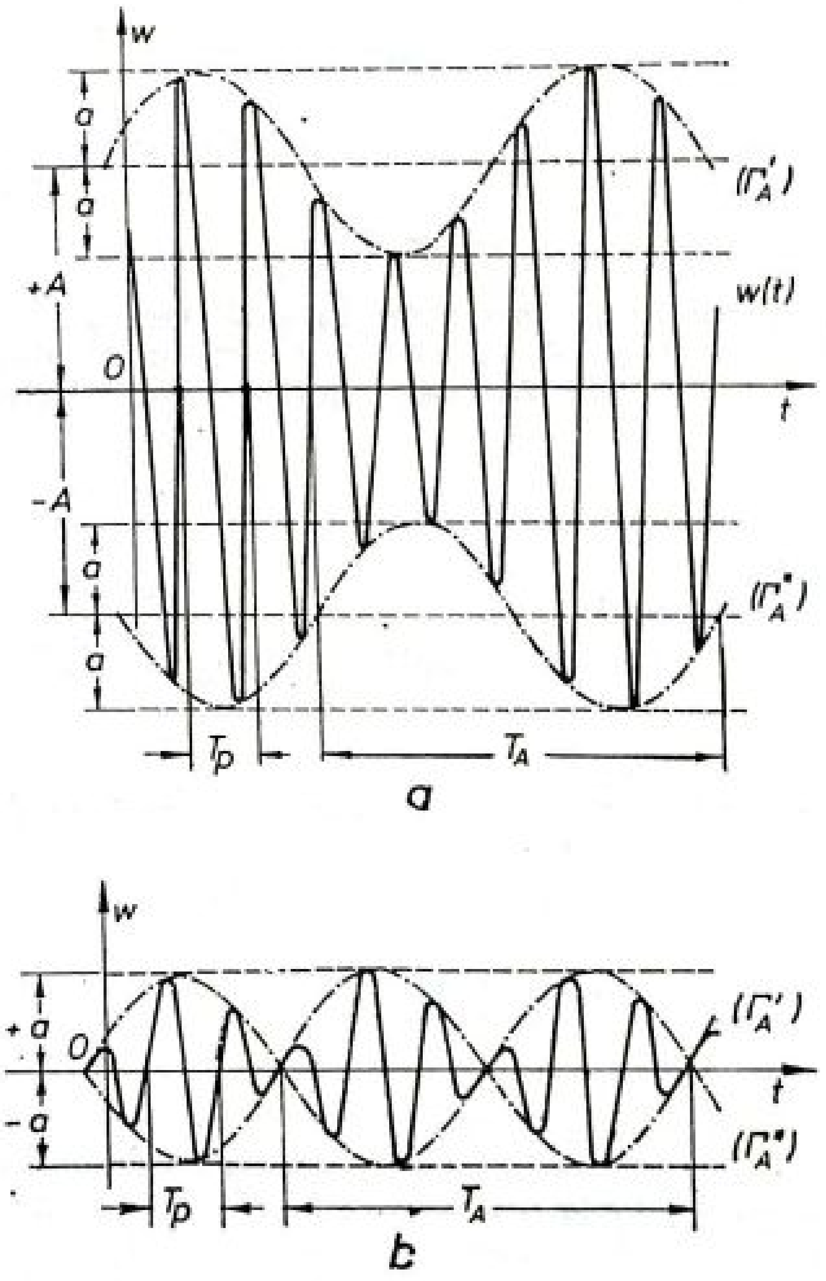


Fig. 22.7

$A = 0$, fiind reprezentată printr-o sinusoidă deformată în direcția axei ordonatelor prin multiplicare cu factorul scalar variabil

$$A(t) = A[1 + \gamma \sin(\omega_A t + \beta)] \tag{22.75}$$

pentru $A \neq 0$ și cu factorul

$$A(t) = a \sin(\omega_A t + \beta) \tag{22.76}$$

pentru cazul cînd gradul de modulație define infinit, ($A = 0$).

Înfășurătoarele vibrogramei sînt curbele (Γ'_A) și (Γ''_A), trasate punctat în fig. 22.7, ele fiind reprezentate, de asemenea, prin două sinusoide deformate în lungul axei ordonatelor prin amplificare cu factorul constant A; ecuațiile acestor înfășurătoare sînt

$$w'_A = +A\,[1 + \gamma \sin(\omega_A t + \beta)]; \quad w''_A = -A\,[1 + \gamma \sin(\omega_A t + \beta)] \tag{22.77}$$

pentru $A \neq 0$, respectiv

$$w'_A = +a \sin(\omega_A t + \beta); \; w''_A = -a \sin(\omega_A t + \beta) \tag{22.78}$$

pentru $A = 0$.

După cum se observă, înfășurătoarele sînt limitate, la rîndul lor, de dreptele

$$w'_{1,2} = +A\,[1 \pm \gamma]; \; w''_{1,2} = -A\,[1 \pm \gamma]$$

în cazul $A \neq 0$ și de dreptele

$$w' = +a; \; w'' = -a$$

în cazul cînd gradul de modulație devine infinit, ($A = 0$).

Spectrograma corespunzătoare vibrației armonice cu modulație armonică în amplitudine are forma din fig. 22.8, a pentru valori finite ale gradului de modulație ($A \neq 0$) — deci în prezența vibrației purtătoare — și forma din fig. 22.8, b în cazul gradului de modulație infinit, ($A=0$) —, deci în absența vibrației purtătoare.

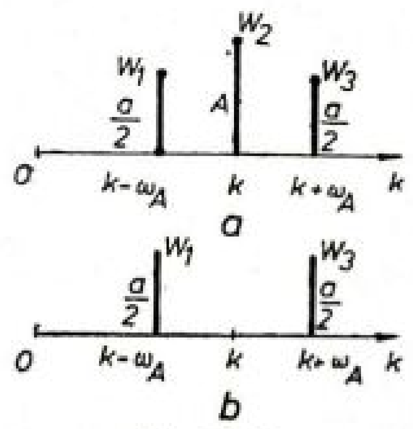


Fig. 22.8

Datorită proporționalității pulsațiilor cu frecvențele, $\left(k = \dfrac{2\pi}{T} = 2\,\pi\nu\right)$, porțiu-

nea din spectrogramă corespunzătoare celor trei reprezentări ale vibrațiilor componente poartă numele de *banda a spectrului de frecvențe* ale vibrației armonice cu modulație armonică în amplitudine, iar intervalul

$$\overline{K_1K_3} = 2\omega_A, \tag{22.79}$$

determinat de această bandă pe axa pulsațiilor, este numit *lărgimea benzii de frecvență a spectrului vibrației* rezultante considerate.

2° **Vibrații periodice generale**

În majoritatea covîrșitoare a situațiilor întîlnite în aplicațiile tehnice, funcțiile periodice de timp $w = w(t)$ sînt mărginite, continue cel puțin pe porțiuni și prezintă un număr finit de extreme într-o perioadă, satisfăcînd cunoscutele condiții de monotonie ale lui Lejeune-Dirichlet; în aceste cazuri, folosindu-se metodele analizei armonice, aceste funcții vor putea fi dezvoltate în serii Fourier, scriindu-se

$$\boxed{w = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} [a_\lambda \cos(\lambda k t) + b_\lambda \sin(\lambda k t)],} \tag{22.80}$$

cu

$$k = 2\pi/T \tag{22.81}$$

(T fiind perioada funcției) și cu coeficienții seriei determinați prin relațiile

$$a_0 = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\frac{\pi}{k}} w(t)\,\mathrm{d}t; \tag{22.82}$$

$$a_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} w(t)\cos(\lambda k t)\,\mathrm{d}t, \tag{22.83}$$

$$b_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2k}{\pi}} w(t)\sin(\lambda k t)\,\mathrm{d}t. \tag{22.84}$$

CamScanner
Scanned with CamScanner

Scoaterea, forțat, în factori a coeficienților $b_\lambda \neq 0$ și introducerea notațiilor

$$\frac{a_\lambda}{b_\lambda} = \mathrm{tg}\ \alpha_\lambda = \frac{\sin \alpha_\lambda}{\cos \alpha_\lambda}, \tag{22.85}$$

cu

$$b_\lambda \frac{1}{\cos \alpha_\lambda} = \sqrt{a_\lambda^2 + b_\lambda^2} = A_\lambda, \tag{22.86}$$

permite să se mai scrie dezvoltarea în serie Fourier a funcției periodice $w = w(t)$ sub forma

$$\boxed{w = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda \sin(\lambda k t + \alpha_\lambda),} \tag{22.87}$$

care va permite, după cum se va vedea ulterior, să se dea o nouă interpretare vibrației periodice generale.

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției periodice $w = w(t)$ capătă, așa cum se știe din analiza armonică, forme simplificate în următoarele situații:

a) *În cazul parității funcției periodice* $w(t)$, această paritate, considerată în raport cu originea timpului, fiind exprimată prin condiția

$$w(-t) = w(t), \tag{22.88}$$

poate fi recunoscută prin simetria pe care o prezintă vibrograma $w = w(t)$ în raport cu axa ordonatelor, (fig. 22.9, a).

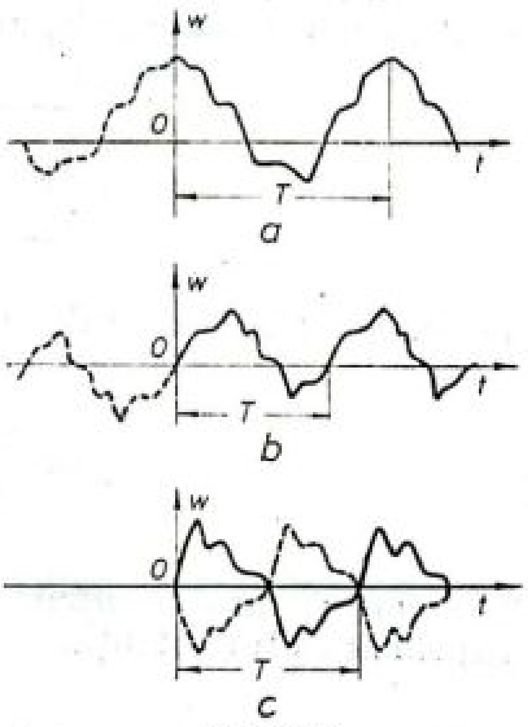


Fig. 22.9

În această situație, dezvoltarea în serie Fourier va conține numai cosinusurile, adică se va putea scrie

$$\boxed{w = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \cos(\lambda k t)}, \tag{22.89}$$

cu coeficienții a_λ determinați acum cu ajutorul relațiilor

$$a_\lambda = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{k}} w(t)\cos(\lambda k t)\,dt. \tag{22.90}$$

b) *În cazul imparității funcției periodice w(t)* această imparitate, considerată de asemenea în raport cu originea timpului, fiind exprimată prin condiția

$$w(-t) = -w(t), \tag{22.91}$$

poate fi recunoscută prin simetria vibrogramei față de originea reperului $\Omega t w$ (fig. 2.9, b).

În această de-a doua situație dezvoltarea în serie Fourier va conține numai sinusurile, adică se va putea scrie

$$\boxed{w = \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_\lambda \sin(\lambda k t)}\,, \tag{22.92}$$

cu coeficienții b_λ dați de relațiile

$$b_\lambda = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{k}} w(t)\sin(\lambda k t)\,dt. \tag{22.93}$$

c) *În cazul simetriei funcției periodice w(t)*, această simetrie, exprimată prin condiția

$$w(t + T/2) = -w(t), \tag{22.94}$$

poate fi recunoscută în vibrogramă (fig. 22.9, c) prin faptul că translația efectuată în lungul axei timpului, în oricare din cele două sensuri, cu o distanță egală cu $\frac{T}{2}$, face ca vibrograma translatată să devină simetrică, față de axa absciselor, cu vibrograma inițială.

Scanned with CamScanner

În această din urmă situație, dezvoltarea în serie Fourier conține numai termeni de rang impar, $(\lambda = 2\mu - 1;\ \mu = 1, 2, 3, \ldots)$, adică se poate scrie

$$w = \sum_{\mu=1}^{\infty} [a_{2\mu-1} \cos[(2\mu - 1)kt] + b_{2\mu-1} \sin[(2\mu - 1)kt] = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{2\mu-1} \sin[(2\mu - 1)kt + \alpha_{2\mu-1}]. \tag{22.95}$$

În ceea ce privește caracteristicile unei vibrații periodice cu funcția de definiție dezvoltată în serie Fourier, ele vor avea expresiile stabilite mai jos :

— *valoarea medie a elongației vibrației în intervalul unei perioade*, determinată prin relația

$$w_m = \overline{w(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda)\right] dt = \frac{1}{T}\left[\frac{a_0}{2}T - \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda k} A_\lambda \cos(\lambda kt + \alpha_\lambda)\Big|_t^{t+T}\right],$$

se va reduce, datorită relației evidente

$$\cos[\lambda k(t + T) + \alpha_\lambda] = \cos(\lambda kt + \alpha_\lambda)$$

numai la termenul liber al expresiei (22.87), adică va rezulta

$$\boxed{w_m = a_0/2;} \tag{22.96}$$

— *media pătratică a elongației vibrației în intervalul unei perioade*, determinată prin relația

$$\mu_p = \overline{w^2(t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda)\right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda) + \sum_{\lambda,\mu=1}^{\infty} A_\lambda A_\mu \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda)\sin(\mu kt + \alpha_\mu)\right] dt,$$

Scanned with CamScanner

va avea, datorită condițiilor

$$\int_t^{t+T} \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda)\,dt = -\frac{1}{\lambda k}\cos(\lambda kt + \alpha_\lambda)\Big|_t^{t+T} = 0$$

și

$$\int_t^{t+T} \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda)\sin(\mu kt + \alpha_\mu)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\int_t^{t+T}\cos[(\lambda-\mu)kt +$$

$$+(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)]\,dt - \int_t^{t+T}\cos[(\lambda+\mu)kt + (\alpha_\lambda+\alpha_\mu)]\,dt \begin{cases} = \dfrac{T}{2}, & (\lambda = \mu) \\ = 0, & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

— condiții ușor de verificat în baza relațiilor

$$\sin[(\lambda-\mu)kt + (\alpha_\lambda - \alpha_\mu) + (\lambda-\mu)kT] =$$
$$= \sin[(\lambda-\mu)kt + (\alpha_\lambda - \alpha_\mu)],$$

$$\sin[(\lambda+\mu)kt + (\alpha_\lambda+\alpha_\mu) + (\lambda+\mu)kt] = \sin[(\lambda+\mu)kt + (\alpha_\lambda+\alpha_\mu)],$$

de asemenea evidente —, valoarea

$$\boxed{\mu_p = \overline{w^2(t)} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda^2;} \tag{22.97}$$

— *valoarea eficace a elongației vibrației în intervalul unei perioade*, determinată prin relația

$$\boxed{w_{ef} = \sqrt{\mu_p} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda^2};} \tag{22.98}$$

— *factorul de formă al vibrației în intervalul unei perioade*, dat de relația

$$\boxed{f_w = \frac{w_{ef}}{w_m} = \sqrt{1 + \frac{2}{a_0^2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda^2}.} \tag{22.99}$$

Scanned with CamScanner

Revenind la forma (22.87) a ecuației vibrației periodice, se observă că ea permite să se interpreteze o asemenea vibrație ca rezultînd din suprapunerea unui număr infinit de vibrații armonice, cu pulsațiile crescînd în progresie geometrică cu rația $r = k$, prima vibrație componentă

$$w_{(1)} = A_1 \sin(kt + \alpha_1) \tag{22.100}$$

numindu-se *armonică fundamentală a vibrației periodice*, iar celelalte vibrații componente

$$w_{(\lambda)} = A_\lambda \sin(\lambda kt + \alpha_\lambda) = A_\lambda \sin(k_\lambda t + \alpha_\lambda), \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots) \tag{22.101}$$

purtînd numele de *armonice de ordinul superior* λ ale vibrației considerate.

Forma (22.87) a ecuației unei vibrații periodice mai permite, de asemenea, să se stabilească forma spectrogramei unei asemenea vibrații, spectrul frecvențelor prezentîndu-se în această situație ca în fig. 22.10, cu segmentele reprezentative ale amplitudinilor situate la distanțe egale unul de altul și cu lărgimea benzii frecvențelor infinită.

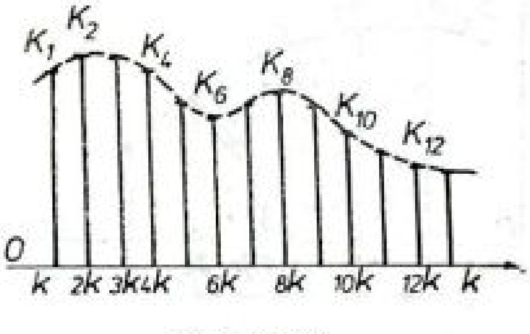


Fig. 22.10

Cunoașterea acestei spectrograme prezintă o deosebită importanță pentru aplicațiile practice, construcția ei constituind, de fapt, unul din aspectele principale ale oricărei cercetări experimentale în domeniul tehnicii vibrațiilor.

Într-adevăr, întrucît în aplicațiile concrete nu se va putea lucra cu sume ale unui număr infinit de termeni, așa cum apar ele în relațiile (22.80) și (21.87), va trebui să se recurgă la aproximarea sumelor de serii infinite prin polinoame trigonometrice de un ordin oarecare l, adică la aproximări de forma

$$\boxed{w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{l} [a_\lambda \cos(\lambda kt) + b_\lambda \sin(\lambda kt)],} \tag{22.102}$$

respectiv

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{l} A_\lambda \sin(\lambda k t + \alpha_\lambda). \qquad (22.103)$$

În asemenea situații, spectrograma vibrației va fi aceea care va permite să se stabilească ordinul maxim al polinomului trigonometric care aproximează dezvoltarea în serie Fourier, adică în fond, termenul de la care poate începe neglijarea armonicelor de ordin superior, cu amplitudini mici în comparație cu cele ale armonicelor considerate în polinom.

În cazul seriilor trigonometrice puternic convergente, serii întîlnite, de altfel, destul de frecvent în aplicațiile tehnice, dezvoltarea în serie Fourier se aproximează, de regulă, cu un polinom trigonometric cuprinzînd termenii corespunzători bandei de frecvențe care include cel mai mare dintre maximele curbei $K_1K_2 \ldots K_n$, ce unește extremitățile ordonatelor spectrogramei (fig. 22.11), numărul armonicelor cuprinse într-o asemenea bandă fiind obișnuit de ordinul unităților.

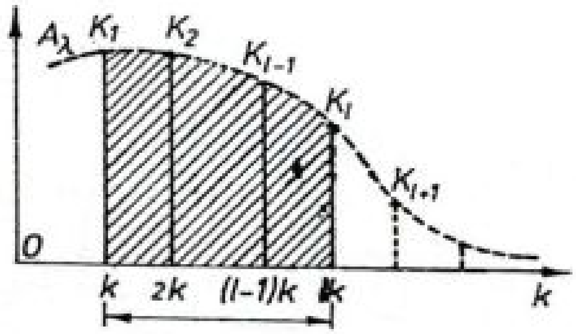


Fig. 22.11.

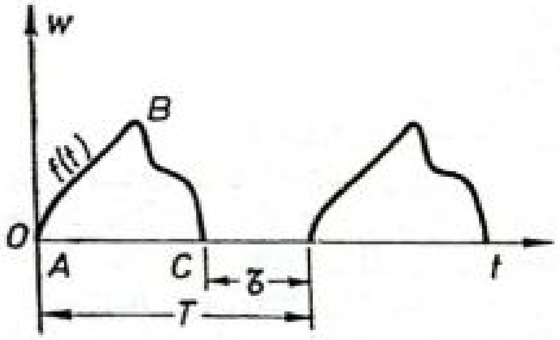


Fig. 22.12.

Determinarea, în această situație, a coeficienților polinomului trigonometric care aproximează dezvoltarea în serie Fourier se poate face prin următoarele mijloace:

1) *Prin utilizarea analizorilor de frecvență* adică a unor aparate construite pe principiul integratoarelor mecanice de tip planimetru, care, pentru o vibrogramă dată, permit determinarea unui anumit număr de coeficienți Fourier (5 coeficienți în cazul *analizorului Corradi*, 14 coeficienți în cazul *analizorului Harwey*).

2) *Prin prelucrarea grafo-analitică a vibrogramelor*, existînd mai multe metode de asemenea prelucrări, dintre care cea mai des folosită este *metoda Fischer-Hinnen*, [19].

3) *Prin calcul*, în cazul unor vibrații periodice cu cicluri simple, alcătuite din cîte o porțiune de curbă plană clasică — buclă sinusoidală, arc de parabolă, segment de dreaptă etc. — continuată uneori și cu o porțiune, corespunzătoare unei durate $\tau < T$, fără variații ale funcțiilor $w(t)$, (fig. 22.12), o asemenea vibrație cu caracter pulsatoriu numindu-se *vibrație periodică intermitentă*.

În continuare, vor fi stabilite valorile acestor coeficienți, precum și formele polinoamelor trigonometrice care vor aproxima dezvoltările în serii Fourier, pentru următoarele două tipuri de vibrații periodice cu cicluri simple, întîlnite mai des în aplicațiile tehnice:

Vibrația periodică intermitentă în bucle sinusoidale, definită în intervalul unei perioade prin ecuația

$$w(t) = \begin{cases} A \sin\left(\dfrac{\pi}{T-\tau}\, t\right) & \text{pentru} \quad t \in [0,\ T-\tau], \\[2ex] 0 & \text{pentru} \quad t \in \left[T-\tau,\ T = \dfrac{2\pi}{k}\right], \end{cases} \tag{22.104}$$

$\tau < T$ fiind durata intermitenței, (fig. 22.13, a).

Calculînd coeficienții seriei Fourier corespunzătoare funcției periodice definită mai sus, se găsesc valorile

$$a_0 = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}-\tau} A \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2\pi}{k}-\tau}\, t\right) dt = \frac{2k}{\pi^2} A\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right), \tag{22.105}$$

$$a_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}-\tau} A \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2\pi}{k}-\tau}\, t\right)\cos(\lambda k t)\,dt = -\frac{k\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)A}{\lambda^2 k^2\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)^2-\pi^2}\,[1+\cos(\lambda k \tau)], \tag{22.106}$$

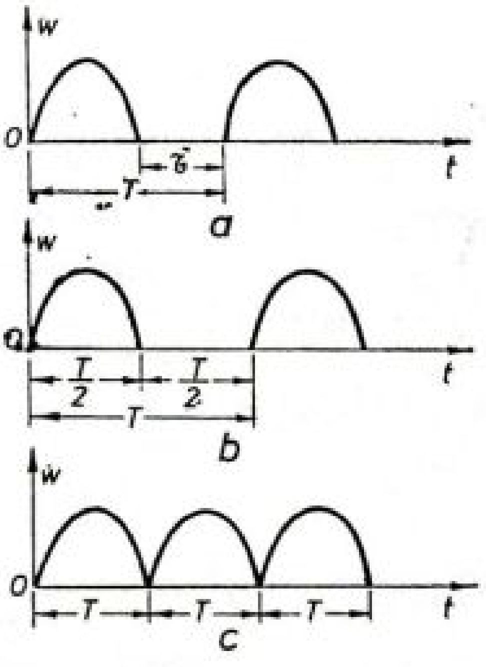


Fig. 22.13

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

$$b_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}-\tau} A \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2\pi}{k}-\tau}\, t\right) \sin(\lambda k t)\, dt =$$

$$= \frac{k\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)A}{\lambda^2 k^2\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)^2-\pi^2} \sin(\lambda k \tau). \qquad (22.107)$$

În baza acestor valori ale coeficienţilor Fourier, ecuaţia finită a vibraţiei periodice definită prin ecuaţia (22.104) în intervalul unei perioade, va putea fi scrisă acum sub forma

$$w(t) = kA\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)\left\{\frac{1}{\pi^2} - \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{1}{\lambda^2 k^2\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)^2-\pi^2}[(1+ \right.$$
$$\left. +\cos(\lambda k \tau)] \cos(\lambda k t) - \sin(\lambda k \tau)\sin(\lambda k t)]\right\}$$

(22.108)

Această ecuaţie capătă forme mai simple în cazul următoarelor vibraţii periodice în bucle sinusoidale particulare:

a) *vibraţia în bucle sinusoidale cu intermitenţe de o semiperioadă*, corespunzătoare condiţiei

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{k}. \qquad (22.109)$$

Avînd în vedere consecinţele condiţiei precedente, adică

$$\sin\left(\lambda k \frac{T}{2}\right) = \sin\left(\lambda k \frac{\pi}{k}\right) = 0,$$
$$\cos\left(\lambda k \frac{T}{2}\right) = \cos\left(\lambda k \frac{\pi}{k}\right) = (-1)^\lambda \qquad (22.110)$$

și deci

$$\frac{1+\cos\left(\lambda k\frac{T}{2}\right)}{\lambda^2 k^2\frac{\pi^2}{k^2}-\pi^2}=\frac{1+\cos(\lambda\pi)}{(\lambda^2-1)\pi^2}\begin{cases}=\dfrac{2}{(\lambda^2-1)\pi^2} & \text{pentru } \lambda=2\mu,\\ =0 & \text{pentru } \lambda=2\mu-1\end{cases} \quad (22.111)$$

și observind că pentru coeficienții b_λ rezultă in acest caz valorile

$$b_\lambda=\frac{\pi\sin\left(\lambda k\frac{\pi}{k}\right)}{\lambda^2 k^2\frac{\pi^2}{k^2}-\pi^2}=\frac{\sin(\lambda\pi)}{(\lambda^2-1)\pi}\begin{cases}=0 & \text{pentru } \lambda\neq 1,\\ =-\dfrac{1}{2} & \text{pentru } \lambda=1\end{cases} \quad (22.112)$$

— ultima valoare obținindu-se prin aplicarea cunoscutei reguli a lui L'Hospital, adică scriindu-se

$$\lim_{\lambda\to 1}\frac{\sin(\lambda\pi)}{(\lambda^2-1)\pi}=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\frac{d}{d\lambda}[\sin(\lambda\pi)]}{\frac{d}{d\lambda}[(\lambda^2-1)\pi]}=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\pi\cos(\lambda\pi)}{2\lambda\pi}=-\frac{1}{2},$$

rezultă următoarea formă particulară a ecuației (22.108)

$$\boxed{w(t)=A\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(kt)-\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{(4\mu^2-1)}\cos(2\mu kt)\right]}. \quad (22.113)$$

Vibrograma acestei vibrații este reprezentată in fig. 22.13, b;

b) *vibrația periodică în bucle sinusoidale, fără intermitențe*, corespunzătoare condiției,

$$\tau=0, \quad (22.114)$$

pentru care ecuația (22.108) ia forma

$$\boxed{w(t)=\frac{2A}{\pi}\left[1-2\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{4\lambda^2-1}\cos(\lambda kt)\right]}, \quad (22.115)$$

iar vibrograma acestei vibrații este reprezentată în fig. 22.13, c.

Scanned with CamScanner

În legătură cu această ultimă vibrație, se va face observația că ea este echivalentă unei *vibrații în bucle sinusoidale comutate*, definită în intervalul unei perioade prin ecuația

$$w(t) = \begin{cases} A \sin (k^*t) & \text{pentru } t \in \left[0, \dfrac{T^*}{2}\right], \\ -A \sin (k^*t) & \text{pentru } t \in \left[\dfrac{T^*}{2}, \ T^* = \dfrac{2\pi}{k^*}\right], \end{cases}$$

cu perioada egală cu dublul perioadei vibrației definite prin ecuația (22.115), adică cu

$$T^* = 2T \text{ și deci } k^* = k/2.$$

Ecuația finită a vibrației în bucle sinusoidale comutate va putea fi obținută direct din ecuația (22.115), făcîndu-se înlocuirea $k = 2k^*$, rezultînd astfel

$$\boxed{w(t) = \frac{2A}{\pi}\left[1 - 2\sum_{\lambda=1}^{l} \frac{1}{4\lambda^2 - 1} \cos (2\lambda k^* t)\right].} \qquad (22.116)$$

Vibrația periodică în dreptunghi. Această vibrație periodică, avînd vibrograma reprezentată în fig. 22.14, a, este definită în intervalul unei perioade prin ecuația

$$w(t) = \begin{cases} A & \text{pentru} \quad t \in [0, T - \tau], \\ a & \text{pentru} \quad t \in \left[T - \tau, \ T = \dfrac{2\pi}{k}\right]. \end{cases} \qquad (22.117)$$

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier corespunzătoare funcției periodice (22.117) vor avea valorile stabilite mai jos:

$$a_0 = \frac{k}{\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{k} - \tau} A\,dt + \int_{\frac{2\pi}{k} - \tau}^{\frac{2\pi}{k}} a\,dt = \frac{k}{\pi}\left[A\left(\frac{2\pi}{k} - \tau\right) + a\tau\right],\right.$$

(22.118)

$$a_\lambda = \frac{k}{\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{k}-\tau} A\cos(\lambda k t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{2\pi}{k}-\tau}^{\frac{2\pi}{k}} a\cos(\lambda k t)\,dt\right] = -$$

$$- \frac{1}{\lambda\pi}(A-a)\sin(\lambda k \tau), \quad (22.119)$$

$$b_\lambda = \frac{k}{\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{k}-\tau} A\sin(\lambda k t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{2\pi}{k}-\tau}^{\frac{2\pi}{k}} a\sin(\lambda k t)\,dt\right] =$$

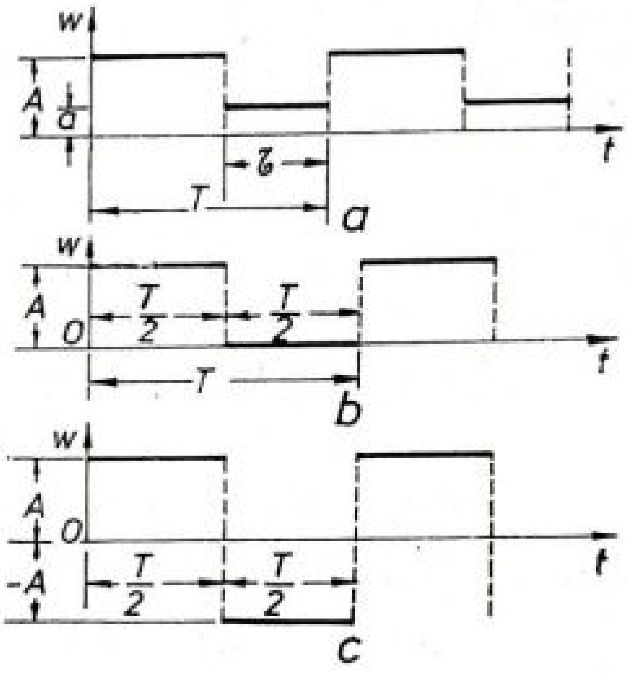


Fig. 22.14.

$$= \frac{1}{\lambda\pi}(A-a)\,[1-\cos(\lambda k\tau)]. \quad (22.120)$$

În baza acestor valori, rezultă următoarea formă generală a ecuației finite a vibrației periodice în dreptunghi, ecuație redusă la un polinom trigonometric de ordinul l, care aproximează dezvoltarea în serie Fourier

$$w(t) = \frac{k}{2\pi}\left[A\left(\frac{2\pi}{k}-\tau\right)+a\tau\right] - \frac{A-a}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda}[\sin(\lambda k\tau)\cos(\lambda k t) - $$
$$-[1-\cos(\lambda k\tau)]\sin(\lambda k t)]. \quad (22.121)$$

Această ecuație se simplifică în următoarele cazuri de vibrații periodice în dreptunghi, particulare:

a) *vibrația periodică în dreptunghi cu intermitențe de o semiperioadă*, corespunzătoare condițiilor

$$\tau = T/2 = \pi/k\,; \; a = 0, \quad (22.122)$$

CamScanner

Scanned with CamScanner

cu consecința

$$1-\cos\left(\lambda k\frac{T}{2}\right)=1-\cos\left(\lambda k\frac{\pi}{k}\right)\begin{cases}=0 \text{ pentru } \lambda=2\mu,\\ =2 \text{ pentru } \lambda=2\mu-1,\end{cases} \tag{22.123}$$

pentru care ecuația (22.121) ia forma

$$\boxed{w(t)=A\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{2\mu-1}\sin\left[(2\mu-1)kt\right],\right.} \tag{22.124}$$

Vibrograma acestei vibrații este reprezentată în fig. 22.14, b;

b) *vibrația periodică în dreptunghi, simetrică*, caracterizată prin condițiile

$$\tau=T/2=\pi/k;\ a=-A, \tag{22.125}$$

pentru care ecuația (22.121) ia forma

$$\boxed{w(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{2\mu-1}\sin\left[(2\mu-1)kt\right],} \tag{22.126}$$

vibrograma acestei vibrații fiind reprezentată în fig. 22.14, c.

În ceea ce privește valorile caracteristicilor tuturor acestor vibrații periodice, cu ecuațiile finite reprezentate sub forma unor polinoame trigonometrice de ordinul l, ele vor putea fi calculate cu ajutorul formulelor generale (22.96), (22.97), (22.98) și (22.99), nlocuindu-se sumele infinite cu sume finite, formate din cîte l termeni.

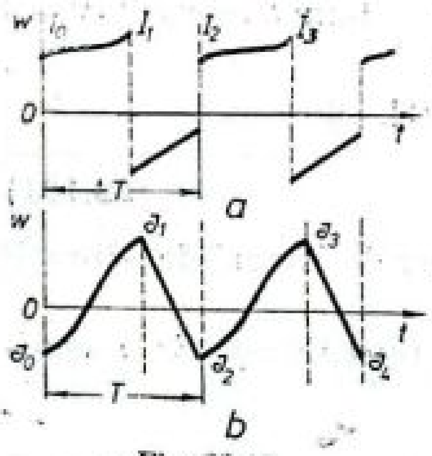


Fig. 22.15.

Vibrații periodice de relaxare. *Vibrația periodică de relaxare*, a cărei vibrogramă este constituită tot din cicluri simple, formate, cel mai adesea, din segmente de drepte, se caracterizează fie printr-o variație bruscă, după o variație prealabilă mai lentă, în fiecare ciclu, a elongației vibrației, variația bruscă fiind reflectată în vibrogramă prin existența unor puncte de discontinuitate de specia întîi (ca în punctele I_0, I_1, I_2 etc. în vibrograma din fig. 22.15, a), fie printr-o variație bruscă,

urmînd, de asemenea, unei variații prealabile lente, în fiecare ciclu, a vitezei vibrației, variație reflectată în vibrogramă prin prezența unor puncte de întoarcere, (ca în punctele J_0, J_1, J_2 etc., în vibrograma din fig. 22.15, b).

În continuare vor fi examinate două dintre tipurile de vibrații periodice de relaxare, întîlnite curent în aplicațiile tehnice.

a) *Vibrația de relaxare în dinți de fierăstrău.* O formă mai generală a unei asemenea vibrații de relaxare este cea corespunzătoare vibrogramei din fig. 22.16, a, definită în intervalul unei perioade prin ecuația

$$w(t) = \frac{A-a}{T}\,t + a \quad \text{pentru}$$

$$t \in \left[0,\ T = \frac{2\pi}{k}\right], \qquad (22.127)$$

cu a considerat negativ.

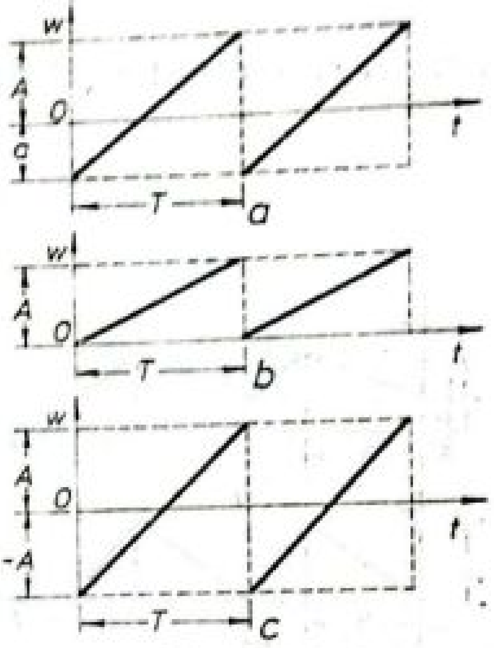


Fig. 22.16

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier corespunzătoare acestei funcții periodice vor avea valorile

$$a_0 = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}}\left[k\,\frac{A-a}{2\pi}\,t + a\right]\mathrm{d}t = (A+a), \qquad (22.128)$$

$$a_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}}\left[k\,\frac{A-a}{2\pi}\,t + a\right]\cos(\lambda k t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad (22.129)$$

$$b_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}}\left[k\,\frac{A-a}{2\pi}\,t + a\right]\sin(\lambda k t)\,\mathrm{d}t = -\frac{A-a}{\lambda\pi}. \qquad (22.130)$$

Avînd în vedere valorile găsite mai sus pentru coeficienții Fourier, se poate scrie acum următoarea ecuație finită a vibrației periodice în dinți de fierăstrău

$$\boxed{w(t) = \frac{A+a}{2} - \frac{A-a}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda k t).} \qquad (22.131)$$

l reprezentînd și acum ordinul ultimului termen al polinomului trigonometric care aproximează dezvoltarea în serie Fourier.

Ecuația precedentă capătă forme mai sinple în cazul următoarelor vibrații în dinți de fierăstrău particulare:

Vibrația de relaxare în dinți de fierăstrău cu valori minime zero, caracterizată prin condiția

$$a = 0, \tag{22.132}$$

pentru care ecuația (22.131) ia forma

$$\boxed{w(t) = A\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda k t)\right.} \tag{22.133}$$

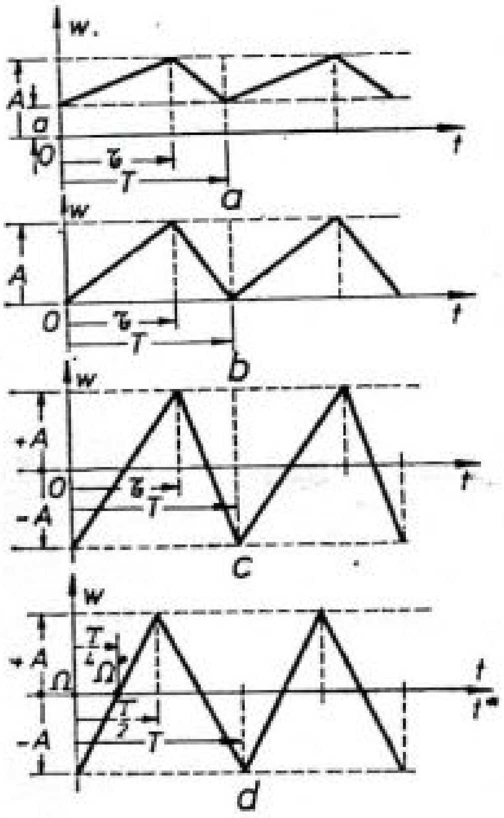


Fig. 22.17.

vibrograma corespunzătoare ei fiind reprezentată în fig. 22.16, b;

Vibrația de relaxare în dinți de fierăstrău cu extreme de mărimi egale, corespunzătoare condiției

$$a = -A, \tag{22.134}$$

pentru care ecuația (22.131), ia forma

$$\boxed{w(t) = -2\frac{A}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda k t),} \tag{22.135}$$

vibrograma acestei vibrații fiind reprezentată în fig. 22.16, c.

b) *Vibrația de relaxare în triunghi.* Este vorba de vibrația periodică cu vibrograma reprezentată în fig. 22.17, a și definită în intervalul unei perioade prin ecuația

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{A-a}{\tau}t + a & \text{pentru} \quad t \in [0, \tau], \\ -\dfrac{A-a}{T-\tau}t + \dfrac{AT - a\tau}{T-\tau} & \text{pentru} \quad t \in [\tau, T]. \end{cases} \tag{22.136}$$

Scanned with CamScanner

Calculînd și acum coeficienții dezvoltării în serie Fourier, vor rezulta următoarele valori ale acestora

$$a_0 = \frac{2}{T}\left\{\int_0^\tau\left[\frac{A-a}{\tau}t+a\right]\mathrm{d}t+\int_\tau^T\left[-\frac{A-a}{T-\tau}t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{AT-a\tau}{T-\tau}\right]\mathrm{d}t\right\} = A+a; \qquad (22.137)$$

$$a_\lambda = \frac{2}{T}\left\{\int_0^\tau\left[\frac{A-a}{\tau}t+a\right]\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.+\int_\tau^T\left[-\frac{A-a}{T-\tau}t+\frac{AT-a\tau}{T-\tau}\right]\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t\right\}=$$

$$=\frac{(A-a)T^2}{2\pi^2\lambda^2\tau(T-\tau)}\left[\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right)-1\right];$$

$$b_\lambda = \frac{2}{T}\left\{\int_0^\tau\left[\frac{A-a}{\tau}t+a\right]\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.+\int_\tau^T\left[-\frac{A-a}{T-\tau}t+\frac{AT-a\tau}{T-\tau}\right]\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t\right\}=$$

$$=\frac{(A-a)T^2}{2\pi^2\lambda^2\tau(T-\tau)}\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right). \qquad (\lambda=1,2,\ldots,l).$$

(22.138)

În baza relațiilor precedente, se va putea scrie următoarea ecuație finită a vibrației de relaxare în triunghi

$$w(t) = \frac{1}{2}(A+a)+\frac{(A-a)T^2}{2\pi^2\tau(T-\tau)}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda^2}\left\{\left[\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1\right]\cos(\lambda t)+\left[\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right)\sin(\lambda t)\right.\right\}.$$

(22.139)

Ecuația (22.139) capătă forme simplificate în cazul următoarelor vibrații de relaxare în triunghi, particulare :

Vibrația de relaxare în triunghi, cu valori minime zero, corespunzătoare condiției

$$a = 0, \tag{22.140}$$

pentru care ecuația (22.139) ia forma

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}A + \frac{AT^2}{2\pi^2\tau(T-\tau)}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda^2}\left\{\left[\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right) - 1\right]\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right) + \left[\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right)\right]\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\right\},} \tag{22.141}$$

vibrația respectivă fiind reprezentată în fig. 22.17, b.

Vibrația de relaxare în triunghi, cu extreme de mărimi egale, caracterizată prin condiția

$$a = -A, \tag{22.142}$$

pentru care ecuația (22.139) capătă forma particulară

$$\boxed{w(t) = \frac{AT^2}{\pi^2\tau(T-\tau)}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{\lambda^2}\left\{\left[\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right) - 1\right]\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right) + \left[\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right)\right]\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}t\right)\right\}.} \tag{22.143}$$

iar vibrograma ei are forma din fig. 22.17, c.

În legătură cu vibrația în triunghi, se va mai observa că pentru $\tau = \frac{T}{2}$, cînd vor rezulta condițiile

$$\sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right) = \sin\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = 0$$

și

$$\cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\tau\right) = \cos\left(\lambda\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) \begin{cases} = 1 \text{ pentru } \lambda = 2\mu, \\ = -1 \text{ pentru } \lambda = 2\mu - 1 \end{cases}$$

$$(\mu = 1, 2, 3, \ldots m).$$

se obține *vibrația periodică în triunghi isoscel*, a cărei ecuație finită va avea, în baza condiției (22.142), forma

$$\boxed{w(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1}{(2\mu-1)^2}\cos\left[(2\mu-1)\cdot\frac{2\pi}{T}\,t\right]}, \quad (22.144)$$

ei corespunzîndu-i vibrograma din fig. 22.17, d.

Prin deplasarea originii pe axa timpului cu distanța

$$\overline{\Omega\Omega^*} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2k},$$

(fig. 22.17, d), deci prin considerarea unui nou timp, t^*, determinat în funcție de timpul t prin relația

$$t^* = t - \frac{T}{4} = t - \frac{\pi}{2k},$$

se mai obține, în baza transformării evidente

$$\cos\left[(2\mu-1)\frac{2\pi}{T}\,t\right] = \cos\left[(2\mu-1)\,kt^* + (2\mu-1)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right] =$$
$$= (-1)^\mu \sin\left[(2\mu-1)\,kt^*\right],$$

următoarea formă pentru ecuația (22.144)

$$\boxed{w(t) = -\frac{8A}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^2}\sin\left[(2\mu-1)\,kt^*\right].} \quad (22.145)$$

Prin prezentarea ecuațiilor vibrațiilor de relaxare sub forma polinoamelor trigonometrice, caracteristicile lor vor putea fi calculate cu ajutorul relațiilor (22.96), (22.97), (22.98) și (22.99), înlocuindu-se și acum sumele infinite prin sume finite.

22.1.2. Forme ale ecuațiilor vibrațiilor cvasiperiodice

Se numesc *vibrații cvasiperiodice* acele oscilații mecanice ale unui sistem vibrant, în care în evoluția variațiilor $w(t)$ ale parametrilor lagrangeieni ai sistemului se poate distinge o periodicitate numai în

Scanned with CamScanner

ceea ce privește trecerea prin valorile zero, în sensul cu după intervale determinate de timp T_p, numite *pseudoperioade*, variațiile $w(t)$ iau, în mod regulat, valoarea zero; o asemenea vibrație cvasiperiodică va fi caracterizată deci prin condiția

$$w(t^*) = w(t^* + hT_p) = 0, \ (h = 1, 2, 3, \ldots), \tag{22.146}$$

t^* fiind deci unul din momentele în care funcția $w(t)$ trece prin valoarea zero.

Unul din tipurile mai generale de vibrații cvasiperiodice este *vibrația cvasiarmonică cu modulație oarecare în amplitudine și cu modulație armonică în fază*, definită prin ecuația

$$w(t) = A(t) \sin\left[kt + \int_0^t \chi(t)\, dt + \alpha\right], \tag{22.147}$$

unde

$$\chi(t) = \Delta k \cos(\omega_f t + \beta), \tag{22.148}$$

cu mărimile k și ω_f comensurabile, adică satisfăcînd relația

$$k/\omega_f = n/m, \tag{22.149}$$

n și m fiind numere întregi, considerate prime între ele și cu mărimile Δk și β constante; funcția $\chi(t)$ reprezintă funcția de modulație a frecvenței, constanta Δk fiind amplitudinea ei, notată astfel pentru a scoate în evidență faptul că, de regulă, ea constituie doar o fracțiune din pulsația k.

Funcția de modulație a fazei va avea forma

$$\alpha(t) = \int_0^t \chi(t)\, dt = \eta \sin(\omega_f t + \beta) - \eta \sin \beta, \tag{22.150}$$

prin η fiind notat raportul

$$\eta = \Delta k/\omega_f \tag{22.151}$$

numit *indice de modulație a fazei*.

Avînd în vedere expresia (22.150) a funcției de modulație a fazei, rezultă acum următoarea formă finală a ecuației (22.147)

$$\boxed{w(t) = A(t) \sin[kt + \eta \sin(\omega t + \beta) + (\alpha - \eta \sin \beta)].} \tag{22.152}$$

Se va arăta acum că în condițiile (22.149), vibrograma vibrației (22.152) intersectează periodic axa timpului, pseudoperioada acestei vibrații avînd valoarea

$$T_p = nT = mT_f, \tag{22.153}$$

$$\text{cu } T = 2\pi/k; \; T_f = 2\pi/\omega f. \tag{22.154}$$

Într-adevăr, dacă t^* este unul din momentele în care sinusul din membrul drept al ecuației (22.152) devine egal cu zero, adică este satisfăcută condiția

$$\sin\,[kt^* + \eta \sin(\omega_f t^* + \beta) + \alpha - \eta \sin\beta] = 0,$$

atunci, în baza șirului evident de relații

$$\sin\,\{k(t^* + hT_p) + \eta \sin[\omega_f(t^* + hT_p) + \beta] + \alpha - \eta \sin\beta\} =$$
$$= \sin\{kt^* + \eta \sin[(\omega_f t^* + \beta) + \omega_f h \cdot mT_f] + \alpha - \eta \sin\beta + khnT\} =$$
$$= \sin\left\{kt^* + \eta \sin(\omega_f t^* + \beta) + \alpha - \eta \sin\beta + khn\frac{2\pi}{k}\right\},$$

rezultă și condiția

$$\sin\,\{k(t^* + hT_p) + \eta \sin[\omega_f(t + hT_p) + \beta] + \alpha - \eta \sin\beta\} = 0,$$

dovedind repetarea periodică a trecerii prin valoarea zero a elongației vibrației (22.152).

Vibrograma unei asemenea vibrații cvasiarmonice are forma din fig. 22.18, fiind reprezentată printr-o curbă obținută prin deformarea unei sinusoide atît în lungul axei ordonatelor, ca urmare a

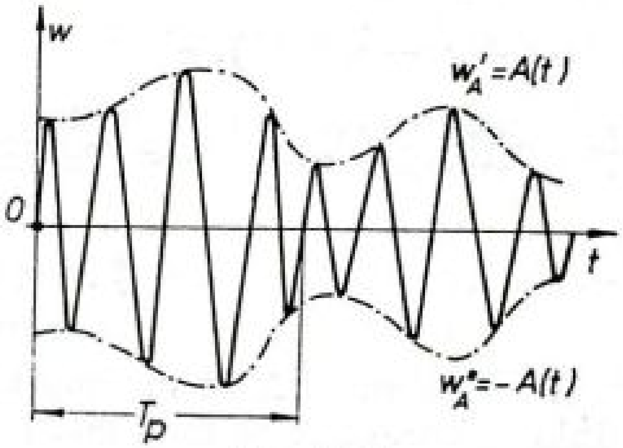


Fig. 22.18

amplificării ei cu factorul variabil $A(t)$, cît și în lungul axei timpului, cu observația însă că distribuția segmentelor interceptate pe această axă de vibrogramă se repetă periodic după intervale de timp egale cu pseudoperioada $T_p = nT = mT_f$.

În ceea ce privește spectrograma acestei vibrații, ea va putea fi construită, sub forma folosită pînă acum, numai în cazul unor indici de modulație a fazei foarte mici în comparație cu unitatea și numai pentru momente determinate t_i.

Într-adevăr, prin dezvoltarea sinusului sumei în ecuația (22.152) această ecuație va putea fi adusă la forma

$$w(t) = A(t) \sin [(kt + \alpha - \eta \sin \beta) + \eta \sin (\omega_f t + \beta)] =$$
$$= A(t) \sin [kt + \alpha - \eta \sin \beta] \cos [\eta \sin (\omega_f t + \beta)] +$$
$$+ A(t) \cos [kt + \alpha - \eta \sin \beta] \sin [\eta \sin(\omega_f t + \beta)],$$

sau încă, observînd că în condițiile precizate pot fi acceptate aproximările

$$\cos [\eta \sin (\omega_f t + \beta)] \approx 1,$$
$$\sin [\eta \sin (\omega_f t + \beta)] \approx \eta \sin (\omega_f t + \beta),$$

se mai poate scrie

$$w(t) = A(t) \sin [kt + \alpha - \eta \sin \beta] + \eta A(t) \cos [kt + \alpha -$$
$$- \eta \sin \beta] \sin (\omega_f t + \beta).$$

Este suficient acum să se exprime produsul sinusului prin cosinus din ultimul termen al relației precedente ca diferență de două sinusuri, pentru a se obține ecuația vibrației (22.152) sub forma

$$w(t) = A(t) \sin (kt + \alpha - \eta \sin \beta) +$$
$$+ \frac{\eta A(t)}{2} \sin[(k + \omega_f)t + \alpha + \beta - \eta \sin \beta] - \quad (22.155)$$
$$- \frac{\eta A(t)}{2} \sin [(k - \omega_f) t + \alpha - \beta - \eta \sin \beta],$$

care arată că vibrația cvasiarmonică cu modulație oarecare în amplitudine și cu modulație armonică în fază poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea a trei vibrații cvasiarmonice cu modula-

ție numai în amplitudine, de pulsații k, $(k + \omega_f)$ și $(k - \omega_f)$ și de amplitudini $A(t)$, $\left(\frac{\eta A(t)}{2}\right)$ și $\left(-\frac{\eta A(t)}{2}\right)$.

La momentul t_i, cînd funcția $A(t)$ va lua valoarea $A(t_i)$, spectograma va avea forma din fig. 22.19.

Revenind la vibrațiile cvasiarmonice cu modulație numai în amplitudine, de forma componentelor vibrației (22.155), trebuie de făcut mențiunea că ele sînt foarte des întîlnite în aplicațiile tehnice, fiind forma cea mai frecventă de vibrații cvasiperiodice.

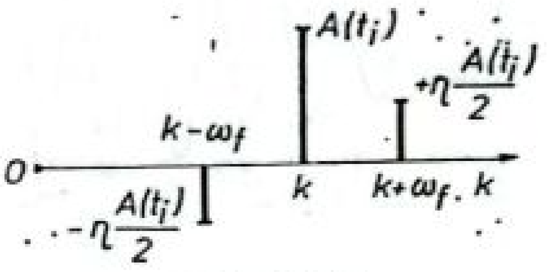


Fig. 22.19.

Vibrograma unei asemenea vibrații, cu ecuația finită de forma

$$w(t) = A(t) \sin (kt + \alpha), \tag{22.156}$$

de regulă cu $A(t) > 0$, este o curbă obținută prin deformarea unei sinusoide în lungul axei ordonatelor prin multiplicare cu factorul variabil în timp $A(t)$; înfășurătoarele vibrogramei sînt curbele (Γ'_A) și (Γ''_A), determinate prin ecuațiile

$$w'_A = +A(t)\,;\; w''_A = -A(t). \tag{22.157}$$

Se poate demonstra că această vibrogramă este tangentă la cele două înfășurătoare ale ei în punctele corespunzătoare momentelor pentru care sinusul din relația (22.156) ia valori extreme și, de asemenea, că extremele vibrogramei se găsesc în interiorul zonei limitată de cele două înfășurătoare ce încadrează vibrograma.

În continuare, vor fi examinate cîteva din cele mai frecvent întîlnite tipuri de vibrații cvasiarmonice cu modulație numai în amplitudine.

1°. **Vibrația cvasiarmonică cu modulație liniară în amplitudine,** corespunzătoare următoarei forme a funcției de modulație a amplitudinii

$$A(t) = At \tag{22.158}$$

A fiind o constantă, obișnuit pozitivă.

Ecuația finită a unei asemenea vibrații cvasiarmonice va avea deci forma

$$\boxed{w = At \sin (kt + \alpha),} \tag{22.159}$$

Scanned with CamScanner

iar vibrograma ei este reprezentată în fig. 22.20, avînd ca înfășurătoare dreptele

$$w'_A = +At; \quad w''_A = -At. \tag{22.160}$$

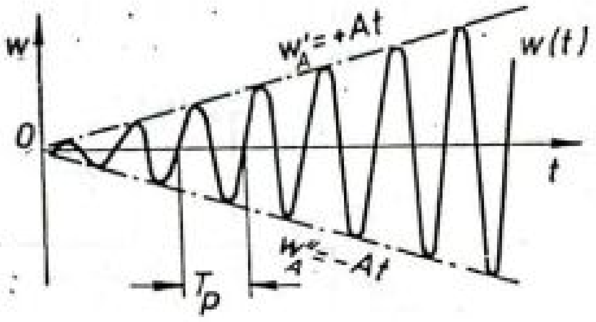


Fig. 22.20.

După cum se vede, la o asemenea vibrație amplitudinea ei crește nelimitat cu timpul și deci apariția ei dovedește caracterul instabil al mișcări principale, respectiv al poziției de echilibru static a sistemului mecanic.

În ceea ce privește spectrograma acestei vibrații, ea va avea sens numai pentru un moment oarecare t_0, forma ei fiind în această situație aceeași ca și a unei vibrații armonice.

2°. **Vibrația evasiarmonică cu modulație armonică în amplitudine.** Este o vibrație definită printr-o ecuație identică cu cea a vibrației periodice evasiarmonice cu modulație armonică în amplitudine, adică cu funcția de modulație a amplitudinii de forma

$$A(t) = A + a \sin(\omega_A t + \beta) \tag{22.161}$$

și deci cu aceeași ecuație finită

$$\boxed{w(t) = [A + a \sin(\omega_A t + \beta)] \sin(kt + \alpha),} \tag{22.162}$$

cu singura deosebire că mărimile k și ω_A, cu $k > \omega_A$, sînt de astă dată incomensurabile.

Mărimile A, ω_A și β vor reprezenta și acum, respectiv, *amplitudinea, pulsația* și *faza inițială a funcției de modulație a amplitudinii,* iar mărimea

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} > T_p = \frac{2\pi}{k} \tag{22.163}$$

— T_p fiind pseudoperioada vibrației — va reprezenta *perioada funcției de modulație a amplitudinii.*

În ipoteza $A \neq 0$, ecuația (22.162) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{w(t) = A[1 + \gamma \sin(\omega_A t + \beta)] \sin(kt + \alpha),} \tag{22.164}$$

γ fiind și acum *gradul de modulație în amplitudine.*

Scanned with CamScanner

Vibrogramele acestei vibrații, corespunzătoare celor două situații distincte — grad de modulație determinat și grad de modulație infinit — vor fi asemănătoare vibrogramelor din fig. 21.10, a și b, deosebindu-se de acestea doar prin absența periodicității valorilor elongațiilor; se păstrează însă periodicitatea trecerii prin valorile zero.

De asemenea, spectrogramele acestei vibrații vor fi identice spectrogramelor din fig. 21.11, a și b, deoarece și această vibrație va putea fi descompusă în trei vibrații armonice de pulsații k, $(k + \omega_A)$ și $(k - \omega_A)$.

3°. **Vibrația evasiarmonică cu modulație exponențial-descrescătoare în amplitudine.** Această ultimă vibrație cvasiarmonică ce va mai fi examinată se caracterizează prin următoarea formă a funcției de modulație a amplitudinii

$$A(t) = A\, e^{-\mu t}, \tag{22.165}$$

A și μ fiind două constante pozitive.

Ecuația finită a unei asemenea vibrații va avea deci forma

$$\boxed{w(t) = Ae^{-\mu t} \sin (k_a t + \alpha),} \tag{22.166}$$

iar factorul $e^{-\mu t}$ poartă numele de *factor de amortizare*, datorită faptului că el provoacă amortizarea vibrației.

Pulsația vibrației, notată k_a, este numită acum *pulsație cu amortizare*, ea depinzînd, așa cum se va arăta ulterior, în dinamica vibrațiilor, de exponentul μ, în baza relației

$$k_a = \sqrt{k^2 - \mu^2}, \tag{22.167}$$

k reprezentînd *pulsația fără amortizare* a vibrației, corespunzătoare situației cînd *coeficientul de amortizare* μ ar deveni egal cu zero.

Prin introducerea notației

$$\zeta = \mu/k, \tag{22.168}$$

ζ fiind numit, din motive ce vor fi justificate de asemenea ulterior, *fracțiune din amortizarea critică*, ecuația finită (22.166) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{w(t) = Ae^{-\mu t} \sin (k\sqrt{1 - \zeta^2}\, t + \alpha)}, \tag{22.169}$$

frecvent întîlnită în aplicațiile tehnice.

Scanned with CamScanner

Vibrograma acestei vibrații are forma din fig. 22.21, fiind reprezentată printr-o curbă obținută prin deformarea, în direcția axei ordonatelor, a unei sinusoide prin amplificare cu factorul varia-

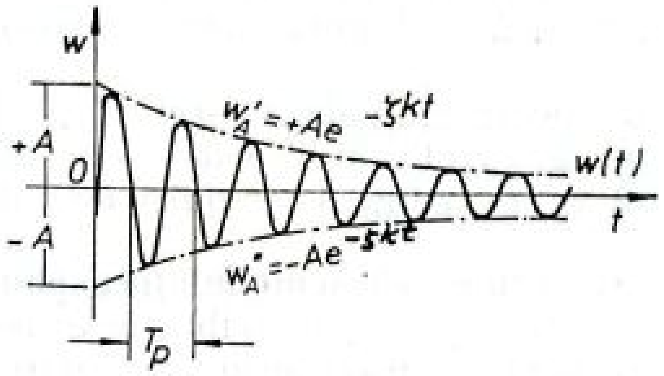


Fig. 22.21.

bil în timp $Ae^{-\mu t}$, ea fiind deci încadrată de înfășurătoarele (Γ'_A) și (Γ''_A) determinate prin ecuațiile

$$w'_A = +Ae^{-\mu t} = +Ae^{-\zeta kt},$$
$$w''_A = -Ae^{-\mu t} = -Ae^{-\zeta kt}. \tag{22.170}$$

Pseudoperioada vibrației are valoarea

$$T_p = \frac{2\pi}{k_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \mu^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{22.171}$$

Logaritmul natural al raportului dintre două elongații succesive care diferă între ele printr-o pseudoperioadă — de regulă, dintre două elongații maxime sau minime succesive — se numește *decrement logaritmic al vibrației cvasiarmonice cu modulație exponențial descrescătoare în amplitudine*, expresia acestui decrement fiind

$$\delta = \ln \frac{w(t)}{w(t+T_p)} = \mu T_p = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{22.172}$$

Pentru valori

$$\zeta < 0{,}10$$

se acceptă obișnuit aproximarea

$$\delta \approx 2\pi\zeta. \tag{22.173}$$

Scanned with CamScanner

Inversul coeficientului de amortizare μ, notat τ și avînd, în baza relației (22.172), valoarea

$$\tau = \frac{1}{\mu} = \frac{T_p}{\delta}, \tag{22.174}$$

poartă numele de *constanta de timp a vibrației cvasiarmonice cu modulație exponențial-descrescătoare în amplitudine.*

22.1.3. Forme ale ecuațiilor vibrațiilor neperiodice

Vibrațiile neperiodice sînt oscilațiile mecanice caracterizate prin absența totală a oricărui element de periodicitate sau de cvasi-periodicitate.

Un exemplu de asemenea vibrație îl constituie ***vibrația cvasiarmonică cu modulație neperiodică în amplitudine și în fază,*** definită prin ecuația

$$\boxed{w(t) = A(t) \sin [kt + \alpha(t) + \alpha],} \tag{22.175}$$

cu funcțiile $A(t)$ și $\alpha(t)$ neperiodice.

Vibrograma unei asemenea vibrații este reprezentată printr-o curbă obținută prin deformarea unei sinusoide, atît în lungul axei ordonatelor, prin multiplicare cu factorul variabil în timp $A(t)$, cît și în lungul axei timpului, pe care, datorită prezenței termenului neperiodic $\alpha(t)$ în expresia fazei, interceptează segmente de lungimi diferite și cu o distribuție care nu se repetă (fig. 22.22).

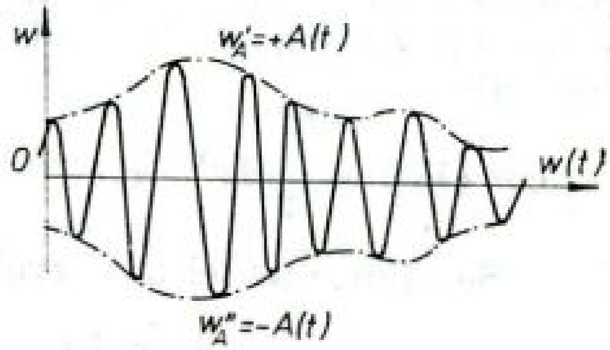


Fig. 22.22.

Vibrograma este limitată și aici de înfășurătoarele (Γ'_A) și (Γ''_A) determinate prin ecuațiile

$$w'_A = +A(t)\,;\; w''_A = -A(t). \tag{22.176}$$

Scriind ecuația (22.175) sub forma

$$w(t) = A_1(t) \sin (kt + \alpha) + A_2(t) \sin\left(kt + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \tag{22.177}$$

cu

$$A_1(t) = A(t) \cos [\alpha(t)]; \; A_2(t) = A(t) \sin [\alpha(t)], \qquad (22.178)$$

se observă că o asemenea vibrație mai poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea a două vibrații cvasiarmonice cu modulație numai în amplitudine, cu funcțiile de modulație sincrone, dar defazate cu $\pi/2$ rad.

Trebuie de făcut însă precizarea că în aplicațiile tehnice vibrația neperiodică este determinată, cel mai adesea, prin înregistrarea vibrogramei ei, caracterul determinist al vibrației rezultînd, așa cum s-a mai spus, din repetarea, fără modificări esențiale, a vibrogramei la fiecare experiment efectuat în aceleași condiții controlabile de lucru.

În cele ce urmează se va arăta că, prin extinderea noțiunii de periodicitate, o asemenea vibrație neperiodică va putea fi definită tot printr-o dezvoltare în serie Fourier, însă cu o variație continuă — în loc de discretă — a frecvenței termenilor; o astfel de modelare matematică va permite și în acest caz construcția unei spectrograme, capabilă să furnizeze informații cu privire la conținutul în frecvență al vibrației și să reducă studiul vibrației respective la cel al unui număr limitat de benzi de frecvență.

Această extensiune a noțiunii de periodicitate se va baza pe stabilirea, în prealabil, a unei noi forme de prezentare a dezvoltării Fourier a unei funcții periodice $w(t)$, plecîndu-se de la dezvoltarea cunoscută (22.80) și efectuindu-se, în baza formulelor lui Euler, înlocuirile

$$\cos (\lambda k t) = \frac{1}{2} (e^{i\lambda k t} + e^{-i\lambda k t}); \quad \sin (\lambda k t) = \frac{1}{2i} (e^{i\lambda k t} - e^{-i\lambda k t}).$$

Se ajunge astfel la dezvoltarea

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(a_\lambda + \frac{b_\lambda}{i} \right) e^{i\lambda k t} + \left(a_\lambda - \frac{b_\lambda}{i} \right) e^{-i\lambda k t} \right],$$

sau încă, efectuînd și înlocuirea evidentă $b_\lambda / i = -ib_\lambda$, la dezvoltarea

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_\lambda - ib_\lambda) e^{i\lambda k t} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_\lambda + ib_\lambda) e^{-i\lambda k t}. \qquad (22.179)$$

Scanned with CamScanner

Prin introducerea notațiilor

$$a_0 = c_0;\ a_{-\lambda} = a_\lambda;\ a_\lambda - ib_\lambda = c_\lambda;$$

$$b_0 = 0;\ b_{-\lambda} = -b_\lambda;\ (\lambda = 1, 2, \ldots, +\infty), \tag{22.180}$$

se vor putea face, în relația (22.179), înlocuirile

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}(a_\lambda - ib_\lambda)e^{i\lambda kt} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda\, e^{i\lambda kt};$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}(a_\lambda + ib_\lambda)e^{-i\lambda kt} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=-\infty}^{-1} c_\lambda e^{i\lambda kt} \tag{22.181}$$

și

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2}c_0\, e^{i0kt}, \tag{22.182}$$

în baza cărora dezvoltarea (22.179) va lua forma finală

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} c_\lambda\, e^{i\lambda kt}}, \tag{22.183}$$

reprezentînd *forma complexă a dezvoltării în serie Fourier.*

Pentru calculul coeficienților complecși c_λ se va observa că, în baza relațiilor (22.83) și (22.84), pot fi scrise expresiile

$$c_\lambda = a_\lambda - ib_\lambda = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} w(t)\cos(\lambda kt)\,dt -$$

$$- i\frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} w(t)\sin(\lambda kt)\,dt = \frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} w(t)\,[\cos(\lambda kt) - i\sin(\lambda kt)]\,dt,$$

rezultînd de aici, după efectuarea și a înlocuirii $k/\pi = 2/T$, următoarea relație generală de calcul al acestor coeficienți:

$$c_\lambda = \frac{2}{T}\int_0^T w(t)\,e^{-i\lambda kt}\,dt, \quad (\lambda=-\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots, +\infty), \tag{22.184}$$

regăsindu-se, pentru $\lambda = 0$, valoarea $c_0 = a_0$.

Scanned with CamScanner

CS CamScanner

Mărimile

$$k_\lambda = \lambda k, \ (\lambda = -\infty, \ldots, -1,0,1, \ldots, +\infty), \qquad (22.185)$$

cu pulsația fundamentală pozitivă $\left(k = \dfrac{2\pi}{T} > 0\right)$, vor reprezenta pulsațiile termenilor de ordinul λ ai dezvoltării Fourier complexe, aceste pulsații fiind acum pozitive sau negative, în funcție de semnul lui λ.

Întrucît coeficienții $a_\lambda = a_\lambda(k_\lambda)$, sînt, după (22.83), funcții pare în raport cu k_λ, iar coeficienții $b_\lambda = b_\lambda(k_\lambda)$, sînt, după (22.84), funcții impare în raport cu k_λ, modulii coeficienților c_λ, dați de relațiile

$$|c_\lambda| = |c_\lambda(k_\lambda)| = \sqrt{a_\lambda^2(k_\lambda) + b_\lambda^2(k_\lambda)} = A_\lambda(k_\lambda), \qquad (22.186)$$

vor fi și ei funcții pare în raport cu k_λ, ei reprezentind chiar amplitudinile $A_\lambda(k_\lambda)$ ale armonicelor funcției periodice $w(t)$.

Rezultă de aici că reprezentările grafice ale funcțiilor $|c_\lambda| = f(k_\lambda)$ se vor deosebi de o spectrogramă obișnuită doar prin aceea că ele vor avea acum și ramura simetrică față de axa ordonatelor, (fig. 22.23), corespunzătoare pulsațiilor k_λ negative; de regulă, însă,

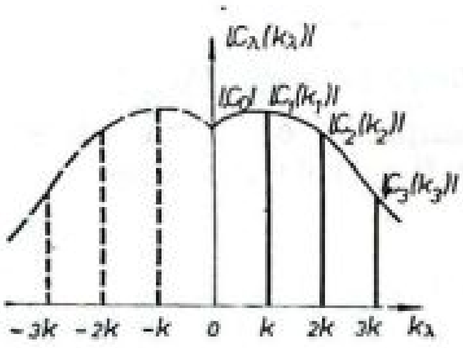


Fig. 22.23.

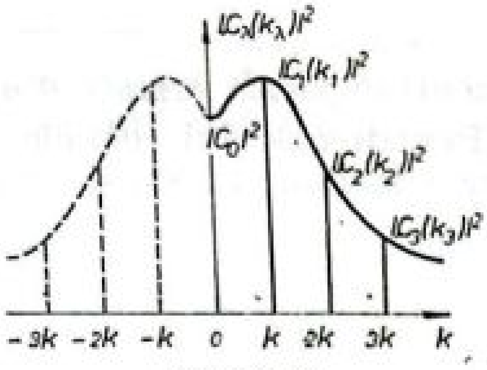


Fig. 22.24.

se lucrează și în această situație tot numai cu ramura corespunzătoare pulsațiilor pozitive, trasată prin linie plină în fig. 22.23, astfel că graficul respectiv poate fi considerat că reprezintă chiar spectrograma vibrației periodice.

În unele situații se reprezintă grafic variația pătratului coeficienților c_λ în funcție de pulsațiile k_λ (fig. 22.24), acest grafic purtînd denumirea de *spectrul puterii vibrației* $w(t)$, denumire justificată îndeosebi în cazurile cînd în locul funcției $w(t)$ se consideră funcția $\dot{w}(t)$.

Scanned with CamScanner

Atît în graficul din fig. 22.23, cît și în cel din fig. 22.24, raportul dintre două pulsații oarecare, k_m și k_n, este, pentru vibrația periodică $w(t)$, un număr rațional

$$\frac{k_m}{k_n} = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n},$$

această observație permițînd să se tragă concluzia că în toate cazurile cînd spectrograma $|c_\lambda(k_\lambda)| = f(k_\lambda)$ — respectiv, spectrul de putere $c^2(k_\lambda) = F(k_\lambda)$ — al unei vibrații $w(t)$ se prezintă ca un spectru discret de linii, cu rapoartele dintre abscise egale cu numere raționale, ea corespunde unei vibrații periodice. Trebuie menționat că există însă și unele situații cînd spectrogramele se prezintă sub formă de spectre discrete de linii, reflectînd existența unor componente armonice ale vibrației respective dar cu rapoarte iraționale ale absciselor acelor linii; asemenea vibrații, care nu mai sînt strict periodice se numesc *aproape periodice*.

Revenind la vibrațiile neperiodice, se va arăta, în continuare că forma complexă a dezvoltării Fourier, poate fi extinsă și la studiul acestei ultime clase de vibrații, considerîndu-se o asemenea vibrație neperiodică ca o vibrație periodică, dar cu perioada infinită.

Într-adevăr, orice fenomen vibratoriu neperiodic, fie că se prezintă ca o variație continuă pe toată durata studierii lui, fie sub formă de impuls izolat într-un anumit interval al timpului, poate fi considerat, în ultimă instanță, ca un fenomen care se poate repeta, dar numai după un interval de timp infinit.

Rezultă de aici că este posibilă și dezvoltarea în serie Fourier complexă a unei funcții neperiodice de timp ce definește o vibrație neperiodică, cu condiția, însă, ca în relația ce determină coeficienții seriei să se efectueze trecerea la limită pentru $T \to \infty$, cu considerarea tuturor consecințelor ce decurg din această trecere la limită.

O primă consecință o constituie faptul că pulsația devine în acest caz elementară, adică vor trebui făcute corespondențele:

$$k = 2\pi/T \to \mathrm{d}k;\ 2/T = k/\pi \to \mathrm{d}k/\pi. \tag{22.187}$$

În al doilea rînd, se va observa că diferența pulsațiilor corespunzătoare unor termeni succesivi va avea valoarea

$$k_{\lambda+1} - k_\lambda = (\lambda + 1)\,\mathrm{d}k - \lambda \mathrm{d}k = \mathrm{d}k,$$

ceea ce înseamnă că șirul discret de termeni ai seriei Fourier va trebui înlocuit cu un șir continuu. De aici rezultă că pulsația k_λ, cores-

Scanned with CamScanner

punzătoare unui termen al seriei situat la o distanță oarecare de termenul fundamental, va trebui înlocuită cu pulsația curentă k obținută prin integrarea pulsației elementare $\mathrm{d}k$, adică va trebui, efectuată și corespondența

$$k_\lambda = \lambda k \to k = \int_0^k \mathrm{d}k.$$

În fine, înlocuirea șirului discret de termeni ai seriei Fourier complexe, în care coeficienții termenilor au mărimi finite, cu un șir continuu, conduce și la concluzia că în ultima situație coeficienții termenilor nu vor mai putea fi finiți, ci elementari, adică în expresiile (22.184) vor trebui făcute și corespondențele

$$c_\lambda = c_\lambda(k_\lambda) \to \mathrm{d}c_\lambda(k_\lambda). \tag{22.188}$$

Rezultă de aici că în cazul aplicării analizei armonice la studiu fenomenelor vibratorii neperiodice ($T \to \infty$), expresia (22.184), scrisă încă, prin alegerea originii timpului chiar în mijlocul intervalului de periodicitate T, sub forma

$$c_\lambda = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t)\, e^{-i\lambda k t}\, \mathrm{d}t = \frac{k}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t)\, e^{-ik_\lambda t}\, \mathrm{d}t,$$

va trebui înlocuită cu expresia

$$\mathrm{d}c(k) = \frac{\mathrm{d}k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t. \tag{22.189}$$

Integrala din membrul drept, notată încă și cu simbolurile

$$\boxed{\mathscr{F}(ik) = \mathfrak{F}[w(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t} \tag{22.190}$$

și despre care analiza armonică afirmă că există și are valoare finită în cazul cînd funcția $w(t)$ satisface condițiile lui Dirichlet pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, precum și condiția

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|\, \mathrm{d}t = N, \tag{22.191}$$

Scanned with CamScanner

N fiind un număr pozitiv finit, este numită *transformată Fourier complexă a funcției neperiodice* $w(t)$ și ea are caracter de operator liniar, fiind evidente proprietățile

$$\mathscr{F}[w_1(t) + w_2(t)] = \mathscr{F}[w_1(t)] + \mathscr{F}[w_2(t)];$$
$$\mathscr{F}[h\, w(t)] = h\mathscr{F}[w(t)], \tag{22.192}$$

unde h este o constantă.

Este ușor de înțeles că transformata Fourier este un număr complex, ea putînd fi scrisă încă fie sub forma algebrică

$$\boxed{\mathscr{F}(ik) = A(k) - i\, B(k),} \tag{22.193}$$

cu

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \cos (kt)\, dt; \quad B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \sin (kt)\, dt, \tag{22.194}$$

fie sub forma exponențială

$$\mathscr{F}(ik) = F(k)\, e^{-i\varphi(k)}, \tag{22.195}$$

cu

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = \sqrt{[A(k)]^2 + [B(k)]^2}, \quad \varphi(k) = \operatorname{arctg} \frac{B(k)}{A(k)}, \tag{22.196}$$

argumentul $\varphi(k)$ purtînd încă și numele de *fază a transformatei Fourier*.

Forma algebrică (22.193) a transformatei Fourier permite să se observe că în cazul cînd funcția $w(t)$ este pară, transformata Fourier a ei devine reală și pară în raport cu k, într-adevăr, în aceste condițiuni produsul $w(t) \sin (kt)$ este o funcție impară și deci partea imaginară a transformatei se anulează, adică se poate scrie

$$\mathscr{F}(ik) = A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \cos (kt)\, dt = 2\int_{0}^{+\infty} w(t) \cos (kt)\, dt. \tag{22.197}$$

Revenind la relația (22.189) și ținînd seama și de notațiile (22.190), vor mai putea fi scrise următoarele expresii pentru mărimile $dc(k)$

$$d\, c(k) = \frac{dk}{\pi} \mathscr{F}(ik) = \frac{dk}{\pi} \mathscr{F}[w(t)] = \frac{dk}{\pi} F(k)\, e^{-i\varphi(k)} \tag{22.198}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$|\mathrm{d}\,c(k)| = \frac{\mathrm{d}k}{\pi}\,|\mathscr{F}(ik)| = \frac{\mathrm{d}k}{\pi}\,F(k). \tag{22.199}$$

Considerarea vibrațiilor neperiodice ca vibrații periodice de perioadă infinită permite extinderea dezvoltării în serie Fourier complexă și la cazul vibrațiilor neperiodice, înlocuindu-se coeficienții finiți c_λ cu coeficienții elementari $\mathrm{d}c(k)$ și operația de sumare cu cea de integrare; rezultă astfel relația

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\,c(k)\,e^{ikt},} \tag{22.200}$$

sau încă, ținînd seama și de expresiile (22.198), relația

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(ik)\,e^{ikt}\,\mathrm{d}k = \mathscr{F}^{-1}\,[\mathscr{F}\,[w(t)],} \tag{22.201}$$

ultima formă a ei, cunoscută și sub numele de *inversa transformatei Fourier*, permițînd exprimarea unei vibrații neperiodice sub forma integrală.

Relația (22.200) permite să se tragă concluzia că o vibrație neperiodică poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea unui număr infinit de componente armonice de pulsații $k \in (-\infty, +\infty)$ și de amplitudini elementare $\mathrm{d}\,c(k)$; aceasta înseamnă însă că spectrul discret de linii va fi înlocuit acum cu un spectru continuu, dar cu ordonate elementare, deci practic imposibil de construit.

Este totuși posibilă înlocuirea spectrogramei obișnuite cu o altă spectrogramă, obținută prin considerarea, în locul mărimilor elementare $\mathrm{d}\,c(k)$, a unor mărimi proporționale cu ele, reprezentate prin modulul transformatei Fourier, dat de relația (22.199), adică se înlocuiește graficul $\mathrm{d}\,c(k) = f(k)$ cu reprezentarea grafică a variației, în funcție de pulsația k, a mărimii

$$F(k) = \frac{\pi}{\mathrm{d}k}\,|\mathrm{d}\,c(k)| \tag{22.202}$$

avînd dimensiunile fizice ale unei densități a amplitudinilor, din care motiv acest din urmă grafic, reprezentat în fig. 22.25, a mai fost numit ***spectrul densității amplitudinilor***.

Scanned with CamScanner

Relația (22.202) permite să se observe că amplitudinea elementară $\mathrm{d}\,c(k)$, corespunzătoare unei benzi de pulsație $\mathrm{d}k$, este direct proporțională — factorul de proporționalitate fiind $1/\pi$ — cu aria elementară hașurată în fig. 22.25, limitată de spectrul $F(k)$, de axa absciselor și de ordonatele corespunzătoare valorilor extreme ale benzii de pulsații.

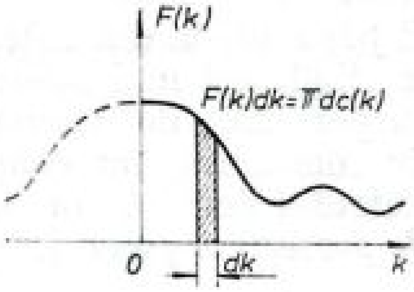


Fig. 22.25.

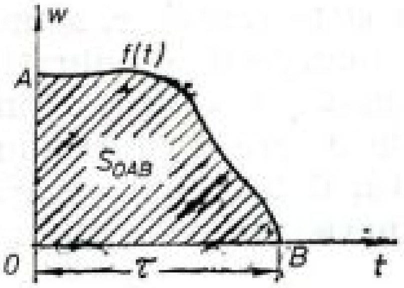


Fig. 22.26.

În ceea ce privește forma spectrului densității amplitudinilor, unele concluzii vor putea fi trase examinîndu-se valorile ordonatelor unora din punctele de pe spectru, ordonate purtînd numele de *componente spectrale* și calculate cu ajutorul relației (22.190). Astfel, în cazul vibrației neperiodice în formă de impuls izolat (fig. 22.26), definită prin ecuația

$$w(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pentru}: \; t \in (0, \; \tau]; \\ 0 & \text{pentru}: \; t \in (-\infty, 0] \cup [\tau, +\infty), \end{cases}$$

se va scrie

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^{\tau} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \right|,$$

rezultînd, pentru $k = 0$, valoarea

$$F(0) = \left| \int_0^{\tau} f(t)\, \mathrm{d}t \right| = \mathscr{S}_{OAB},$$

$\mathscr{S}_{OAB}$ fiind aria cuprinsă între curba $f(t)$ și axele de coordonate; observînd că $F(0)$ reprezintă valoarea maximă a lui $F(k)$ și că pe măsură ce k va începe să crească, valorile maxime ale lui $F(k)$ scad, se poate trage concluzia că spectrul densităților amplitudinilor are o formă ca cea din fig. 22.25, compusă din o succesiune de bucle cu maximele în continuă descreștere.

Scanned with CamScanner

În încheiere trebuie menționat faptul că în mod obișnuit construcția spectrului densității amplitudinilor se face nu cu ajutorul modulului transformatei Fourier, ci prin folosirea unei mărimi adimensionale proporționale cu acest modul, obținută cu ajutorul unui raport de forma $F(k)/A\tau$, unde A este amplitudinea și τ timpul.

Teoria expusă mai sus are o aplicație directă la stabilirea conținutului în frecvență al *șocurilor*, manifestate prin apariția, pe o durată foarte scurtă τ, a unei variații $f(t)$ a uneia din mărimile prin care se manifestă o vibrație, aceasta fiind, cel mai adesea, viteza generalizată $f(t) = \dot{w}(t)$; funcția $f(t)$ neperiodică determină în acest caz *unda de șoc* a procesului impulsiv considerat, iar conținutul în frecvență, determinat cu ajutorul spectrului densităților amplitudinilor funcției $f(t)$, este numit *spectru de pulsații al șocului*.

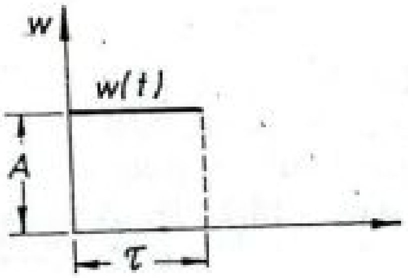


Fig. 22.27.

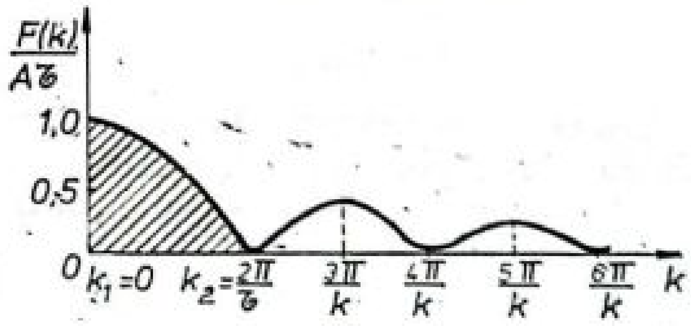


Fig. 22.28

În cele ce urmează, vor fi determinate spectrele de pulsații pentru cîteva din tipurile de unde de șoc întîlnite mai des în aplicațiile tehnice.

1°. **Unda de șoc în dreptunghi,** (fig. 22.27), definită prin ecuația

$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{pentru}: \ t \in [0, \ \tau]; \\ 0 & \text{pentru}: \ t \in (-\infty, \ 0] \cup [\tau, +\infty). \end{cases} \tag{22.203}$$

Transformata Fourier corespunzătoare ei va avea expresia

$$\mathscr{F}(ik) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \int_0^{\tau} A e^{-ikt}\, dt = i\,\frac{A}{k}[e^{-ik\tau} - 1] =$$

$$= \frac{A}{k}\,\{\sin(k\tau) + i[\cos(k\tau) - 1]\},$$

sau încă, trecînd la funcțiile trigonometrice ale jumătăților argumentului, expresia

$$\mathscr{F}(ik) = 2\,\frac{A}{k}\,\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)\, e^{-ik\frac{\tau}{2}}, \tag{22.204}$$

Scanned with CamScanner

cu modulul

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = 2\frac{A}{k}\left|\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)\right| = A\tau\left|\frac{\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{\frac{k\tau}{2}}\right|. \tag{22.205}$$

Spectrul densității amplitudinilor funcției $f(t)$ va fi construit cu ajutorul raportului adimensional

$$\boxed{\frac{F(k)}{A\tau} = \left|\frac{\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{\frac{k\tau}{2}}\right|}, \tag{22.206}$$

care ia valoarea 1 pentru $k = 0$, valorile zero pentru $k = \mu\frac{2\pi}{\tau}$, ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) și valorile maxime succesive $\frac{2}{3\pi}$, $\frac{2}{5\pi}$, $\frac{2}{7\pi}$ etc. pentru $k = (2\mu + 1)\frac{\pi}{\tau}$, ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$), (fig. 22.28).

Spectrul pulsațiilor corespunzătoare acestui tip de undă de șoc se va reduce practic la cel din zona hașurată a graficului din fig. 22.28, el cuprinzînd o bandă de pulsații de lățime

$$\Delta k = k_2 - k_1 = 2\pi/\tau - 0 = 2\pi/\tau. \tag{22.207}$$

2°. **Unda de șoc în dinte de fierăstrău**, (fig. 22.29), definită prin ecuația

$$f(t)\begin{cases} = \frac{A}{\tau}t & \text{pentru } t \in [0, \tau]; \\ = 0 & \text{pentru } t \in (-\infty, 0] \cup [\tau, +\infty), \end{cases} \tag{22.208}$$

graficul ei fiind reprezentat in fig. 22.29.

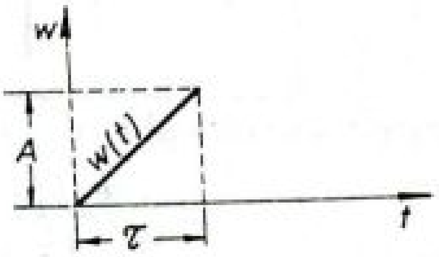


Fig. 22.29.

Calculînd și acum transformata Fourier, rezultă valoarea

$$\mathscr{F}(ik) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \int_0^{\tau} \frac{A}{\tau}\, t\, e^{-ikt}\, dt =$$

$$= \frac{A}{\tau}\left\{ -\frac{t}{ik}\, e^{-ikt}\Big|_0^{\tau} + \frac{1}{ik}\int_0^{\tau} e^{-ikt}\, dt \right\} = \frac{A}{\tau k^2}[e^{-ik\tau} - 1 + ik\tau\, e^{-ik\tau}],$$

sau încă, folosind și de astă dată formula lui Euler, se mai poate scrie

$$\mathscr{F}(ik) = \frac{A}{\tau k^2}\{[\cos(k\tau) + \tau k \sin(k\tau) - 1] + $$
$$+ i\,[k\tau \cos(k\tau) - \sin(k\tau)]\}. \qquad (22.209)$$

Modulul transformatei Fourier va avea deci valoarea

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = \frac{A}{\tau k^2}\sqrt{k^2\tau^2 + 4\sin^2\left(\frac{k\tau}{2}\right) - 2k\tau\sin(k\tau)},$$

sau încă, scoțînd forțat în factor pe $k^2\tau^2$ de sub radical, precum și produsul $A\tau$ în afara expresiei, mai rezultă

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = A\tau\left\{\frac{1}{k\tau}\sqrt{1 - 2\,\frac{\sin(k\tau)}{k\tau} + \left(\frac{\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{\frac{k\tau}{2}}\right)^2}\right\}. \qquad (22.210)$$

Pentru construcția spectrului densităților amplitudinilor se va considera raportul adimensional

$$\boxed{\frac{F(k)}{A\tau} = \frac{1}{k\tau}\sqrt{1 - 2\,\frac{\sin(k\tau)}{k\tau} + \left(\frac{\sin\left(\frac{k\tau}{2}\right)}{\frac{k\tau}{2}}\right)^2},} \qquad (22.211)$$

care va avea valoarea maximă de 0,5 pentru $k = 0$ și valorile

$$\frac{F(k_\mu)}{A\tau} = \frac{1}{2\mu\pi}, \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (22.212)$$

pentru $k_\mu = \mu\, 2\pi/\tau$, $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Spectrul densităților amplitudinilor corespunzător acestui tip de undă de șoc va avea forma din fig. 22.30, el permițind să se aprecieze că, practic, pulsațiile undei de șoc examinate sînt cuprinse într-o bandă de lățime

$$\Delta k = k_2 - k_1 = 2\pi/\tau. \tag{22.213}$$

3°. **Unda de șoc în buclă sinusoidal,** (fig. 22.31), definită prin ecuația

$$f(t) = \begin{cases} A \sin\left(\dfrac{\pi}{\tau}\, t\right) & \text{pentru } t \in [0, \tau]; \\ 0 & \text{pentru } t \in (-\infty, 0] \cup [\tau, +\infty). \end{cases} \tag{22.214}$$

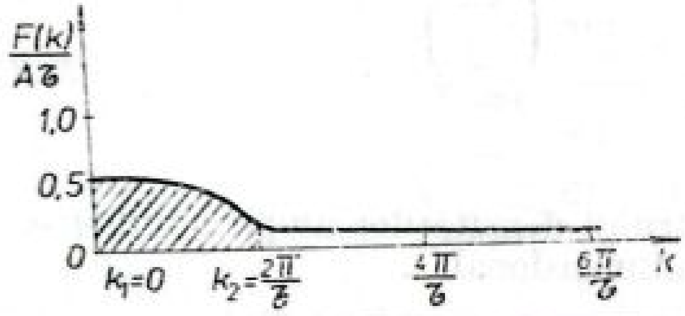


Fig. 22.30.

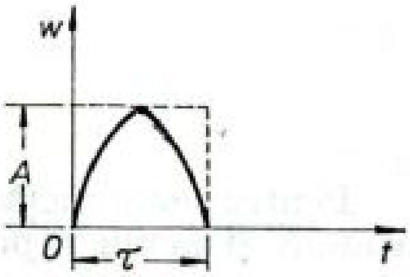


Fig. 22.31.

Transformata Fourier corespunzătoare acestei funcții va fi dată de relația

$$\mathscr{F}(ik) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \int_0^{\tau} A \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\, t\right) e^{-ikt}\, dt =$$

$$= A \int_0^{\tau} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\, t\right) e^{-ikt}\, dt,$$

sau încă, observind că se poate scrie

$$\int_0^{\tau} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\, t\right) e^{-ikt}\, dt = \left.\left(\frac{-ik \sin\left(\dfrac{\pi}{\tau}\, t\right) - \dfrac{\pi}{\tau} \cos\left(\dfrac{\pi}{\tau}\, t\right)}{\dfrac{\pi^2}{\tau^2} - k^2}\, e^{-ikt}\right)\right|_0^{\tau} =$$

$$= \tau \frac{1}{\pi\left(1 - \dfrac{k^2\tau^2}{\pi^2}\right)} (1 + e^{-ik\tau}),$$

de relația

$$\mathscr{F}(ik) = A\tau \frac{1}{\pi\left(1 - \dfrac{k^2\tau^2}{\pi^2}\right)} (1 + e^{-ik\tau}), \tag{22.215}$$

cu modulul transformatei avînd expresia

$$F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = A\tau \frac{1}{\pi\left(1 - \dfrac{k^2\tau^2}{\pi^2}\right)} \sqrt{2 + 2\cos(k\tau)} =$$

$$= A\tau \cdot \frac{2}{\pi} \left| \frac{\cos\left(\dfrac{k\tau}{2}\right)}{1 - \dfrac{k^2\tau^2}{\pi^2}} \right|. \tag{22.216}$$

Pentru construcția spectrului densităților amplitudinilor se va considera și acum raportul adimensional

$$\boxed{\frac{F(k)}{A\tau} = \frac{2}{\pi} \left| \frac{\cos\left(\dfrac{k\tau}{2}\right)}{1 - \dfrac{k^2\tau^2}{\pi^2}} \right|}, \tag{22.217}$$

care ia valoarea maximă de 0,63 pentru $k = 0$, valorile maxime succesive

$$\frac{F(k_\mu)}{A\tau} = \frac{2}{\pi} \left| \frac{1}{1 - 4\mu^2} \right| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{4\mu^2 - 1}, \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{22.218}$$

pentru $k_\mu = \mu 2\pi/\tau$, $(\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ și valorile zero pentru $k_\mu) = (2\mu + 1)\pi/\tau$, $(\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Spectrul densității amplitudinilor corespunzător acestui tip de undă de șoc va avea deci forma din fig. 22.32 și el permite să se tragă și aici concluzia că banda de pulsații a acestei unde de șoc se reduce practic la intervalul

$$\Delta k = k_2 - k_1 = 2\pi/\tau. \tag{22.219}$$

Scanned with CamScanner

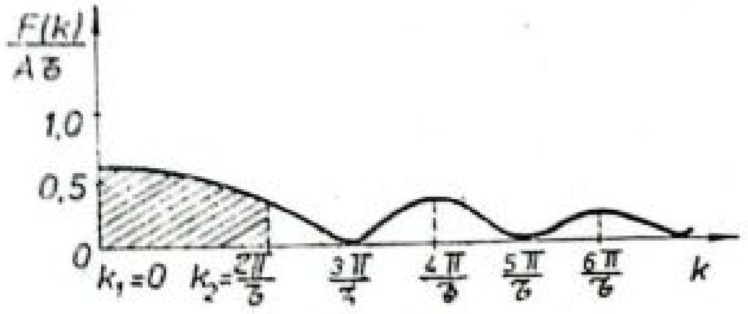


Fig. 22.32.

4°. **Unda de șoc a impulsului unitate** $\delta(t)$, (fig.22.33). Se numește *impuls unitate*, funcția simbolică $\delta(t)$ a lui Dirac, definită prin următoarele proprietăți:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \neq 0 \\ \infty & \text{pentru } t = 0, \end{cases} \tag{22.220}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{22.221}$$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = (f(t))_{t=a} = f(a). \tag{22.222}$$

Această funcție simbolică, care, așa cum se va vedea ulterior va juca un rol important în studiul dinamic al vibrațiilor, admite o transformată Fourier, dată de relația

$$\mathscr{F}(ik) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt}\,\delta(t-0)\,\mathrm{d}t,$$

sau încă, folosind proprietatea (22.222), de relația

$$\mathscr{F}(ik) = (e^{-ikt})_{t=0} = 1, \tag{22.223}$$

cu modulul

$$\boxed{F(k) = |\mathscr{F}(ik)| = 1.} \tag{22.224}$$

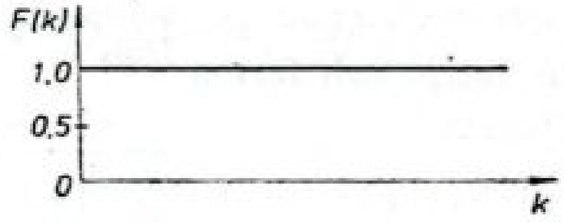


Fig. 22.33.

Rezultă de aici că spectrul densității de amplitudine corespunzător acestei unde de șoc va fi reprezentat printr-o paralelă la axa pulsațiilor (fig. 22.33), și că banda de pulsații a acestui impuls unitate este infinită.

22.2. *Compunerea vibrațiilor rectilinii armonice ortogonale*

În aplicațiile tehnice se intilnesc frecvent situații cînd ecuațiile finite ale mișcărilor plane, sau spațiale, ale unor puncte ale elementelor unui sistem vibrant cu două, respectiv trei, grade de libertate se prezintă sub forma unor legi armonice de variație a coordonatelor carteziene ale lor, ceea ce revine la a considera mișcarea unui asemenea punct ca rezultînd din compunerea a două, respectiv trei, vibrații rectilinii armonice ortogonale; dată fiind importanța pentru tehnică a traiectoriilor acestor puncte, un studiu special al compunerii unor astfel de vibrații rectilinii armonice ortogonale se impune.

22.2.1. Compunerea a două vibrații rectilinii armonice ortogonale

Această situație corespunde mișcării plane a unui punct, definită prin ecuațiile

$$x = x_0 + x_1 \sin(k_x t + \alpha_x);\ y = y_0 + y_1 \sin(k_y t + \alpha_y), \qquad (22.225)$$

cu x_0, x_1, k_x, α_x, y_0, y_1, k_y și α_y constante.

Considerînd satisfăcută condiția $k_y > k_x$ și introducînd notația

$$\Delta k = k_y - k_x, \qquad (22.226)$$

cea de-a doua dintre ecuațiile (22.225) va putea fi scrisă sub forma

$$y = y_0 + y_1 \sin[(\Delta k t + \alpha_y - \alpha_x) + (k_x t + \alpha_x)],$$

sau încă

$$y = y_0 + [y_1 \cos(\Delta k t + \alpha_y - \alpha_x)] \sin(k_x t + \alpha_x) + \\ + [y_1 \sin(\Delta k t + \alpha_y - \alpha_x)] \cos(k_x t + \alpha_x). \qquad (22.227)$$

În modul acesta, sistemul (22.225) de ecuații va putea fi retranscris sub forma

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \sin(k_x t + \alpha_x);$$

$$\frac{1}{\sin(\Delta k t + \alpha_y - \alpha_x)}\left\{\frac{y - y_0}{y_1} - [\cos(\Delta k t + \alpha_y - \alpha_x)] \sin(k_x t + \alpha_x)\right\} = \\ = \cos(k_x t + \alpha_x). \qquad (22.228)$$

Înlocuind în cea de-a doua ecuație pe $\sin(k_x t + \alpha_x)$ cu expresia sa scoasă din prima ecuație, sistemul de ecuații (22.225) se va transforma în sistemul

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \sin(k_x t + \alpha_x);$$

$$\frac{1}{\sin(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x)}\left\{\frac{y - y_0}{y_1} - \frac{x - x_0}{x_1}\cos(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x)\right\} = \cos(k_x t + \alpha_x). \tag{22.229}$$

Ridicînd, în fine, ecuațiile (22.229) la pătrat și însumîndu-le membru cu membru, se capătă, după reducerea termenilor asemenea, următoarea ecuație analitică directă a traiectoriei punctului cu mișcarea determinată prin ecuațiile (22.225):

$$\frac{1}{x_1^2}x^2 - 2\frac{1}{x_1 y_1}\cos(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x)\cdot xy + \frac{1}{y_1^2}y^2 - 2\frac{1}{x_1}\left[\frac{x_0}{x_1} - \frac{y_0}{y_1}\cos(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x)\right]x + 2\frac{1}{y_1}\left[\frac{x_0}{x_1}\cos(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x) - \frac{y_0}{y_1}\right]y + \left[\frac{x_0^2}{x_1^2} - 2\frac{x_0 y_0}{x_1 y_1}\cos(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x) + \frac{y_0^2}{y_1^2}\right] - \sin^2(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x) = 0. \tag{22.230}$$

În funcție de valorile celor două pulsații, k_x și k_y, vor putea fi discutate următoarele situații distincte:

1°. Compunerea a două vibrații armonice ortogonale sincrone, corespunzătoare condiției: $k_x = k_y = k$ și deci

$$\Delta k = 0. \tag{22.231}$$

În această situație, ecuația (22.230) va lua forma particulară

$$\frac{1}{x_1^2}x^2 - 2\frac{1}{x_1 y_1}\cos(\alpha_y - \alpha_x)\,xy + \frac{1}{y_1^2}y^2 - 2\frac{1}{x_1}\left[\frac{x_0}{x_1} - \right.$$

$$-\frac{y_0}{y_1}\cos(\alpha_y-\alpha_x)\Big]x+2\frac{1}{y_1}\left[\frac{x_0}{x_1}\cos(\alpha_y-\alpha_x)-\frac{y_0}{y_1}\right]y+$$
$$+\left[\frac{x_0^2}{x_1^2}-2\frac{x_0y_0}{x_1y_1}\cos(\alpha_y-\alpha_x)+\frac{y_0^2}{y_1^2}\right]-\sin^2(\alpha_y-\alpha_x)=0, \tag{22.232}$$

scoţînd în evidenţă faptul că traiectoria punctului considerat, în mişcare în condiţiile (22.231), este o conică, translatată şi rotită în raport cu reperul fix, faţă de care au fost scrise ecuaţiile finite ale mişcării.

Cercetînd discriminantul conicei :

$$\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{y_1^2}-\frac{1}{x_1^2y_1^2}\cos^2(\alpha_y-\alpha_x),$$

rezultă concluzia

$$\delta=\frac{1}{x_1^2y_1^2}\sin^2(\alpha_y-\alpha_x)>0,$$

condiţia precedentă fiind caracteristică unei elipse.

Se poate afirma deci că prin compunerea a două vibraţii armonice ortogonale sincrone se obţine o mişcare a punctului considerat efectuată pe o elipsă cu centrul în punctul de coordonate x_0 şi y_0 şi care este rotită faţă de axele reperului fix în raport cu care au fost scrise ecuaţiile finite ale mişcării punctului.

În funcţie de valoarea defazajului $(\alpha_y-\alpha_x)$, pot fi întîlnite următoarele două situaţii particulare :

— *Cazul I. Defazaj egal cu un multiplu întreg de π radiani*, adică

$$\alpha_y-\alpha_x=\lambda\pi,\ (\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{22.233}$$

În aceste condiţii, ecuaţia (22.232) va lua forma particulară

$$\frac{x^2-2x_0x+x_0^2}{x_1^2}+\frac{y^2-2y_0y+y_0^2}{y_1^2}\mp2\frac{x-x_0}{x_1}\cdot\frac{y-y_0}{y_1}=0,$$

sau încă

$$\left(\frac{x-x_0}{x_1}\mp\frac{y-y_0}{y_1}\right)^2=0,$$

rezultînd de aici ecuația

$$\boxed{y - y_0 = \pm \frac{y_1}{x_1}(x - x_0).} \tag{22.234}$$

care va fi reprezentată printr-o dreaptă ce trece prin punctul $A_0(x_0, y_0)$ și are panta egală cu $\pm \frac{y_1}{x_1}$, semnul superior corespunzînd defazajelor de 0 și 2π radiani, iar semnul inferior corespunzînd defazajului de π radiani.

Alegînd punctul $A_0(x_0, y_0)$ de pe această dreaptă ca origine pentru coordonata intrinsecă $s = \overline{A_0B}$, al cărei modul va fi dat, în condițiile (22.231)) și (22.233), de relația

$$|s| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \sin(kt + \alpha_x)$$

și considerînd sensul pozitiv al versorului $\bar{\tau}$ al dreptei determinată prin ecuația (22.234) astfel încît pentru $\sin(kt + \alpha_x) > 0$ să rezulte și $s > 0$, ecuația finită a mișcării punctului considerat, efectuată în condițiile precizate mai sus, va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{s = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sin(kt + \alpha_x).} \tag{22.235}$$

Se poate trage deci concluzia că prin compunerea a două vibrații armonice ortogonale sincrone și defazate de un multiplu întreg de π radiani, se obține o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, cu centrul de oscilație situat în punctul $A_0(x_0, y_0)$.

— *Cazul II. Defazaj egal cu un număr impar de* $\frac{\pi}{2}$ *radiani*, adică

$$\alpha_y - \alpha_x = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{(rad.)} \quad (\lambda = 0, 1,2, \ldots). \tag{22.236}$$

Se observă că în aceste condițiuni ecuația (22.232) ia forma

$$\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{y_1^2} - 2\left(\frac{x_0 x}{x_1^2} + \frac{y_0 y}{y_1^2}\right) + \left(\frac{x_0^2}{x_1^2} + \frac{y_0^2}{y_1^2}\right) - 1 = 0,$$

Scanned with CamScanner

sau încă

$$\boxed{\left(\frac{x - x_0}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{y_1}\right)^2 - 1 = 0}, \tag{22.237}$$

ea fiind reprezentată acum prin o elipsă de semiaxe x_1 și y_1, translată cu centrul în punctul $A_0(x_0, y_0)$.

Pentru diverse valori ale lui λ în condiția (22.236) vor rezulta doar sensuri alternînde de parcurs pe elipsă.

22.2.2. Compunerea a două vibrații armonice ortogonale cu raport aproape unitar al pulsațiilor

adică

$$\frac{k_y}{k_x} = 1 + \varepsilon, \tag{22.238}$$

cu $\varepsilon > 0$ și foarte apropiat de valoarea zero.

În această situație, diferența celor două pulsații ia valoarea

$$\Delta k = \varepsilon k_x, \tag{22.239}$$

iar perioada termenilor în care apare această pulsație devine

$$T_{xy} = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2\pi}{k_x} = \frac{1}{\varepsilon} T_x \gg T_x, \tag{22.240}$$

deci foarte mare în raport cu perioada T_x.

Examinînd ecuațiile parametrice (22.225) ale traiectoriei, precum și ecuația analitică directă (22.230) a ei, se observă că în timp ce coordonatele punctului mobil vor lua aproximativ aceleași valori după intervale de timp egale cu

$$T = T_x = \frac{2\pi}{k_x} \approx \frac{2\pi}{k_y} = T_y, \tag{22.241}$$

coeficienții ecuației (22.230) vor reveni la aceleași valori după intervale de timp incomparabil mai mari, egale cu T_{xy}.

Se poate considera deci că pe durata unei perioade $T = T_x$ argumentul

$$\varphi_{12}(t) = \Delta k t + \alpha_y - \alpha_x = \varepsilon k_x t + \alpha_y - \alpha_x$$

Scanned with CamScanner

rămîne practic constant, el crescînd prin salturi în perioadele următoare, astfel încît mișcarea punctului va putea fi concepută ca o mișcare periodică, corespunzătoare compunerii a două vibrații armonice ortogonale sincrone, dar cu defajaze variabile prin salturi.

În consecință, recapitulînd discuțiile de la subpunctul precedent, se poate afirma că pe durata de timp în care argumentul $\varphi_{12}(t)$ va putea fi aproximat cu un multiplu întreg de π radiani, traiectoria punctului va putea fi asimilată cu segment rectiliniu, parcurs într-o mișcare oscilatorie armonică, că pentru durate de timp în care argumentul $\varphi_{12}(t)$ va putea fi considerat aproximativ egal cu un număr impar de $\frac{\pi}{2}$ radiani, traiectoria va fi o elipsă cu semiaxele paralele la axele de coordonate și că pentru durate de timp care se vor încadra între intervalele amintite mai sus, traiectoriile vor fi elipse rotite față de axele de coordonate.

În modul acesta, mișcarea punctului într-un interval de timp

$$t - t_0 = T_{xy} = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi/k_x$$

— t_0 fiind momentul inițial al studierii procesului de mișcare —, va rezulta, ca urmare a faptului că argumentul $\varphi_{12}(t)$ trece succesiv prin toate valorile menționate mai sus, dintr-o succesiune de mișcări pe traiectorii care își modifică continuu forma, trecînd de la segmente rectilinii la elipse translate și rotite față de axele de coordonate și apoi la elipse numai translate față de axele de coordonate și cu schimbări alternative de sensuri de parcurs.

Această succesiune de traiectorii continuu modificate se va repeta după intervale de timp egale cu $T_{xy} = \frac{1}{\varepsilon} T_x$, perioadele T_{xy}, suficient de mari, permițînd chiar urmărirea acestor modificări continue de traiectorii prin intermediul unor traductoare optice.

22.2.3. Compunerea a două vibrații armonice ortogonale cu pulsații comensurabile

adică satisfăcînd condiția

$$\frac{k_y}{k_x} = \frac{n}{m}, \tag{22.242}$$

n și m fiind numere întregi, prime între ele, cu $n > m$ în ipoteza de lucru adoptată ($k_y > k_x$).

Pentru diferența celor două pulsații va rezulta deci valoarea

$$\Delta k = k_y - k_x = \frac{n-m}{m} k_x, \tag{22.243}$$

în care și diferența $(n - m)$ este un număr prim în raport cu numerele n și m.

Pentru a stabili caracterul mișcării rezultante a punctului, se va observa că în condițiile (22.242) și pentru intervale de timp egale cu multipli întregi ai intervalului

$$T = mT_x = nT_y = (n - m)\, T_{xy}, \tag{22.244}$$

cu

$$T_x = \frac{2\pi}{k_x}; \quad T_y = \frac{2\pi}{k_y}; \quad T_{xy} = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{k_y - k_x}, \tag{22.245}$$

pot fi scrise egalitățile

$$\begin{cases} \sin\,(k_x(t + hT) + \alpha_x] = \sin\,[k_x t + \alpha_x + hmT_x] = \sin\,(k_x t + \alpha_x); \\ \sin\,[k_y(t + hT) + \alpha_y] = \sin\,[k_y t + \alpha_y + hnT_y] = \sin\,(k_y t + \alpha_y) \end{cases} \tag{22.246}$$

și

$$\begin{cases} \sin\,[\Delta k(t + hT) + \alpha_y - \alpha_x] = \sin\,[\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x + h(n - \\ - m)T_{xy}] = \sin\,(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x); \\ \cos\,[\Delta k(t + hT) + \alpha_y - \alpha_x] = \cos\,[\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x + h(n - \\ - m)\, T_{xy}] = \cos\,(\Delta kt + \alpha_y - \alpha_x). \\ (h = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{22.247}$$

Relațiile (22.246) scot în evidență faptul că, în condițiile (22.242) mobilul trece periodic prin aceleași poziții, coordonatele lui, determinate prin relațiile (22.225), luînd aceleași valori după intervale de timp egale cu hT; de asemenea, relațiile (22.247) arată că în ecuația (22.230) coeficienții variabilelor x și y capătă aceleași valori după intervale de timp egale cu hT, h fiind un număr întreg.

Scanned with CamScanner

Se poate trage deci concluzia că traiectoria punctului cu mișcarea determinată prin ecuațiile (22.225) este, în condițiile (22.242), o curbă inchisă, incadrată intr-un dreptunghi cu centrul in punctul $A_0(x_0, y_0)$ și de laturi egale cu $2x_1$, respectiv $2y_1$ și care se repetă identic, cu perioada T.

Formele acestor curbe inchise, purtind numele generic de *curbe Lissajous*, depind de raportul celor două pulsații ale vibrațiilor ortogonale componente, precum și de defazajul lor, iar dimensiunile lor depind de valorile amplitudinilor.

O caracteristică interesantă a acestor curbe Lissajous este faptul că raportul dintre numărul punctelor de tangență ale curbei cu laturile de lungime $2y_1$ ale dreptunghiului și dintre numărul punctelor de tangență cu laturile de lungime $2x_1$ ale dreptunghiului care le incadrează este egal cu raportul celor două pulsații, adică tot $\frac{n}{m}$.

În fig. 22.34 a, b, c, d, e, f, g, h și i sînt reprezentate, după lucrarea [7], citeva forme ale acestor curbe pentru valoarea

$$\frac{k_y}{k_x} = 2$$

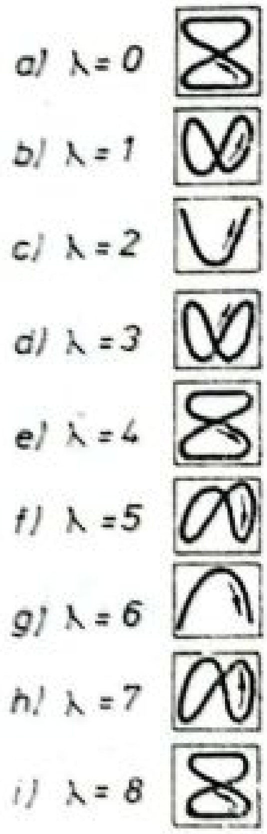


Fig. 22.34.

a raportului pulsațiilor și pentru următoarele 8 defazaje :

$$\alpha_y - \alpha_x = \lambda\,\pi/4, \ (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8).$$

22.2.4. Compunerea a două vibrații armonice ortogonale cu pulsațiile incomensurabile

Inexistența, în această situație, a unui multiplu comun al perioadelor $T_x = 2\pi/k_x$ și $T_y = 2\pi/k_y$, face imposibilă revenirea periodică a punctului in mișcare la o poziție prin care a mai trecut odată. Rezultă de aici că in această situație traiectoria punctului va fi o curbă deschisă, inscrisă in dreptunghiul cu centrul în punctul $A_0(x_0, y_0)$ și cu laturile egale cu $2x_1$ și $2y_1$.

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

22.3. *Compunerea a trei vibrații armonice ortogonale*

În această de a doua situație, este vorba de o mișcare spațială a punctului, determinată prin ecuațiile

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1 \sin (k_x t + \alpha_x)\\
y &= y_0 + y_1 \sin (k_y t + \alpha_y)\\
z &= z_0 + z_1 \sin (k_z t + \alpha_z),
\end{aligned}
\tag{22.248}
$$

unde x_0, x_1, k_x, α_x, y_0, y_1, k_y, α_y, z_0, z_1, k_z și α_z sînt constante.

De la început chiar se observă că este vorba de o mișcare efectuată într-un domeniu limitat al spațiului, traiectoria punctului încadrîndu-se în interiorul unui paralelipiped drept, cu centrul în punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și cu muchiile egale cu $2x_1$, $2y_1$ și $2z_1$.

Pentru a discuta caracteristicile acestei traiectorii, vor fi deosebite și aici următoarele situații :

22.3.1. Compunerea a trei vibrații armonice ortogonale sincrone

adică pentru care sînt satisfăcute condițiile

$$k_x = k_y = k_z = k. \tag{22.249}$$

Se observă mai întîi că după intervale de timp egale cu $T = 2\pi/k$, coordonatele punctului iau regulat aceleași valori, rezultînd de aici că în condițiile (22.249) mișcarea punctului este periodică, de perioadă T.

Pentru a aprecia și forma acestei traiectorii, se vor scrie ecuațiile (22.248) sub o formă care să permită mai ușor eliminarea timpului, adică sub forma

$$
\begin{aligned}
\cos \alpha_x \sin (kt) + \sin \alpha_x \cos (kt) &= \frac{x - x_0}{x_1}\\
\cos \alpha_y \sin (kt) + \sin \alpha_y \cos (kt) &= \frac{y - y_0}{y_1}\\
\cos \alpha_z \sin (kt) + \sin \alpha_z \cos (kt) &= \frac{z - z_0}{z_1},
\end{aligned}
\tag{22.250}
$$

ele reprezentind un sistem de (2 + 1) ecuații liniare în 2 necunoscute algebrice, reprezentate prin mărimile sin (kt) și cos (kt), a cărui compatibilitate implică, conform teoremei lui Kronecker-Capelli, satisfacerea condiției

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_x & \sin\alpha_x & \dfrac{x-x_0}{x_1} \\ \cos\alpha_y & \sin\alpha_y & \dfrac{y-y_0}{y_1} \\ \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & \dfrac{z-z_0}{z_1} \end{vmatrix} = 0. \tag{22.251}$$

Prin dezvoltarea determinantului după elementele ultimei coloane rezultă ecuația

$$\frac{\sin(\alpha_z-\alpha_y)}{x_1}(x-x_0)+\frac{\sin(\alpha_x-\alpha_z)}{y_1}(y-y_0)+ \\ +\frac{\sin(\alpha_y-\alpha_x)}{z_1}(z-z_0)=0, \tag{22.252}$$

determinînd un plan ce conține punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe vectorul

$$\bar{r}_1^0=\frac{\sin(\alpha_z-\alpha_y)}{x_1}\,\bar{i}+\frac{\sin(\alpha_x-\alpha_z)}{y_1}\,\bar{j}+\frac{\sin(\alpha_y-\alpha_x)}{z_1}\,\bar{k}. \tag{22.253}$$

Rezultă de aici că în condițiile (22.249) traiectoria punctului este o curbă plană, situată în planul determinat prin ecuația (22.252).

Pe de altă parte, rezolvînd în raport cu sin (kt) și cos (kt) primele două dintre ecuațiile (22.250) rezultă, în ipoteza

$$\alpha_y-\alpha_x\neq\lambda\pi,\ (\lambda=0,1,2), \tag{22.254}$$

relațiile

$$\sin(\alpha_y-\alpha_x)\sin(kt)=\left[\frac{x-x_0}{x_1}\sin\alpha_y-\frac{y-y_0}{y_1}\sin\alpha_x\right]$$

$$\sin(\alpha_y-\alpha_x)\cos(kt)=\left[-\frac{x-x_0}{x_1}\cos\alpha_y+\frac{y-y_0}{y_1}\cos\alpha_x\right],$$

Scanned with CamScanner

care, prin ridicare la pătrat și însumare, vor conduce la ecuația

$$\frac{(x-x_0)^2}{x_1^2}+\frac{(y-y_0)^2}{y_1^2}-2\frac{x-x_0}{x_1}\cdot$$

$$\cdot\frac{y-y_0}{y_1}\cos(\alpha_y-\alpha_x)=\sin^2(\alpha_y-\alpha_x), \qquad (22.255)$$

determinînd în planul Oxy o conică (Γ), translată în punctul $A'(x_0, y_0, 0)$ — proiecția pe planul Oxy a punctului $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — și rotită față de axele de coordonate în raport cu care au fost scrise ecuațiile de mișcare, iar în spațiu o suprafață cilindrică (Σ), avînd conica (Γ) drept curbă directoare și generatoarele paralele la axa Oz, (fig. 22.35).

Cercetînd discriminantul conicei, se găsește condiția

$$\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{1}{x_1^2y_1^2}\sin^2(\alpha_y-\alpha_x)>0,$$

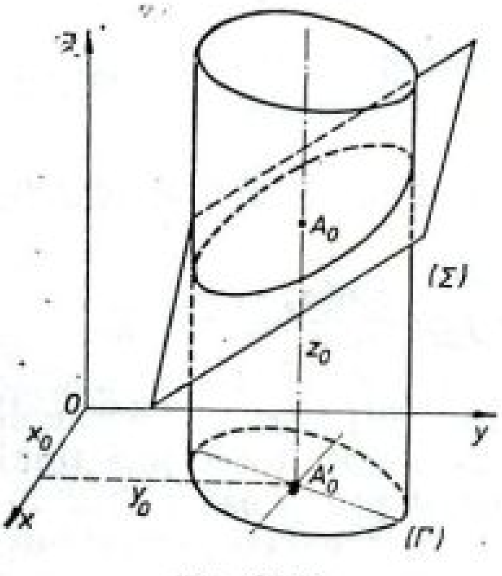


Fig. 22.35.

care arată că această conică este o elipsă cu centrul în punctul $A_0'(x_0, y_0, 0)$, ceea ce înseamnă că cilindrul determinat prin ecuația (22.255) este și el eliptic.

Se poate trage deci concluzia că traiectoria punctului a cărui mișcare rezultă din compunerea a trei vibrații armonice ortogonale sincrone este curba de intersecție dintre cilindrul eliptic determinat prin ecuația (22.255) și planul determinat prin ecuația (22.252), această curbă fiind de asemenea o elipsă.

Revenind la condiția (22.254), pe baza căreia s-a făcut discuția precedentă, se precizează că în cazul cînd ea nu ar fi fost îndeplinită, ar fi trebuit să se considere altă pereche de ecuații din sistemul (22.250) în locul primelor două.

De asemenea, se va observa că în cazul cînd cele trei vibrații armonice ortogonale sincrone sînt fie în fază, fie în opoziție de fază, adică fazele lor inițiale satisfac condițiile

$$\alpha_x=\alpha;\quad \alpha_y=\alpha+\lambda\pi;\quad \alpha_z=\alpha+\mu\pi,\ (\lambda, \mu=0,\ 1,\ 2),$$

Scanned with CamScanner

atunci mișcarea periodică pe elipsă devine o mișcare rectilinie oscilatorie armonică.

Într-adevăr, se observă că pentru vectorul de poziție în raport cu originea reperului fix al punctului în mișcare va putea fi scrisă în acest caz expresia

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}) + [x_1 \sin(kt + \alpha)\bar{i} +$$

$$+ y_1 \sin(kt + \alpha + \lambda\pi)\bar{j} + z_1 \sin(kt + \alpha + \mu\pi)\bar{k}] =$$

$$= (x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}) + (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \sin(kt + \alpha),$$

adică

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 \sin(kt + \alpha), \tag{22.256}$$

el definind o mișcare rectilinie oscilatorie armonică de pulsație k, de amplitudine

$$A = |\bar{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{22.257}$$

și cu centrul de oscilație în punctul $A_0(\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k})$.

22.3.2. Compunerea a trei vibrații armonice ortogonale cu pulsațiile comensurabile

adică satisfăcînd condițiile

$$\frac{k}{l} = \frac{k_y}{m} = \frac{k_z}{n}, \tag{22.258}$$

l, m și n fiind numere intregi, prime între ele.

Inversînd rapoartele și inmulțindu-le, pe fiecare, cu 2π, rezultă șirul de rapoarte egale

$$l \cdot \frac{2\pi}{k_x} = m\frac{2\pi}{k_y} = n\frac{2\pi}{k_z},$$

sau

$$lT_x = mT_y = nT_z = T, \tag{22.259}$$

unde T este valoarea comună a acestor din urmă produse.

CamScanner
Scanned with CamScanner

Sint ușor de verificat, în aceste condiții, relațiile de mai jos

$$x(t + hT) = x_0 + x_1 \sin [k_x(t + hT) + \alpha_x] =$$
$$= x_0 + x_1 \sin(k_x t + \alpha_x) = x(t),$$
$$y(t + hT) = y_0 + y_1 \sin [k_y (t + hT) + \alpha_y] = y_0 +$$
$$+ y_1 \sin(k_y t + \alpha_y) = y(t),$$
$$z(t + hT) = z_0 + z_1 \sin [k_z (t + hT) + \alpha_z] = z_0 +$$
$$+ z_1 \sin(k_z + \alpha_z) = z(t),$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots), \tag{22.260}$$

care arată că cele trei coordonate ale punctului mobil iau, după intervale de timp egale cu multipli întregi ai lui T, aceleași valori.

Rezultă deci că mișcarea punctului efectuată în condițiile (22.258) este o mișcare periodică, mobilul deplasîndu-se pe o traiectorie închisă, încadrată în paralelipipedul drept cu centrul în punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și cu muchiile egale cu $2x_1$, $2y_1$ și $2z_1$.

22.3.3 Compunerea a trei vibrații armonice ortogonale cu pulsațiile incomensurabile

Se înțelege ușor că în acest caz, deși fiecare din mișcările componente este periodică, mișcarea rezultantă nu va avea caracter periodic, traiectoria punctului fiind o curbă deschisă, încadrată de asemenea în paralelipipedul drept cu centrul în punctul $A_0(x_0, y_0, z_0)$ și cu muchiile egale cu $2x_1$, $2y_1$ și $2z_1$.

Scanned with CamScanner

Capitolul X

DINAMICA VIBRAȚIILOR SISTEMELOR DE RIGIDE

Acest capitol al lucrării va include următoarele probleme:

— prezentarea caracteristicilor mecanice — caracteristicile inerțiale, caracteristicile cinetice și caracteristicile dinamice — ale sistemelor vibrante;

— examinarea modalităților de excitare a sistemelor vibrante;

— stabilirea diverselor forme ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor sistemelor mecanice;

— studiul răspunsurilor sistemelor vibrante supuse la excitații deterministe și aleatoare.

§ 23. Caracteristicile mecanice inerțiale și cinetice ale sistemelor vibrante

23.1. *Caracteristicile inerțiale generalizate ale sistemelor vibrante*

După cum s-a văzut în dinamica sistemelor de rigide, prin caracteristici inerțiale ale unui element oarecare (S_i) al unui sistem mecanic se înțeleg următoarele două categorii de mărimi fizice:

— masa elementului, M_i (kg), care caracterizează inerția sa la translație;

— componentele tensorului de inerție corespunzător reperului $(\mathscr{R}'_i) \equiv (Q_i x'_i y'_i z'_i)$ invariabil atașat elementului (S_i), care caracterizează inerția la rotație a elementului respectiv; în cazul cînd elementul (S_i) execută o rotație în jurul unei axe de direcție fixă în spațiu și coincizînd și cu o axă centrală de inerție, inerția la rotație va fi

Scanned with CamScanner

caracterizată numai prin momentul de inerție J_i $(kg \cdot m^2)$ al elementului respectiv în raport cu axa de rotație.

Considerînd modelul mai general de element constitutiv al unui sistem vibrant, reprezentat printr-un rigid în mișcare oscilatorie elicoidală, cu axa acestei mișcări, de versor $\bar{k}'_i$ = vers $Q_i z'_i$, fixă în spațiu — acest model incluzînd, evident, și cele două cazuri particulare, frecvent întîlnite în aplicațiile tehnice, reprezentate prin elemente executînd fie numai translații rectilinii oscilatorii, fie numai rotații oscilatorii în jurul unor axe fixe —, energia cinetică a sistemului vibrant va depinde de aceste caracteristici inerțiale, în baza relației cunoscute

$$\mathscr{E}^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[M_i\bar{v}_{G_i}^2 + J_i\omega_i^2], \tag{23.1}$$

axele mișcărilor elicoidale ale elementelor fiind presupuse axe centrale de inerție.

Prin exprimarea parametrilor cinematici $\bar{v}_{G_i}$ și $\bar{\omega}_i$ în funcție de coordonatele generalizate și de vitezele generalizate ale sistemului vibrant, considerat sistem scleronom — aceasta fiind, de altfel, situația întîlnită curent în tehnica vibrațiilor —, se obține expresia energiei cinetice redusă numai la forma pătratică în vitezele generalizate, determinată prin relația

$$\mathscr{E}^* = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} g_{hj}^*\dot{q}_h^*\dot{q}_j^*, \tag{23.2}$$

unde r este numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant, iar

$$g_{hj}^* = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h^*}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_j^*} + J_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_h^*}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j^*}\right] = g_{hj}^*(q_1^*, \ldots, q_r^*)$$

$$(h, j = 1, 2, \ldots, r) \tag{23.3}$$

sînt coeficienții evasiinerțiali, funcții, în cazul sistemelor scleronome, numai de coordonatele generalizate și avînd dimensiunile fizice de:

— masă (redusă), în cazul cînd coordonatele generalizate, q_h^* și q_j^*, sînt ambele coordonate liniare;

— moment static (redus), în cazul cînd unul din parametrii lagrangeieni q_h^* și q_j^* care definesc coeficientul evasi-inerțial g_{hj}^*, este o coordonată liniară și celălalt o coordonată unghiulară;

Scanned with CamScanner

— moment de inerție (redus), atunci cînd ambii parametri lagrangeieni care definesc coeficientul g^*_{hj}, q^*_h și q^*_j, sînt coordonate unghiulare.

Din acest motiv, coeficienții cvasi-inerțiali au mai fost numiți *caracteristici inerțiale generalizate*, iar matricea pătratică de ordinul r formată cu acești coeficienți, simetrică, $(g^*_{hj} = g^*_{jh}\,;\ h, j = 1, 2, \ldots, r)$, notată cu simbolul

$$\mathbf{I}^* = \|g^*_{hj}\| = \begin{Vmatrix} g^*_{11} & g^*_{12} \cdots & g^*_{1j} \cdots & g^*_{1r} \\ g^*_{21} & g^*_{22} \cdots & g^*_{2j} \cdots & g^*_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g^*_{h1} & g^*_{h2} \cdots & g^*_{hj} \cdots & g^*_{hr} \\ \vdots & & & \\ g^*_{r1} & g^*_{r2} \cdots & g^*_{rj} \cdots & g^*_{rr} \end{Vmatrix} \tag{23.4}$$

a fost numită *matricea de inerție a sistemului mecanic* considerat; s-a mai arătat, de asemenea, în dinamica sistemelor de rigide că această matrice este nesingulară, adică determinantul ei satisface condiția

$$\det \mathbf{I}^* \neq 0. \tag{23.5}$$

În tehnica curentă a vibrațiilor, matricea de inerție (23.4) este aproximată cu o altă matrice, de același ordin, în care elementele ei sînt fie funcții cunoscute de timp, fie constante, după cum este vorba de o mișcare vibratorie în jurul unei mișcări principale stabile, sau este vorba de un proces vibratoriu în jurul poziției de echilibru stabil a sistemului vibrant; această aproximare este justificată, după cum se va arăta ulterior, de posibilitatea liniarizării sistemului de ecuații diferențiale ce descriu mișcarea sistemului vibrant — și deci de posibilitatea integrării acestui sistem — și se bazează pe dezvoltarea în serii Mac Laurin a funcțiilor $g^*_{hj}(q^*_1, \ldots, q^*_r)$ în jurul valorilor $q^*_k = q_k$, cu q_k funcții cunoscute de timp în cazul vibrațiilor în jurul unei mișcări principale stabile și constante — în particular egale cu zero — în cazul vibrațiilor în jurul poziției de echilibru stabil.

În concordanță cu relația (21.16) vor putea fi efectuate deci dezvoltările

$$g^*_{hj} = g^*_{hj}(q^*) = g^*_{hj}(q_1 + w_1\,;\ q_2 + w_2\,;\ \ldots\,;\ q_r + w_r) = g^*_{hj}(q) + \\ + \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\partial g^*_{hj}}{\partial q^*_k}\right)_{(q)} w_k + \frac{1}{2\,!} \sum_{k,l=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 g^*_{hj}}{\partial q^*_k\, \partial q^*_l}\right)_{(q)} w_k w_l + \ldots \tag{23.6}$$

Scanned with CamScanner

indicele inferior (q) indicînd că în expresiile derivatelor cărora le este aplicat vor trebui făcute înlocuirile $q_k^* = q_k$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Se înțelege că în condițiile de stabilitate (21.9) și (21.10), adică în cazul valorilor mici – în raport cu unitatea de măsură adoptată pentru evaluarea mărimilor q_k – ale variațiilor w_k, dezvoltările precedente se vor putea opri la un anumit ordin de aproximare, care va depinde de caracterul – variabil sau nu – al mărimilor q_k; în cazul vibrațiilor efectuate în jurul unei mișcări principale coeficienții dezvoltării (23.6) vor fi funcții cunoscute de timp, iar în cazul vibrațiilor efectuate în jurul pozițiilor de echilibru stabil ale sistemelor vibrante, acești coeficienți vor avea valori constante.

Luînd în considerație, în continuare, numai cazul sistemelor mecanice ce execută mișcări vibratorii în jurul pozițiilor lor de echilibru stabil, deci numai cazul cînd mărimile q_k se reduc la niște constante, care, prin alegerea convenabilă a parametrilor lagrangeieni, vor putea fi chiar valorile zero, expresiile vitezelor generalizate ale unui asemenea sistem vibrant, în general de forma

$$\dot{q}_k^* = \dot{q}_k + \dot{w}_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

vor lua, în această situație, formele

$$\dot{q}_k^* = \dot{w}_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{23.7}$$

rezultînd de aici că expresia (24.2) a energiei cinetice va conține numai produse de forma $\dot{w}_h \dot{w}_j$.

De asemenea, se va observa că în aceste condițiuni coeficienții dezvoltărilor (23.6) în serii Mac Laurin nu mai sînt funcțiuni de timp, ci iau valori constante, determinate prin efectuarea, în expresiile lor, a înlocuirilor $q_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Este ușor de înțeles, în continuare, că în cazul cînd în dezvoltările (23.6) s-ar lua în considerație, în afara termenului $g_{hj}^*(q) = g_{hj}^*(0)$, chiar numai și termenii de ordinul întîi în variațiile w_k, avînd coeficienții

$$a_{hj}^k = \left(\frac{\partial g_{hj}^*}{\partial q_k^*} \right)_{\dot{q}_k^* = q_k = 0}, \tag{23.8}$$

expresia (23.2) a energiei cinetice ar conține termeni de forma $a_{hj}^k w_k \dot{w}_h \dot{w}_j$, care, în condițiile de stabilitate precizate, sînt neglijabili

în raport cu termenii de forma $g^*_{hj}(0)\dot{w}_h\dot{w}_j$, corespunzători primilor termeni ai dezvoltărilor (23.6).

Se poate trage deci concluzia că în cazul vibrațiilor unui sistem mecanic în jurul poziției de echilibru stabil, dezvoltările (23.6) se vor opri chiar la primul termen, notat în continuare cu simbolul

$$g^*_{hj}(q^*) = g^*_{hj}(0) = a_{hj}, \tag{23.9}$$

iar matricea de inerție va lua și ea acum o formă corespunzătoare acestor caracteristici inerțiale generalizate aproximate, notată acum cu simbolul **I**, adică

$$\mathbf{I} = \|a_{hj}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j} \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} \ldots & a_{hj} \ldots & a_{hr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots & a_{rh} \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix}, \tag{23.10}$$

cu determinantul acestei matrice satisfăcînd și acum condiția

$$\det \mathbf{I} \neq 0, \tag{23.11}$$

deoarece noua formă pătratică în vitezele generalizate, care va aproxima energia cinetică a sistemului mecanic, trebuie să fie tot pozitiv definită.

În continuare, vor fi stabilite expresiile concrete ale acestor caracteristici generalizate aproximate pentru următoarele trei tipuri particulare de sisteme vibrante în jurul poziției de echilibru stabil, întîlnite frecvent în aplicațiile tehnice :

23.1.1. Caracteristicile inerțiale generalizate ale sistemelor vibrante cu elementele legate în serie prin arcuri elicoidale și executînd translații oscilatorii în lungul aceleiași axe

În cazul unui asemenea sistem, format dintr-un număr n de elemente (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, (fig. 23.1), poziția fiecărui element va fi determinată prin abscisa x_{G_i} a centrului său de masă G_i, abscisă a cărei variație va fi independentă de variațiile

tuturor celorlalte abscise ale centrelor de masă ale restului elementelor. În consecință, în această situație numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant considerat va fi de $r = n$, totalitatea absciselor x_{G_i}, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ reprezentînd deci chiar parametrii de poziție independenți ai sistemului vibrant. Din motive ce vor fi explicate ulterior însă, este de preferat să se aleagă drept coordonate lagrangeiene ale sistemului vibrant de mai sus, nu abscisele x_{G_i}, ci diferențele

$$q_i^* = x_i^* = x_{G_i} - x_{G_{i_{st}}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23.12}$$

care determină pozițiile elementelor în raport cu pozițiile lor de echilibru static, $x_{G_{k_{st}}}$ fiind abscisele centrelor de masă în aceste poziții de echilibru.

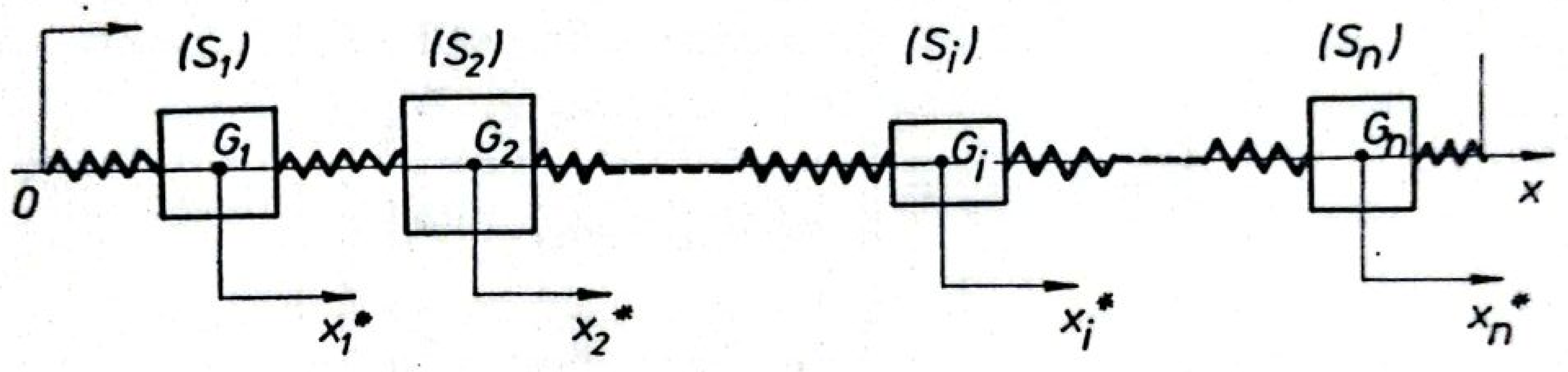


Fig. 23.1.

În aceste condiții, $\left(\varphi_i \equiv 0;\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*} \equiv 0;\ \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k^*} = \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k^*}\,\bar{i} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left(x_i^* + x_{G_{i_{st}}}\right)\bar{i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k^*}\,\bar{i}\right)$, relațiile (23.3) dau următoarele expresii pentru coeficienții cvasi-inerțial g_{hj}^*:

$$g_{hj}^* = a_{hj} = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_h^*}\frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_j^*} = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\partial x_i^*}{\partial x_h^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j^*},$$

sau încă, observînd că întrucît mărimile $x_{G_k}^*$ sînt independente între ele, sînt valabile condițiile

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k^*} \begin{cases} = 0 \text{ pentru } i \neq k; \\ = 1 \text{ pentru } i = k, \end{cases}$$

mai rezultă valorile

$$g_{hj}^* = a_{hj} \begin{cases} = 0 \quad \text{pentru } h \neq j \\ = M_h \text{ pentru } h = j, \end{cases} \tag{23.13}$$

care permit să se tragă concluzia că în cazul sistemului vibrant considerat caracteristicile inerțiale generalizate se reduce numai la masele elementelor și că matricea de inerție a sistemului are forma particulară

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} M_1 & 0 \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 \dots M_h \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 \dots 0 \dots & M_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \dots & 0 & M_n \end{Vmatrix} \quad (23.14)$$

23.1.2. Caracteristicile inerțiale generalizate ale sistemelor vibrante plane alcătuite din elemente plasate pe o bară elastică și executînd translații rectilinii oscilatorii în lungul normalelor la axa nedeformată a barei.

Alegînd direcția axei nedeformate a barei elastice ca direcție a axei Ox și normala la ea, situată în planul în care oscilează centrele de masă G_i ale elementelor (S_i), ca direcție a axei Oy, (fig. 23.2), pozițiile elementelor, vor fi determinate

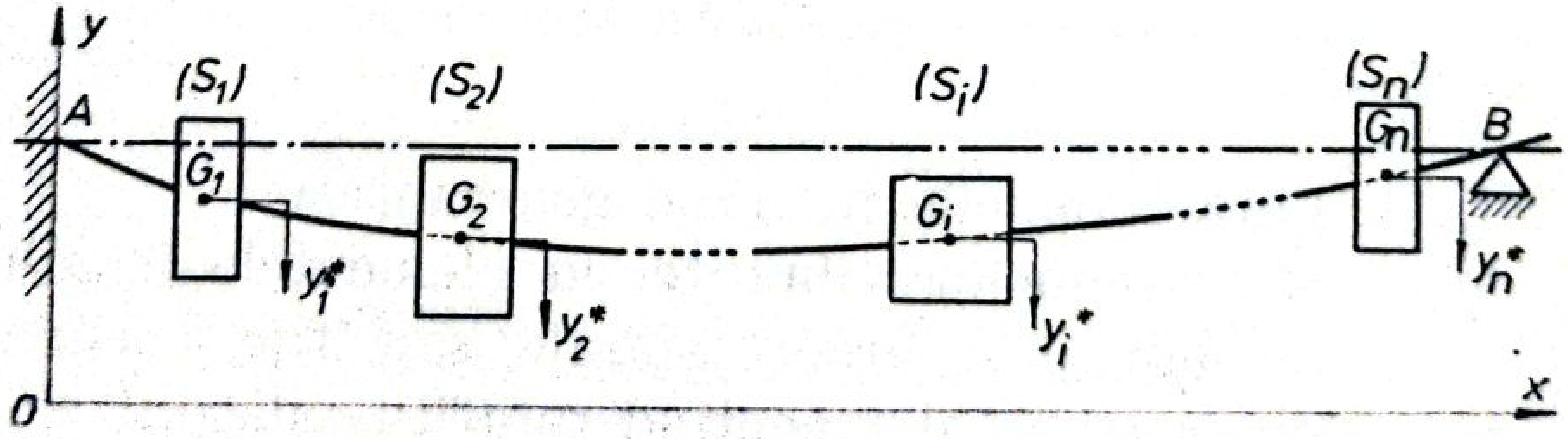


Fig. 23.2

prin ordonatele y_{G_i} ale centrelor lor de masă, ordonate care variază independent una de alta. Rezultă că numărul gradelor de libertate și ale acestui sistem vibrant va fi tot de $r = n$ și că parametrii de poziție independenți ai sistemulur vor fi reprezentați prin ordonatele y_{G_i} ale centrelor de masă G_i ale celor n elemente ale sistemului mecanic.

Alegînd și acum drept coordonate generalizate ale sistemului vibrant, diferențele

$$q_i^* = y_i^* = y_{G_i} - y_{G_{i_{st}}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23.15)$$

Scanned with CamScanner

ceea ce înseamnă că pozițiile elementelor sînt raportate și de astă dată la pozițiile lor de echilibru static, determinate prin valorile $y_{G_{i_{st}}}$ ale ordonatelor centrelor lor de masă — această convenție de raportare fiind precizată în schițele dinamice așa cum se arată în fig. 23.2, se vor putea scrie, în condițiile acestui sistem vibrant, $\left(\varphi_i \equiv 0 ; \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*} \equiv 0 ; \dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k^*} = \dfrac{\partial y_{G_i}}{\partial y_k^*} \bar{j} = \dfrac{\partial}{\partial y_k^*} (y_i^* + y_{G_{i_{st}}}) \bar{j} = \dfrac{\partial y_i^*}{\partial y_k^*} \bar{j}\right)$, următoarele expresii ale caracteristicilor inerțiale generalizate ale sistemului

$$g_{hj}^* = a_{hj} = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_h^*} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_j^*} = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\partial y_i^*}{\partial y_h^*} \cdot \frac{\partial y_i^*}{\partial y_j^*},$$

sau încă, ținînd și acum seama de condițiile

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial y_k^*} \begin{cases} = 0 \text{ pentru } i \neq k \\ = 1 \text{ pentru } i = k, \end{cases}$$

mai rezultă valorile

$$g_{hj}^* = a_{hj} \begin{cases} = 0 \quad \text{pentru } h \neq j \\ = M_h \text{ pentru } h = j, \end{cases} \tag{23.16}$$

adică și în cazul acestui sistem vibrant caracteristicile inerțiale generalizate se reduc tot numai la masele elementelor sistemului.

În consecință, matricea de inerție a acestui sistem vibrant particular va avea tot forma (23.14).

23.1.3. Caracteristicile inerțiale generalizate ale sistemelor vibrante cu elementele legate în serie prin arcuri spirale sau tije elastice de torsiune și executînd rotații oscilatorii coaxiale.

Poziția unui element oarecare (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$ al sistemului vibrant va fi determinată, în această situație, prin unghiul de rotație φ_i, cu semnul raportat la un versor $\bar{i}_\Delta$ ales arbitrar pe axa de rotație, (fig. 23.3).

Întrucît toate aceste unghiuri vor varia independent între ele, rezultă că sistemul vibrant considerat va avea un număr de $r = n$ grade de libertate și că unghiurile de rotație φ_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, vor reprezenta parametrii de poziție independenți ai sistemului mecanic.

Din motive ce vor fi justificate ulterior, este preferabil și aici să se aleagă drept coordonate generalizate ale sistemului vibrant, nu unghiurile de rotație φ_i, ci diferențele

$$q_i^* = \varphi_i^* = \varphi_i - \varphi_{i_{st}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23.17}$$

această alegere implicînd raportarea poziției fiecărui element al sistemului nu la axa comună de referință pentru unghiurile de rotație, ci la pozițiile de echilibru static ale lor, poziții determinate prin valorile $\varphi_{i_{st}}$ ale unghiurilor de rotație; această convenție de raportare se precizează în schițe ca în fig. 23.3.

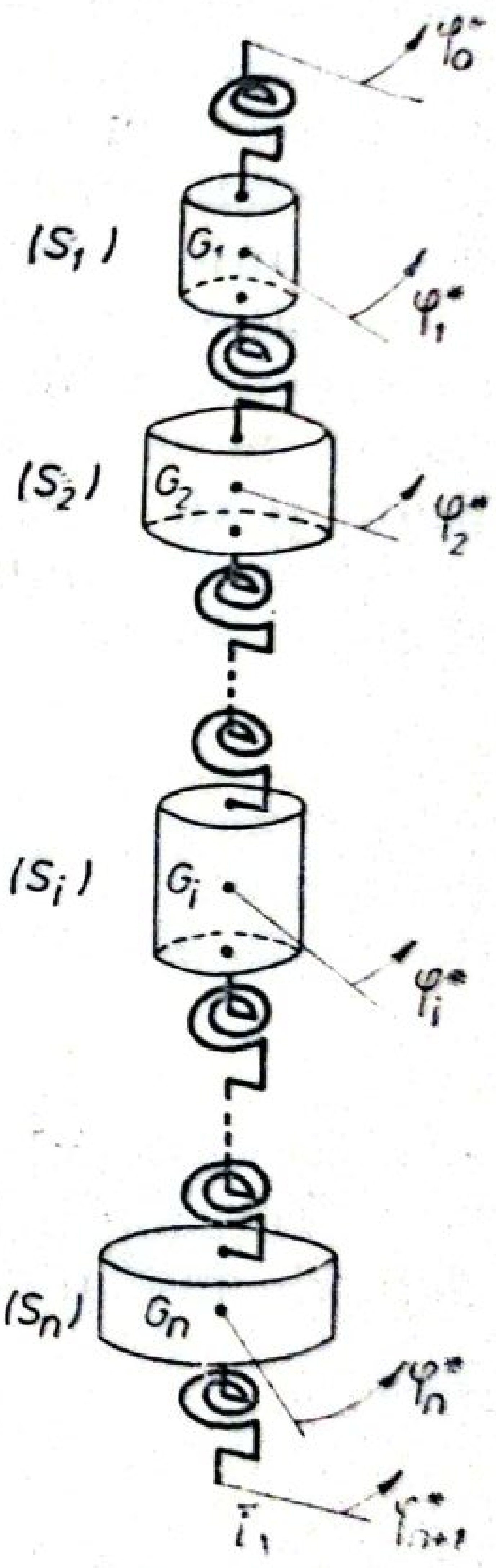


Fig. 23.3.

În condițiile precizate, $\left(\dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} = 0\,;\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k^*} = \dfrac{\partial}{\partial \varphi_k^*}(\varphi_i^* + \varphi_{i_{st}}) = \dfrac{\partial \varphi_i^*}{\partial \varphi_k^*}\right)$, expresiile (24.3) ale caracteristicilor inerțiale generalizate iau formele

$$g_{hj}^* = a_{hj} = \sum_{i=1}^{n} J_i \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \varphi_h^*} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \varphi_j^*},$$

$$(h, j = 1, 2, \ldots, n),$$

sau încă, remarcînd că și de astă dată sînt valabile, ca urmare a independenței, între ei, a parametrilor lagrangeieni aleși, condițiile

$$\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \varphi_h^*} \begin{cases} = 0 & \text{pentru } i \neq h \\ = 1 & \text{pentru } i = h, \end{cases}$$

mai rezultă

$$a_{hj} \begin{cases} = 0 & \text{pentru } h \neq j \\ = J_h & \text{pentru } h = j, \end{cases} \tag{23.18}$$

putîndu-se trage deci concluzia că în cazul sistemului vibrant considerat, caracteristicile inerțiale generalizate ale sistemului se reduc la momentele de inerție axiale ale elementelor sistemului și că matricea sa de inerție se reduce și ca la o matrice diagonală de forma

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 \ldots 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 \ldots 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots J_h & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & J_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 & & 0 & J_n \end{Vmatrix} \tag{23.19}$$

23.2. *Caracteristicile cinetice ale sistemelor vibrante*

23.2.1. Energia cinetică a unui sistem vibrant

Respectînd gradul de aproximare adoptat în exprimarea coeficienților cvasi-inerțiali, se pot stabili expresii aproximative corespunzătoare și pentru energia cinetică a sistemului vibrant, noile aproximări urmărind același scop, al facilitării integrării sistemului de ecuații diferențiale ce descriu fenomenul vibratoriu studiat, desfășurat în condiții de stabilitate.

Luînd și acum în considerație numai cazul sistemelor mecanice ce execută vibrații în jurul pozițiilor de echilibru stabil și ținînd seama de expresiile simplificate (23.7) și (23.8) ale vitezelor generalizate și ale caracteristicilor inerțiale generalizate, rezultă următoarea expresie simplificată și pentru energia cinetică a unui asemenea sistem vibrant:

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{r} a_{hj} \dot{w}_h \dot{w}_j = \mathcal{E}^*(\dot{w}), \tag{23.20}$$

respectiv

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} a \dot{w}^2 \tag{23.21}$$

pentru sistemul vibrant cu un singur grad de libertate $(a_{11} = a)$.

Întrucît în această situație energia cinetică a sistemului vibrant depinde numai de vitezele $\dot{w}_k$ ale vibrațiilor, rezultă condițiile

$$\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial w_k} = 0 \,; \; (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{23.22}$$

care vor simplifica în mod apreciabil forma ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor sistemelor mecanice în jurul pozițiilor lor de echilibru stabil.

23.2.2. Impulsurile generalizate ale sistemelor vibrante

În cadrul mecanicii analitice au fost numite impulsuri generalizate derivatele parțiale ale energiei cinetice în raport cu vitezele generalizate, aceste mărimi avînd dimensiunile fizice fie ale unui impuls, fie ale unui moment cinetic, după cum viteza generalizată după

care se efectuează derivata parțială a energiei cinetice este o viteză liniară, sau o viteză unghiulară.

Considerînd și acum numai cazul sistemelor mecanice executînd mișcări vibratorii în jurul pozițiilor lor de echilibru stabil, prin derivarea parțială în raport cu vitezele generalizate a expresiilor (24.20) sau (24.21) ale energiei cinetice a unui asemenea sistem se obțin următoarele expresii pentru impulsurile generalizate ale sistemului respectiv:

$$\boxed{h_k^* = \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial w_k} = \sum_{h=1}^{r} a_{kh}\dot{w}_h, \ (k = 1, 2, \ldots, r)}, \tag{23.23}$$

respectiv

$$\boxed{h^* = a\dot{w}}, \tag{23.24}$$

dacă sistemul are un singur grad de libertate.

Introducînd matricele coloană *

$$\mathbf{w} = \|w_1 w_2 \ldots w_k \ldots w_r\|^T \text{ și: } \dot{\mathbf{w}} = \|\dot{w}_1 \dot{w}_2 \ldots \dot{w}_k \ldots \dot{w}_r\|^T, \tag{23.25}$$

precum și *matricea coloană a impulsurilor generalizate* ale sistemului vibrant

$$\mathbf{h} = \|h_1 h_2 \ldots h_k \ldots h_r\|^T, \tag{23.26}$$

se verifică cu ușurință că expresiile (23.23) ale impulsurilor generalizate pot fi retranscrise concentrat, sub forma matriceală

$$\boxed{\mathbf{h} = \mathbf{I}\dot{\mathbf{w}}}. \tag{23.27}$$

§ 24. Caracteristicile dinamice generalizate ale sistemelor vibrante

Prin noțiunea de caracteristici dinamice ale unui sistem mecanic se înțelege, ca și în dinamica rigidului și a sistemelor de rigide,

*) Pentru economie de spațiu, se va adopta peste tot acest mod de transcriere a matricelor coloană.

ansamblul de mărimi, specifice sistemului mecanic, care caracterizează fie interacțiunile dintre elementele sistemului, fie interacțiunile acestor elemente cu corpuri din mediul înconjurător.

Se înțelege că aceste caracteristici dinamice, reprezentate în mecanica vibrațiilor îndeosebi prin constante elastice și prin coeficienți de amortizare, vor intra și în expresiile forțelor generalizate, în componența unor factori ce vor înmulți fie coordonatele generalizate, fie vitezele generalizate; prin analogie, acești factori vor fi numiți *caracteristici dinamice generalizate*, expresiile lor urmînd a fi stabilite în continuare pentru situațiile întîlnite frecvent în tehnica vibrațiilor.

După cum s-a văzut, în dinamica sistemelor de rigide, forțele generalizate au fost împărțite în două categorii :

— *Forțe generalizate active*, în rîndul cărora intrau forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor gravifice, solicitărilor elastice, solicitărilor motoare de diverse tipuri și solicitărilor perturbatoare, ultimele provenind, de regulă, din deplasarea extremităților legate cu exteriorul ale elementelor elastice de legătură exterioară ;

— *Forțe generalizate disipative*, în categoria cărora intrau forțele generalizate corespunzătoare rezistențelor mediului, solicitărilor de amortizare viscoasă și solicitărilor de frecare uscată, considerate cunoscute.

Datorită rolului diferit pe care îl au diversele tipuri de solicitări în desfășurarea proceselor vibratorii, în mecanica vibrațiilor forțele generalizate active vor fi împărțite în două grupe, prima incluzînd forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor conservative, iar a doua cuprinzînd forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor active perturbatoare, sau de excitație, considerate funcții cunoscute de timp.

Rezultă deci următoarea clasificare a forțelor generalizate adoptată în mecanica vibrațiilor :

1°. **Forțe generalizate conservative,** derivînd dintr-o funcție de forță generalizată U^*, respectiv dintr-o funcție potențială generalizată $V^* = -U^*$, care, în ipotezele de lucru adoptate (sistemele vibrante sînt scleronome), va depinde numai de coordonatele generalizate, adică este de forma

$$U^* = -V^* = U^*(q_1^*, \ldots, q_r^*) = U^*(q^*). \qquad (24.1)$$

Caracteristica esențială a acestor forțe generalizate, notate, în continuare, cu simbolurile $Q^*_{c_k}$ și determinate prin relațiile

$$Q^*_{c_k} = \frac{\partial U^*}{\partial q^*_k} = -\frac{\partial V^*}{\partial q^*_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.2}$$

o constituie faptul că ele provoacă transformări alternative de energie cinetică în energie potențială și invers, conservînd însă, în absența oricăror altor categorii de solicitări, energia mecanică a sistemului vibrant.

2°. **Forțe generalizate de amortizare**, datorate — prin neglijarea, în mod obișnuit, a rezistențelor mediului — numai solicitărilor de amortizare ale elementelor de legătură elastică și, eventual, solicitărilor de frecare uscată, considerate cunoscute.

Trăsătura caracteristică a acestei categorii de forțe generalizate, determinate prin relațiile

$$Q^*_{d_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathcal{R}}_{a_i} \frac{\partial \overline{r}_{G_i}}{\partial q^*_k} + \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{R}}_{a_i}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_k} \right], \tag{24.3}$$

în cazul rezistențelor de amortizate — $\overline{\mathcal{R}}_{a_i}$ și $\overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{R}}_{a_i})$ fiind componentele torsorilor rezultanți în polii G_i ai acestor solicitări pasive acționînd asupra elementului (S_i) — și prin relațiile

$$Q^*_{d_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathcal{F}}_{fr_i} \frac{\partial \overline{r}_{G_i}}{\partial q^*_k} + \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{F}}_{fr_i}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_k} \right], \tag{24.4}$$

în cazul frecărilor uscate — $\overline{\mathcal{F}}_{fr_i}$ și $\overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{F}}_{fr_i})$ fiind componentele torsorilor rezultanți în polii G_i ai solicitărilor de frecare uscată la care sînt supuse elementele (S_i) —, o constituie faptul că ele micșorează continuu energia mecanică a sistemului vibrant, prin transformarea unei părți din energia cinetică a acestuia în alte forme de energie, nemecanică (obișnuit calorică).

3°. **Forțe generalizate de excitație**, datorate solicitărilor perturbatoare, fie de tip inerțial, fie provenind din deplasările extremităților legate cu exteriorul ale elementelor de legătură elastică, fie de altă natură; aceste forțe generalizate, funcții cunoscute de timp — cel mai adesea periodice —, vor fi determinate prin relațiile

$$Q^*_{ex_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathcal{F}}_{ex_i} \frac{\partial \overline{r}_{G_i}}{\partial q^*_k} + \overline{\mathcal{M}}_{ex\,G_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_k} \right], \tag{24.5}$$

unde $\overline{\mathscr{F}}_{ex_i} = \overline{\mathscr{F}}_{ex_i}(t)$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{exG_i} = \overline{\mathfrak{M}}_{exG_i}(t)$ sînt componentele torsorilor în centrele de masă G_i ale tuturor solicitărilor perturbatoare care acționează asupra elementelor (S_i) și se vor caracteriza prin aceea că fac să varieze continuu energia mecanică a sistemului vibrant prin alternarea, de regulă, a unor perioade de creștere a energiei mecanice cu altele, de micșorare a ei.

În continuare, vor fi stabilite expresiile caracteristicilor dinamice generalizate pentru primele două categorii de forțe generalizate, urmînd ca forțele generalizate de excitație să fie examinate separat, în paragraful următor.

24.1.1. Caracteristicile dinamice generalizate conservative

Sistemele mecanice ce execută vibrații în jurul poziției de echilibru stabil sînt supuse, de regulă, la legături pasive cu frecări neglijabile. Considerînd, în cele ce urmează, numai această situație, solicitările disipative se vor reduce doar la rezistențele de amortizare ale elementelor elastice de legătură, cu componentele torsorilor în centrele de masă G_i ale acestor rezistențe depinzînd numai de parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic. Se înțelege că în poziția de echilibru static al sistemului vibrant aceste componente ale torsorilor rezistențelor de amortizare vor deveni egale cu zero, rezultînd deci condiția

$$\delta \mathscr{L}_{Ra_{st}} = 0. \tag{24.6}$$

De asemenea, în poziția de echilibru static a sistemului vibrant solicitările de excitație sînt, de regulă, egale cu zero, adică rezultă și condiția

$$\delta \mathscr{L}_{ex_{st}} = 0. \tag{24.7}$$

În consecință, în asemenea situații, în poziția de echilibru static a unui sistem vibrant acționează numai solicitările conservative și reacțiunile ideale ale legăturilor pasive aplicate sistemului, lucrul mecanic virtual al ultimelor fiind, după cum se știe, egal cu zero.

Rezultă de aici că, în condițiile precizate mai sus, relația exprimînd principiul deplasărilor virtuale aplicat sistemului vibrant în poziția sa de echilibru static va lua forma

$$\delta \mathscr{L}_c = \sum_{k=1}^{r} Q^*_{c_{k_{st}}} \delta q^*_k = 0, \tag{24.8}$$

cu consecințele

$$Q^*_{c_{k_{st}}} = -\left(\frac{\partial V^*}{\partial q^*_k}\right)_{q^*=q_{st}=0} = 0, \tag{24.9}$$

r fiind numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant considerat, a cărui poziție de echilibru static este determinată prin valorile $q^*_{k_{st}} = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ ale parametrilor lagrangeieni.

Condițiile (24.36) exprimă însă faptul că poziția de echilibru static a unui sistem mecanic conservativ este caracterizată printr-un extremum al funcției potențiale totale generalizate.

Legătura dintre tipul de extremum — maxim, sau minim — al funcției potențiale generalizate și dintre tipul de echilibru — stabil, sau nestabil — al sistemului vibrant este furnizată de

— *Teorema Lejeune-Dirichlet*, avînd următorul enunț: ***dacă pentru poziția de echilibru a unui sistem mecanic conservativ funcția potențială generalizată are valoare minimă, atunci echilibrul sistemului este stabil.***

Pentru a demonstra teorema, se vor considera coordonatele lagrangeiene ale sistemului mecanic drept coordonate ale unui punct figurativ P, în mișcare în *spațiul configurațiilor r-dimensional* asociat sistemului mecanic, stabilindu-se astfel o corespondență biunivocă între mișcarea reală a sistemului vibrant și între mișcarea punctului figurativ $P(q^*_1, q^*_2, \ldots, q^*_r)$ în raport cu un reper r-ortogonal $\Omega^* q^*_1 q^*_2 \ldots q^*_r$, atașat spațiului configurațiilor,

În modul acesta, în timp ce sistemul mecanic va executa oscilații în jurul poziției de echilibru stabil, cu coordonatele generalizate

$$q^*_k = q_{k_{st}} + w_k = w_k = w_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{24.37}$$

nedepășind un interval de variație $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, cu $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar de mic, punctul $P(q^*)$ se va deplasa în interiorul unui hipercub cu centrul în originea Ω a reperului asociat spațiului configurațiilor și cu

muchiile egale cu 2ε, astfel că demonstrarea teoremei Lejeune-Dirichlet se va reduce în fond la demonstrarea imposibilității depășirii de către punctul figurativ a granițelor acestui hipercub, pentru valori inițiale condiționate însă, evident, atît ale parametrilor lagrangeieni, cît și ale vitezelor generalizate.

Se va considera deci, conform enunțului teoremei Lejeune-Dirichlet, că valoarea funcției potențiale corespunzătoare poziției de echilibru static a sistemului vibrant, $V^*_{st} = V^*(q^*)_{q^*=0}$, este minimă, această valoare minimă putînd fi aleasă, în particular, chiar ca valoare zero, adică se poate lua

$$V^*_{min} = V^*(q^*)_{q^*=0} = 0, \tag{24.10}$$

dat fiind faptul că funcția potențială este determinată pînă la o constantă aditivă.

În acest caz va exista totdeauna — funcția $V^*(q^*)$ fiind continuă — un interval $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, cu $\varepsilon > 0$, de variație a coordonatelor lagrangeiene, astfel încît pentru

$$-\varepsilon \leqslant q^*_k \leqslant +\varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{24.11}$$

să rezulte

$$V^*(q^*_k) > 0. \tag{24.12}$$

Ultima condiție va fi satisfăcută, în consecință, și în cazul cînd numai una dintre coordonatele generalizate, de exemplu, q^*_h, va lua una dintre valorile extreme ale intervalului menționat, adică

$$|q^*_h| = \varepsilon, \tag{24.13}$$

celelalte coordonate luînd valori situate în interiorul intervalului

$$|q^*_k| < \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, h-1, \ h+1, \ldots, r). \tag{24.14}$$

Este evident că valoarea funcției potențiale corespunzătoare acestei situații, notată

$$V^*_{(h)} = V^*(q_k) < \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, r, \ q^*_h = \varepsilon) \tag{24.15}$$

va depinde de coordonata q^*_h care a luat valoarea extremă ε; în consecință, între toate valorile posibile $V_{(h)}$, $(h = 1, 2, \ldots, r)$, obținute făcînd ca, pe rînd, una dintre coordonatele generalizate să ia valoarea extremă ε, celelalte rămînînd în intervalul $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, va

exista una, corespunzătoare unei anumite coordonate q_l^*, care va avea cea mai mică valoare dintre toate, adică se va putea scrie condiția

$$V_{(l)}^* < V_{(h)}^*, \quad (h = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, r). \tag{24.16}$$

Se înțelege acum ușor că o concluzie de forma

$$V^* > V_{(l)}^* \tag{24.17}$$

va putea indica atît situația caracterizată prin condițiile (23.41) și (23.42), corespunzînd cazului cînd punctul figurativ $P(q^*)$ nu va depăși granițele hipercubului de muchii 2ε, cît și situația caracterizată prin condiția

$$|q_k^*| > \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.18}$$

corespunzătoare cazului cînd punctul figurativ $P(q^*)$ va depăși aceste granițe.

În schimb concluzia

$$V^* < V_{(l)}^* \tag{24.19}$$

va corespunde, categoric numai situației

$$|q_k^*| < \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.20}$$

adică, în acest ultim caz, punctul figurativ $P(q^*)$ nu va ieși din interiorul hipercubului menționat și deci mișcarea sistemului mecanic este o mișcare vibratorie în jurul poziției de echilibru stabil.

Cu aceste observații, se va putea reveni la demonstrarea teoremei Lejeune-Dirichlet.

Considerînd, în continuare, numai cazul unui sistem mecanic conservativ, ($Q_{d_k}^* = Q_{ex_k}^* \equiv 0$), se va fixa un interval de variație a parametrilor lagrangeieni, $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, suficient de mic astfel încît pentru

$$|q_k^*| \leqslant \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.21}$$

să rezulte condiția

$$V^*(q^*) > 0, \tag{24.22}$$

funcția $V^*(q^*)$ luînd valoarea $V_{(h)}^*$, $(h = 1, 2, \ldots, r)$ atunci cînd numai coordonata q_h^* capătă una din valorile extreme $\pm\varepsilon$ ale intervalului,

Scanned with CamScanner

toate celelalte coordonate luînd valori în interiorul intervalului; de asemenea, se va nota și acum cu $V^*_{(l)}$ cea mai mică dintre valorile $V^*_{(h)}$, $(h = 1, 2, \ldots, r)$.

Punerea în stare de mișcare vibratorie a unui asemenea sistem mecanic conservativ se poate face, în cazul general, atît prin deplasarea lui din poziția de echilibru static într-o poziție inițială oarecare, determinată prin valorile

$$q_k^{*0} = w_k^0, \ (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{24.23}$$

ale parametrilor lagrangeieni, acestei poziții inițiale corespunzîndu-i valoarea inițială

$$V^{*0} = V^*(q^{*0}) = V^*(w^0) \tag{24.24}$$

a funcției potențiale generalizate, cît și prin imprimarea unor viteze generalizate inițiale

$$\dot{q}_k^* = \dot{w}_k^0, \ (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.25}$$

cărora le va corespunde energia cinetică inițială

$$\mathscr{E}^{*0} = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} a_{hj}\,\dot{q}_h^{*0}\,\dot{q}_j^{*0} = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} a_{hj}\,\dot{w}_h^0\,\dot{w}_j^0. \tag{24.26}$$

Se va arăta acum că în cazul cînd mărimile inițiale V^{*0} și $\mathscr{E}^{*0}$ satisfac condițiile

$$V^{*0} < \frac{V^*_{(l)}}{2}; \quad \mathscr{E}^{*0} < \frac{V^*_{(l)}}{2} \tag{24.27}$$

— condiții totdeauna realizabile —, atunci evoluția ulterioară a sistemului vibrant va avea loc cu respectarea condiției (24.19) dovedindu-se astfel caracterul stabil al poziției de echilibru static.

Într-adevăr, în condițiile precizate, mișcarea ulterioară a sistemului mecanic conservativ se va desfășura în concordanță cu integrala energiei, adică se va putea scrie

$$\mathscr{E}^* + V^* = h = \mathscr{E}^{*0} + V^{*0}. \tag{24.28}$$

Întrucît energia cinetică este însă o mărime pozitiv definită, va rezulta, din relația precedentă, condiția

$$\mathscr{E}^{*0} + V^{*0} - V^* = \mathscr{E}^* > 0$$

și deci, avînd în vedere și ipotezele (24.27), se va putea scrie condiția

$$V^* < \mathscr{E}^{*0}_0 + V^{*0} < V^*_{(l)}, \tag{24.29}$$

ultima relație dovedind că punctul figurativ $P(q^*)$ nu depășește granițele hipercubului de muchii 2ε și că, în consecință, sistemul mecanic nu se îndepărtează nelimitat de poziția sa de echilibru static.

S-a demonstrat astfel că poziția de echilibru static a unui sistem mecanic conservativ, caracterizată prin valoare minimă a funcției potențiale generalizate din care derivă forțele generalizate ce solicită sistemul, este poziție de echilibru stabil, confirmîndu-se cu aceasta și enunțul teoremei lui Lejeune-Dirichlet asupra stabilității echilibrului.

Valabilitatea concluziei precedente a fost demonstrată, evident pentru sistemele vibrante conservative ($Q^*_{d_k} = Q^*_{ex_k} \equiv 0$; $k=1, 2, \ldots, r$) ; este însă ușor de înțeles că ea se extinde și la cazul cînd, pe lîngă solicitările conservative, se iau în considerație și solicitările disipative, care dau lucru mecanic rezistent, provocînd deci pierderi de energie mecanică.

Într-adevăr, în aceste condiții, teorema energiei sub forma diferențială capătă forma

$$d\mathscr{E}^* = -dV^* + d\mathscr{L}_d = -dV^* - |d\mathscr{L}_d|,$$

ei corespunzîndu-i, prin integrare, relația

$$\mathscr{E}^* - \mathscr{E}^{*0} = -(V^* - V^{*0}) - |\mathscr{L}_d|,$$

sau încă

$$\mathscr{E}^* = \mathscr{E}^{*0} + V^{*0} - |\mathscr{L}_d| - V^* > 0, \tag{24.30}$$

$\mathscr{L}_d = -|\mathscr{L}_d| < 0$ fiind lucrul mecanic al solicitărilor disipative, cu modul crescător în timp.

Din ultima relație rezultă că în această din urmă situație condiția (24.19) este satisfăcută într-o măsură și mai mare; mai mult, faptul că diferența $(\mathscr{E}^{*0} + V^{*0} - |\mathscr{L}_d|)$ tinde către zero prin creșterea lucrului mecanic rezistent al solicitărilor disipative, arată că și intervalul de variație a lui $V^*(q^*)$ va tinde, cu timpul, către zero, adică

sistemul va tinde să se oprească în poziția sa de echilibru static, mișcarea vibratorie a sa devenind deci *amortizată*.

Se înțelege însă că această concluzie privind caracterul stabil al poziției de echilibru static corespunzătoare valorii minime a funcției potențiale nu mai este totdeauna valabilă dacă se iau în considerație și forțele generalizate de excitație, deoarece există tipuri de solicitări perturbatoare care pot provoca îndepărtarea nelimitată a sistemului vibrant de poziția sa de echilibru static, după cum există și tipuri de solicitări perturbatoare care întrețin mișcarea alternativă stabilă a sistemului vibrant în jurul poziției de echilibru static.

În lucrarea de față se va lua în considerație numai această din urmă situație, cazurile de mișcări instabile — pentru care, de altfel, nu mai sînt valabile nici aproximările făcute în expresiile energiei și forțelor generalizate conservative — fiind menționate doar în măsura în care vor putea fi trase unele concluzii privind posibilitățile de identificare a prezenței lor într-un fenomen vibratoriu și, mai ales, de evitare a apariției lor.

Revenind la expresiile forțelor generalizate conservative în cazul vibrațiilor în jurul poziției de echilibru stabil, se va observa că prin dezvoltarea și acum a funcției potențiale generalizate în serie Mac Laurin în jurul valorilor $q_k^* = q_{k_{st}}^* = 0$ ale parametrilor lagrangeieni — valori care determină poziția de echilibru static a sistemului vibrant —, se obține relația

$$V^*(q^*) = V^*(w) = V^*(q^*)_{/q^*=0} + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial V^*}{\partial q_j^*} \right)_{/q^*=0} w_j +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial q_h^* \partial q_j^*} \right)_{/q^*=0} w_h w_j + \ldots,$$

sau încă, avînd în vedere condiția (24.10) precum și condițiile (24.9) care caracterizează poziția de echilibru static a sistemului vibrant și introducînd notațiile

$$\left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial q_h^* \partial q_j^*} \right)_{q^*=0} = \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_h \partial w_j} \right)_{w=0} = c_{hj} = c_{jh}, \qquad (24.31)$$

$$(h, j = 1, 2, \ldots, r)$$

— coeficienții c_{hj} reprezentînd acum niște constante —, se mai poate scrie, în cadrul gradului de aproximare adoptat, următoarea expresie pentru funcția potențială generalizată

$$\boxed{V^* = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} c_{hj} w_h w_j.} \tag{24.32}$$

Forțele generalizate conservative derivind din această funcție potențială vor fi date deci de relațiile

$$Q^*_{c_k} = -\frac{\partial V^*}{\partial q^*_k} = -\frac{\partial V^*}{\partial w_k} = -\frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} c_{hj}\frac{\partial w_h}{\partial w_k} w_j - \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} c_{hj} w_h \frac{\partial w_j}{\partial w_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

sau încă, observînd că derivatele parțiale $\frac{\partial w_h}{\partial w_k}$ și $\frac{\partial w_j}{\partial w_k}$ au, datorită independenței, între ei, a parametrilor lagrangeieni $q^*_k = w_k$, valorile 1 pentru $h = j = k$ și valorile zero pentru $h = j \neq k$ — ceea ce înseamnă că în sumele după h, respectiv j, rămîn numai termenii pentru care $h = k$, respectiv $j = k$ —, se mai poate scrie

$$Q^*_{c_k} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} c_{kj} w_j - \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{r} c_{hk} w_h.$$

Este suficient să se observe acum că cele două grupuri de termeni, care diferă între ei doar prin notația indicelui de sumare, sînt identice, pentru a se obține astfel expresia finală a forțelor generalizate conservative în cazul vibrațiilor în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant conservativ:

$$\boxed{Q^*_{c_k} = -\sum_{h=1}^{r} c_{kh} w_h \quad (k = 1, 2, \ldots, r)}, \tag{24.33}$$

Coeficienții c_{hj}, $(h, j = 1, 2, \ldots, r)$ definiți prin relațiile (24.31) vor reprezenta *caracteristicile dinamice generalizate conservative ale siste-*

Scanned with CamScanner

mului mecanic ce execută vibrații în jurul poziției de echilibru stabil și ei vor forma o matrice pătratică și simetrică ($c_{hj} = c_{jh}$; $h, j = 1, 2, \ldots, r$), notată

$$\mathbf{C} = \| c_{hj} \| = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1j} \ldots c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2j} \ldots c_{2r} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{h1} & c_{h2} \ldots c_{hj} \ldots c_{hr} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} \ldots c_{rj} \ldots c_{rr} \end{Vmatrix} \tag{24.34}$$

și numită, în continuare, *matricea caracteristicilor dinamice generalizate conservative* ; în cazul cînd solicitările conservative sînt de natură elastică, mărimile c_{hj} se mai numesc *coeficienți de rigiditate*, iar matricea **C** mai este numită, în literatura de specialitate, *matricea de rigiditate a sistemului vibrant*, ultimele denumiri fiind justificate de definirea rigidității ca raport dintre solicitarea elastică și deformația pe care o provoacă.

Condiția (24.22), scrisă acum sub forma

$$V^* = \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{r} c_{hj} w_h w_j > 0, \tag{24.35}$$

arată că și matricea **C** este nesingulară, adică se poate scrie

$$\det \mathbf{C} \neq 0. \tag{24.36}$$

Ansamblul forțelor generalizate conservative formează o matrice coloană de forma

$$\mathbf{Q}_c^* = \| Q_{c_1}^* Q_{c_2} \ldots Q_{c_h} \ldots Q_{c_k} \|^T. \tag{24.37}$$

numită *matricea forțelor generalizate conservative* ; este ușor de verificat, ținînd seama și de expresiile (24.33) ale acestor forțe, că prin introducerea matricelor (24.25) și (24.34), matricea forțelor generalizate conservative va putea fi exprimată sub forma

$$\boxed{\mathbf{Q}_c^* = -\mathbf{C}\mathbf{w}}\,. \tag{24.38}$$

În cele ce urmează, vor fi stabilite expresiile concrete de calcul al caracteristicilor dinamice generalizate corespunzătoare celor două tipuri uzuale de solicitări conservative, gravifice și elastice.

1°. **Caracteristicile dinamice generalizate corespunzătoare solicitărilor gravifice.** În legătură cu solicitările gravifice—greutățile și momentele lor in raport cu poli care nu coincid cu centrele de masă ale elementelor sistemelor vibrante —, trebuie de făcut mai intii precizarea că in multe situații ele nu apar in ecuațiile diferențiale ale mișcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice, datorită faptului că sînt echilibrate de componentele statice ale solicitărilor elastice. Astfel, in cazul sistemului vibrant cu două grade de libertate din fig. 24.1, a,

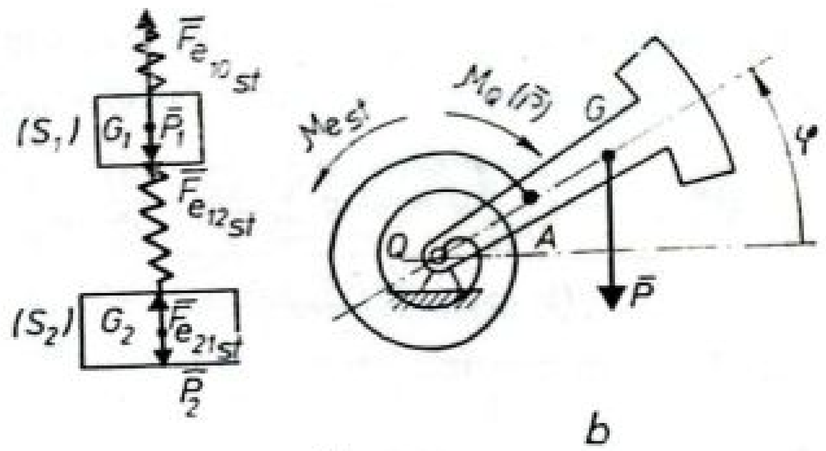


Fig. 24.1.

greutățile și forțele elastice statice care acționează asupra celor două elemente vor dispare din ecuațiile de mișcare, datorită condițiilor de echilibru static

$$\overline{P}_1 + \overline{F}_{e_{1st}} + \overline{F}_{e_{12st}} = 0; \quad \overline{P}_2 + \overline{F}_{e_{21st}} = 0.$$

De asemenea, in cazul sistemului vibrant cu un singur grad de libertate din fig. 23.4, b, momentul greutății față de punctul teoretic de articulație și momentul elastic static al cuplului exercitat de arcul spiral (As), vor dispare din ecuația diferențială a mișcării de rotație in jurul axei fixe ce trece prin punctul Q, datorită condiției de echilibru static

$$\overline{\mathcal{M}}_{e_{st}} + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{P}) = 0.$$

Scanned with CamScanner

Trebuie de menționat însă faptul că vor putea fi întîlnite și situații cînd în ecuațiile de mișcare vor apare solicitările grafivice, pentru care vor trebui calculate deci expresiile caracteristicilor dinamice generalizate corespunzătoare.

Considerînd, mai întîi, cazul mișcărilor vibratorii spațiale, se va alege, ca de obicei, reperul fix cu axa Oz orientată pe verticală și în sus,. iar polii invariabil legați de elementele (S_i) vor fi aleși în centrele de masă G_i ale acestora. În aceste condiții, $(\bar{P}_i = -M_i g \bar{k}$ și $\mathfrak{M}_{G_i}(\bar{P}_i) = 0)$, funcția potențială corespunzătoare solicitărilor grafivice va avea expresia stabilită în dinamica sistemelor mecanice, adică

$$V_g^* = -U_g^* = g \sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i} + \text{const.}, \tag{24.39}$$

cu z_{G_i} funcții de coordonatele generalizate ale sistemului.

Forțele generalizate gravifice vor avea deci expresiile

$$Q_{g_k}^* = -\frac{\partial V_g^*}{\partial q_k^*} = -g \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*}. \tag{24.40}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

În cazul unui sistem mecanic cu r grade de libertate executînd vibrații în jurul poziției sale de echilibru stabil, poziție determinată prin valorile $q_{k_{st}}^* = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, r)$, ale parametrilor lagrangeieni, dezvoltarea în serie Mac Laurin a derivatei parțiale $\dfrac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*}$ va lua forma

$$\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*} = \left(\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*}\right)_{q^*=0} + \sum_{h=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 z_{G_i}}{\partial q_k^* \partial q_h^*}\right)_{q^*=0} w_h. \tag{24.41}$$

Introducînd ultimele expresii în relațiile (24.40), acestea din urmă vor lua formele

$$Q_{g_k}^* = -g \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*}\right)_{q^*=0} - g \sum_{i=1}^{n} M_i \left[\sum_{h=1}^{r} \left(\frac{\partial^2 z_{G_i}^*}{\partial q_k^* \partial q_h^*}\right)_{q^*=0} w_h\right] =$$

$$= -g \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k^*}\right)_{q^*=0} - \sum_{h=1}^{r} \left[g \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{\partial^2 z_{G_i}}{\partial q_k^* \partial q_h^*}\right)_{q^*=0}\right] w_h. \tag{24.42}$$

Scanned with CamScanner

Primul termen din membrul drept al acestor relații reprezintă forțele generalizate gravifice statice

$$Q^*_{g_{k_{st}}} = -g \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q^*_k} \right)_{q^*=0}, \qquad (24.43)$$

iar coeficienții parametrilor lagrangeieni $q^*_k = w_k$ din cel de-al doilea grup de termeni, adică

$$\boxed{c_{kh} = -g \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{\partial^2 z_{G_i}}{\partial q^*_k \partial q^*_h} \right)_{q^*=0}}, \qquad (24.44)$$

vor reprezenta *caracteristicile dinamice generalizate gravifice ale sistemului vibrant* considerat.

În baza relațiilor (24.42) și (24.44), expresiile (24.44) ale forțelor generalizate gravifice vor putea fi scrise sub forma

$$\boxed{Q^*_{g_k} = Q^*_{g_{k_{st}}} - \sum_{h=1}^{r} c_{kh} w_h}, \qquad (24.45)$$

respectiv sub forma concentrată matriceală

$$\boxed{\mathbf{Q}^*_g = \mathbf{Q}^*_{g_{st}} - \mathbf{C}\mathbf{w}}, \qquad (24.46)$$

unde $\mathbf{Q}^*_g$ și $\mathbf{Q}^*_{g_{st}}$ sînt matricele coloană

$$\mathbf{Q}^*_g = \| Q^*_{g_1} \ldots Q^*_{g_k} \ldots Q^*_{g_r} \|^T ; \; \mathbf{Q}^*_{g_{st}} = \| Q^*_{g_{1_{st}}} \ldots Q^*_{g_{k_{st}}} \ldots Q^*_{g_{r_{st}}} \|^T. \quad (24.47)$$

Considerînd, in continuare, cazul sistemului vibrant plan, executînd mișcări vibratorii în plan vertical și alegînd acest plan ca plan de coordonate Oxy, cu axa Ox orientată pe verticală și în jos, ($\overline{P}_i = M_i g \overline{i}$; $\overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\overline{P}_i) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_i}(\overline{P}_i) = -M_i g a_i \sin \varphi_i \overline{k}$), (fig. 24.2), este ușor de verificat — efectuînd calculul lucrului mecanic elementar al solicitărilor gravi-

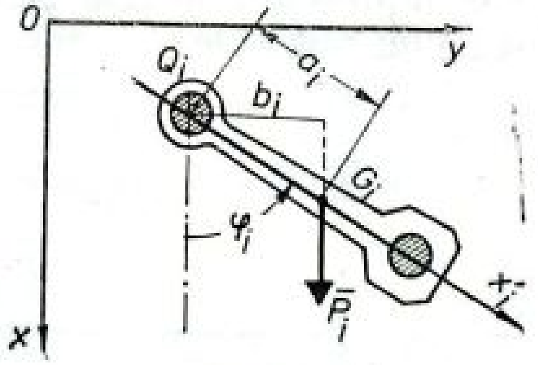


Fig. 24.2.

fice așa cum a fost prezentat în dinamica sistemelor de rigide — că expresia funcției potențiale gravifice corespunzătoare acestei situații va avea forma

$$V_g^* = -U_g^* = -g\sum_{i=1}^{n} M_i(x_{G_i} + a_i \cos\varphi_i) + \text{const}, \qquad (24.48)$$

cu parametrii de poziție x_{Q_i} și φ_i funcții de coordonatele lagrangeiene $q_k^* = w_k$.

Forțele generalizate gravifice vor avea în această situație expresiile

$$Q_{g_k}^* = -\frac{\partial V^*}{\partial q_k^*} = -g\sum_{i=1}^{n} M_i\left[\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k^*} - a_i \sin\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*}\right], \qquad (24.49)$$

cu următoarea dezvoltare în serie Mac Laurin a termenilor din paranteză în jurul valorilor $q_k^* = 0$

$$\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k^*} - a_i \sin\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*} = \left[\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k^*} - a_i \sin\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*}\right]_{q^*=0} +$$
$$+\sum_{h=1}^{r}\left[\frac{\partial^2 x_{Q_i}}{\partial q_k^* \partial q_h^*} - a_i\left(\cos\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h^*} + \sin\varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_k^* \partial q_h^*}\right)\right]_{q^*=0} w_h. \qquad (24.50)$$

Înlocuind aceste expresii în relația (22.115), observînd că grupul de termeni

$$Q_{g_{k_{st}}}^* = -g\sum_{i=1}^{n} M_i\left[\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k^*} - a_i \sin\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*}\right]_{q^*=0} \qquad (24.51)$$

vor reprezenta forțele generalizate gravifice statice și introducînd și acum notațiile

$$\boxed{c_{kh} = g\sum_{i=1}^{n} M_i\left[\frac{\partial^2 x_{Q_i}}{\partial q_k^* \partial q_h^*} - a_i\left(\cos\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h^*} + \sin\varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_k^* \partial q_h^*}\right)\right]_{q^*=0}, \quad (k, h = 1, 2, \ldots, r),} \qquad (24.52)$$

pentru caracteristicile dinamice generalizate gravifice corespunzătoare acestei situații, vor rezulta din nou expresiile (24.45) pentru forțele generalizate gravifice corespunzătoare unei poziții determinate prin parametrii lagrangeieni $q_k^* = w_k$, a sistemului vibrant, respectiv expresia concentrată matriceală (23.74).

În cazul cînd polii Q_i coincid cu centrele de masă G_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, expresiile (24.51) și (24.52) vor lua formele simplificate

$$\boxed{Q^*_{g_{k_{st}}} = -g\sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k^*}\right)_{q^*=0}}, \tag{24.53}$$

respectiv

$$\boxed{c_{kh} = g\sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{\partial^2 x_{G_i}}{\partial q_k^*\partial q_h^*}\right)_{q^*=0}}, \tag{24.54}$$

iar dacă toate elementele sistemului vibrant sînt asimilabile cu puncte materiale, expresiile mărimilor $Q^*_{g_{k_{st}}}$ și c_{kh} vor fi scrise sub formele

$$\boxed{Q^*_{g_{k_{st}}} = -g\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k^*}\right)_{q^*=0}}, \tag{24.55}$$

respectiv

$$\boxed{c_{kh} = g\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k^*\partial q_h^*}\right)_{q^*=0}}. \tag{24.56}$$

În legătură cu forțele generalizate gravifice statice se mai face precizarea că în cazul cînd greutățile corpurilor sînt singurele solicitări active aplicate sistemului vibrant și legăturile pasive la care este supus sistemul sînt toate cu frecări neglijabile, vor rezulta condițiile

$$Q^*_{g_{k_{st}}} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.57}$$

drept consecințe ale principiului deplasărilor virtuale aplicat la statică.

Scanned with CamScanner

2°. **Caracteristicile dinamice generalizate corespunzătoare solicitărilor elastice.** După cum s-a arătat în dinamica sistemelor de rigide, solicitările elastice — forţele şi momentele cuplurilor elastice — acţionează asupra unui sistem mecanic la deformarea legăturilor elastice aplicate fie între elementele sistemului vibrant (legături active interioare), fie între aceste elemente şi alte corpuri din mediul înconjurător care nu aparţin sistemului mecanic (legături active exterioare). Toate aceste legături active sînt realizate practic prin arcuri elicoidale — deformate la întindere şi comprimare —, prin bare elastice — deformate prin încovoiere —, prin arcuri spirale şi tije elastice — deformate prin torsionare —, primele două tipuri de legături elastice dezvoltînd, prin deformare, forţe elastice, iar ultimele două tipuri dezvoltînd cupluri elastice.

În cele ce urmează vor fi stabilite expresiile concrete ale caracteristicilor dinamice generalizate corespunzătoare solicitărilor elastice dezvoltate de fiecare din cele patru tipuri de legături elastice menţionate.

a) *Caracteristicile dinamice generalizate corespunzătoare forţelor elastice dezvoltate prin deformarea arcurilor elicoidale.* Se adoptă, de la început chiar, convenţia ca notarea arcului elicoidal care leagă între ele două elemente (S_i) şi (S_j) ale unui sistem mecanic să se facă prin simbolurile $(A_{eij}) \equiv (A_{eji})$, iar extremităţile arcului să fie notate cu literele A_{ij} şi A_{ji}, aceste extremităţi coincizînd chiar cu punctele teoretice de legătură ale arcului cu cele două elemente pe care le cuplează elastic; de asemenea, se va nota cu $(\Delta_{ij}) \equiv (\Delta_{ji})$ axa arcului elicoidal (fig. 24.3, a).

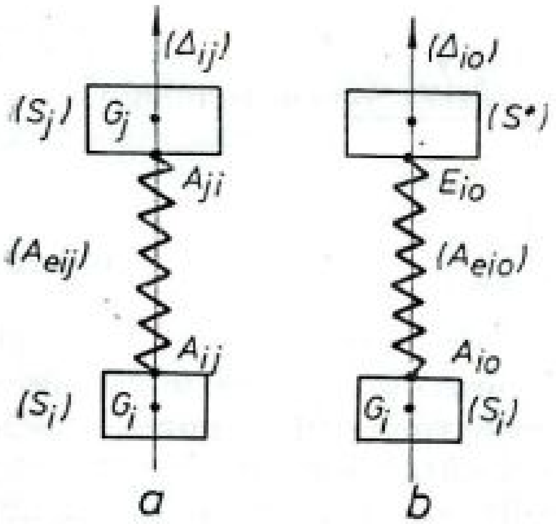


Fig. 24.3.

În cazul cînd unul din cele două corpuri legate prin arcul elicoidal nu aparţine sistemului vibrant, ci mediului înconjurător, indicele corespunzător lui va fi înlocuit cu indicele 0 (zero), iar punctul teoretic de legătură cu acest element exterior sistemului mecanic va fi notat cu litera E, cu doi indici inferiori, unul 0 indicînd mediul exterior, iar al doilea coincizînd cu indicele elementului legat

cu exteriorul. Astfel, de exemplu, simbolul $(Ae_{i0}) \equiv (Ae_{0i})$ va indica că elementul (S_i) al sistemului vibrant este legat prin arc elicoidal de un corp exterior sistemului, punctele de legătură fiind notate acum cu A_{i0} la elementul (S_i) și cu E_{i0} la corpul din mediul exterior (fig. 24.3, b).

Ipoteza deformării numai prin întindere și comprimare a unui arc elicoidal implică și păstrarea în permanență a formei rectilinii a axei arcului; mai mult, în majoritatea covîrșitoare a situațiilor întîlnite în aplicațiile practice, această axă este considerată chiar fixă în spațiu, acceptarea ultimei ipoteze simplificatoare fiind justificată de faptul că elementele (S_i) ale sistemelor vibrante execută, în general, mișcări oscilatorii plan-paralele, rezultînd din translații oscilatorii rectilinii efectuate în lungul unei axe (Δ_{Q_i}), — a cărei direcție este luată, de regulă, ca direcție a axei fixe Ox — și din mișcări oscilatorii de rotație, de amplitudini foarte mici ale variațiilor $(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})$ ale unghiurilor de rotație, astfel încît modificarea poziției axei (Δ_{ij}) a arcului elicoidal (Ae_{ij}), care leagă elementul (S_i) de elementul (S_j), (fig. 24.4), să poată fi considerată, practic, neglijabilă. Trebuie de făcut însă mențiunea că cel mai adesea mișcările vibratorii ale elementelor sînt fie numai translații rectilinii, fie numai rotații în jurul unor axe fixe.

Considerînd, în cele ce urmează, numai cazurile sistemelor vibrante plane, cu elementele executînd fie numai translații rectilinii, (fig. 24.5, a), fie numai rotații în jurul unor axe fixe trecînd prin polii Q_i și normale la planul sistemului vibrant, (fig. 24.5, b), se va alege acest plan ca plan de coordonate fix Oxy, cu axa Ox orientată în direcția axei — direcție considerată fixă și practic aceeași — a arcurilor elicoidale (Ae_{ij}), (fig. 24.5, a și b).

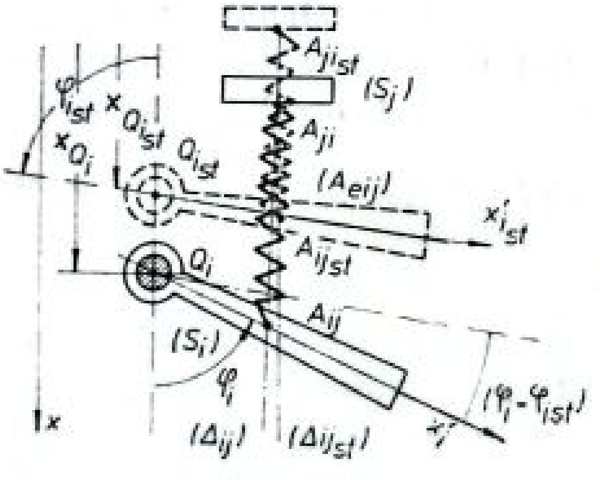


Fig. 24.4

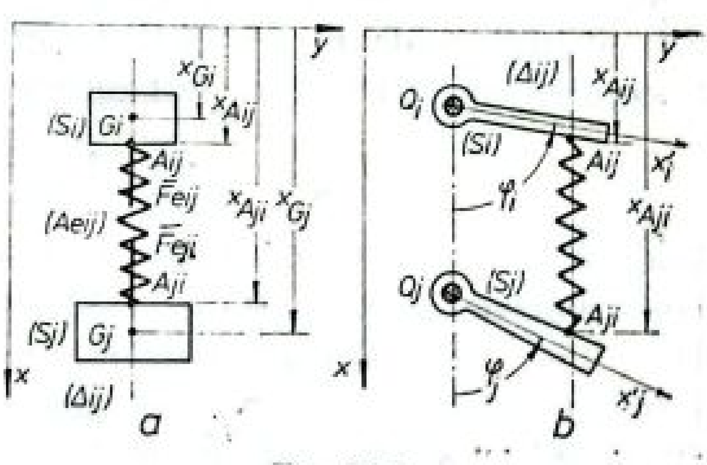


Fig. 24.5

În ipotezele de lucru adoptate, poziția unui element (S_i) al sistemului vibrant va fi determinată, după caz, fie prin abscisa x_{Q_i} a polului Q_i, (fig. 24.5, a), fie prin unghiul de rotație φ_i, (fig. 24.5, b), variațiile acestor parametri de poziție ai elementelor cuplate elastic fiind independente între ele, ceea ce înseamnă că toți acești parametri de poziție — sau anumite funcții liniar independente de aceștia — vor figura între coordonatele lagrangeiene ale sistemului vibrant.

Dacă (Ae_{ij}) este arcul elicoidal de legătură între elementul (S_i) și elementul (S_j) al sistemului vibrant și axa Ox a reperului fix, la care este raportată poziția sistemului vibrant, este luată după o paralelă la axa (Δ_{ij}) a arcului, atunci, notind cu $x_{A_{ij}}$ și $x_{A_{ji}}$ abscisele punctelor de legătură a arcului cu cele două elemente cuplate prin el într-un moment oarecare și cu $x^0_{A_{ij}}$ și $x^0_{A_{ji}}$ abscisele acelorași puncte într-o poziție a arcului în care acesta ar fi nedeformat, pentru valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{i}$ al axei Ox, a deformației axiale — relativă la elementul (S_j) — a arcului poate fi scrisă expresia

$$\Delta L_{ji} = (x_{A_{ji}} - x_{A_{ij}}) - (x^0_{A_{ji}} - x^0_{A_{ij}}), \tag{24.58}$$

semnul (+) al acestei diferențe indicînd o întindere a arcului, iar semnul (—) o comprimare, în cazul cînd succesiunea de la elementul (S_i) la elementul (S_j) se face în sensul pozitiv al axei Ox (fig. 24.5).

Cercetările experimentale efectuate asupra forțelor dezvoltate prin deformarea arcurilor elicoidale au arătat că valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{i}$, a forței elastice dezvoltată de arcul elicoidal asupra unuia din elemente, de exemplu asupra elementului (S_j), are semnul contrar semnului deformației relative la acest element a arcului, ea satisfăcînd, într-un caz mai general, o relație de forma

$$F_{e_{ji}} = -k_{e_{ij}}\,[1 + \gamma_{ji}(\Delta L_{ji})^2]\,\Delta L_{ji}, \tag{24.59}$$

unde $k_{e_{ji}} = k_{e_{ij}}$ este *constanta elastică* a arcului, depinzînd de datele constructive și de calitatea oțelului din care este construit arcul, iar $\gamma_{ji} = \gamma_{ij}$ este o constantă, care poate avea valori pozitive, negative, sau chiar valoarea zero, depinzînd, în afară de caracteristicile constructive și de calitatea oțelului, și de modul de solicitare a arcului și purtînd numele de *coeficient de cuplaj axial neliniar*.

Scanned with CamScanner

În funcție de valoarea acestui coeficient de cuplaj, pot fi întîlnite următoarele tipuri de cuplaje elastice axiale:

— *cuplajul elastic axial tare*, caracterizat prin condiția

$$\gamma_{ji} > 0 \tag{24.60}$$

și pentru care graficul variației mărimii forței în funcție de deformația axială are forma din fig. 24.6, a;

— *cuplajul elastic axial slab*, corespunzător condiției

$$\gamma_{ji} < 0, \tag{24.61}$$

cu graficul variației mărimii forței elastice în funcție de deformația axială avînd forma din fig. 24.6, b;

— *cuplajul elastic axial liniar*, în condiția

$$\gamma_{ji} = 0, \tag{24.62}$$

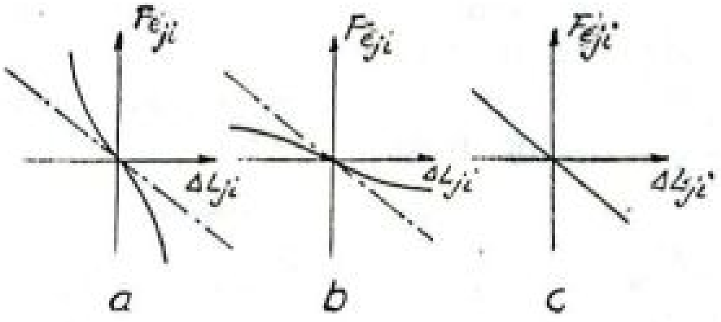


Fig. 24.6.

pentru care graficul $\bar{F}_{e_{ji}} = f(\Delta L_{ji})$ are forma din fig. 24.6, c.

Luînd în considerație, în continuare, numai această din urmă situație, ea fiind cel mai des întîlnită în tehnica vibrațiilor, va rezulta următoarea expresie a valorii scalare, raportată la versorul $\bar{i}$ al axei Ox, a forței elastice $\bar{F}_{e_{ji}}$

$$F_{e_{ji}} = -k_{e_{ji}}[(x_{A_{ji}} - x_{A_{ij}}) - (x^0_{A_{ji}} - x^0_{A_{ij}})], \tag{24.63}$$

cu următoarea valoare în cazul echilibrului static al sistemului vibrant, cînd punctele A_{ij} și A_{ji} au pozițiile $A_{ij_{st}}$ și $A_{ji_{st}}$ cunoscute,

$$F_{e_{ji_{st}}} = -k_{e_{ji}}[(x_{A_{ji_{st}}} - x_{A_{ij_{st}}}) - (x^0_{A_{ji}} - x^0_{A_{ij}})]. \tag{24.64}$$

Eliminarea, între ultimele două relații a termenului $k_{e_{ji}}(x^0_{A_{ji}} - x^0_{A_{ij}})$, — de regulă necunoscut în cazul unui sistem vibrant montat și în funcțiune —, conduce la următoarea expresie finală a valorii scalare, raportată la versorul $\bar{i}$, a forței elastice $\bar{F}_{e_{ji}}$

$$\boxed{F_{e_{ji}} = -k_{e_{ji}}[(x_{A_{ji}} - x_{A_{ji_{st}}}) - (x_{A_{ij}} - x_{A_{ij_{st}}})] + F_{e_{ji_{st}}}} \cdot \tag{24.65}$$

Scanned with CamScanner

Se înțelege că, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, valoarea scalară — raportată la același versor $\bar{i}$ — a forței elastice $\bar{F}_{e_{ij}}$, exercitată de arc asupra elementului (S_i), va fi de semn contrar, adică se va putea scrie

$$\boxed{F_{e_{ij}} = -F_{e_{ji}} = -k_{e_{ij}}[(x_{A_{ij}} - x_{A_{ij_{st}}}) - (x_{A_{ji}} - x_{A_{ji_{st}}})] + F_{e_{ij_{st}}}}. \tag{24.66}$$

În cazul cînd elementul (S_i) este legat prin arc elicoidal de un corp din mediul exterior, $(A_{ih} \to E_{i_0};\ x_{A_{ih}} \to x_{E_{i_0}}(t)$ etc.). expresia (24.66) a valorii scalare a forței elastice, notată acum cu simbolul $F_{e_{i_0}}$, va lua forma

$$\boxed{F_{e_{i_0}} = [-k_{e_{i_0}}(x_{A_{i_0}} - x_{A_{i_{0st}}}) + F_{e_{i_{0st}}}] + k_{e_{i_0}}(x_{E_{i_0}} - x_{E_{i_{0st}}}) = F_{e_{i_{0c}}} + F_{ex_{i_0}}} \tag{24.67}$$

primul grup de termeni, notat cu simbolul $F_{e_{i_{0c}}}$, reprezentînd valoarea scalară a componentei conservative a forței elastice, iar termenul

$$F_{ex_{i_0}} = k_{e_{i_0}}(x_{E_{i_0}} - x_{E_{i_{0st}}}) = F_{ex_{i_0}}(t) \tag{24.68}$$

jucînd rol de forță activă de excitație, el fiind o funcție cunoscută de timp, cel mai adesea periodică.

În ceea ce privește constanta elastică, ea se determină fie experimental, fie prin calcul, cu ajutorul unei formule stabilite în cadrul disciplinei de rezistența materialelor și prezentată mai jos fără indici corespunzători celor două elemente cuplate:

$$\boxed{k_e = \frac{Gd^4}{8nD^3}\ (\text{N/m}),} \tag{24.69}$$

semnificațiile diverselor simboluri fiind următoarele: G modulul de elasticitate transversal al arcului, (N/m²); d diametrul sîrmei din care este confecționat arcul (m); D diametrul cilindrului pe care este înfășurat arcul (m); n numărul de spire active (deformate) ale arcului.

Scanned with CamScanner

Trecînd la stabilirea expresiei funcției potențiale elastice corespunzătoare unui sistem vibrant, se va lua în considerație numai cazul sistemelor vibrante plane, cu elementele legate în serie prin arcuri elicoidale, ale căror axe vor fi presupuse, în ipotezele de lucru adoptate, paralele la o direcție fixă dată, după care va fi orientată și axa Ox a reperului fix Oxy în care se deplasează elementele sistemului.

Dacă n este numărul elementelor, numărul arcurilor elicoidale aplicate sistemului vibrant va fi, în general, de $(n+1)$, arcurile extreme, (Ae_{10}) și (Ae_{n0}), făcînd legătura cu exteriorul, (fig. 24.7).

Pentru calculul lucrului mecanic elementar al forțelor elastice se vor alege polii chiar în punctele de legătură ale arcurilor cu elementele sistemului, rezultînd astfel condițiile

$$\mathfrak{M}_{A_{i,i-1}}(\bar{F}_{e_{i,i-1}}) = \bar{\mathcal{M}}_{A_{i,i-1}}(\bar{F}_{e_{i,i-1}}) = 0 \text{ și}$$

$$\mathfrak{M}_{A_{n0}}(\bar{F}_{e_{n0}}) = \bar{\mathcal{M}}_{A_{n0}}(\bar{F}_{e_{n0}}) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

în baza cărora expresiile lucrului mecanic elementar al acestor forțe vor conține numai termenii corespunzători translațiilor.

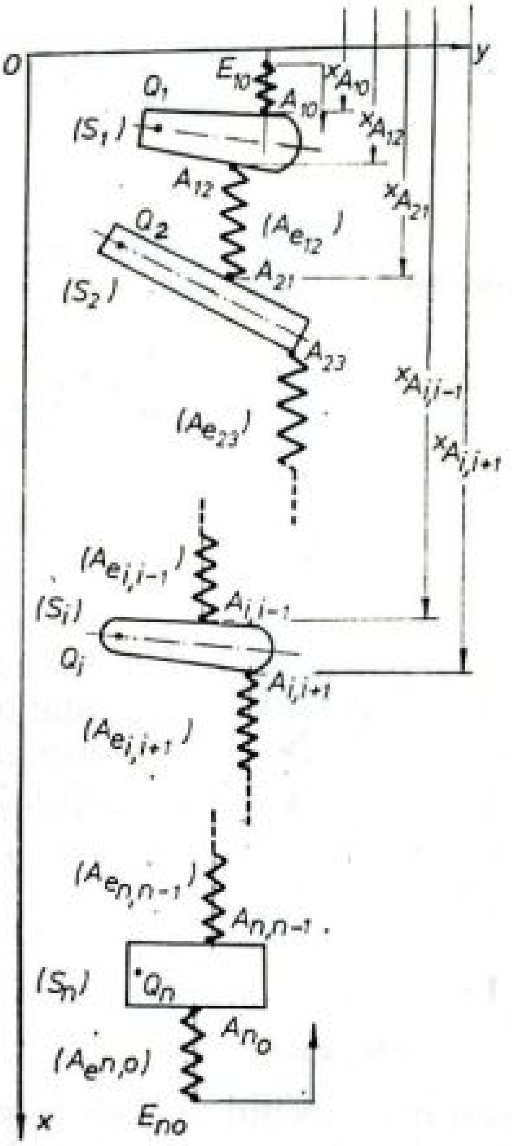


Fig. 24.7.

În consecință, lucrul mecanic elementar al forțelor elastice exterioare conservative va fi dat de relația

$$d\mathcal{L}_{e_{ext}} = \bar{F}_{e_{10}} d\bar{r}_{A_{10}} + \bar{F}_{e_{n0}} d\bar{r}_{A_{n0}} = F_{e_{10}} dx_{A_{10}} + F_{e_{n0}} dx_{A_{n0}},$$

sau încă, avînd în vedere și expresiile (24.67) ale acestor forțe, se va mai putea scrie

$$d\mathcal{L}_{e_{ext}} = [-k_{e_{10}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}}) + F_{e_{10_{st}}}]dx_{A_{10}} + [-k_{e_{n0}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}}) + $$
$$+ F_{e_{n0_{st}}}]dx_{A_{n0}}, \text{ adică } (dx_{A_{10}} = d(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}})\,;\ dx_{A_{n0}} = d(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}})) :$$

Scanned with CamScanner

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{e_{ext}} = \mathrm{d}\left\{\left[-\frac{1}{2}k_{e_{10}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}})^2 + F_{e_{10_{st}}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}k_{e_{n0}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}})^2 + F_{e_{n0_{st}}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}})\right] + \mathrm{const}\right\} =$$

$$= \mathrm{d}U^*_{e_{ext}} = -\mathrm{d}V^*_{e_{ext}}. \qquad (24.70)$$

Rezultă de aici următoarea expresie pentru funcția potențială elastică exterioară

$$V^*_{e_{ext}} = \frac{1}{2}k_{e_{10}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}})^2 - F_{e_{10_{st}}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}}) +$$

$$+ \frac{1}{2}k_{e_{n0}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}})^2 - F_{e_{n0_{st}}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}}) + \mathrm{const}. \qquad (24.71)$$

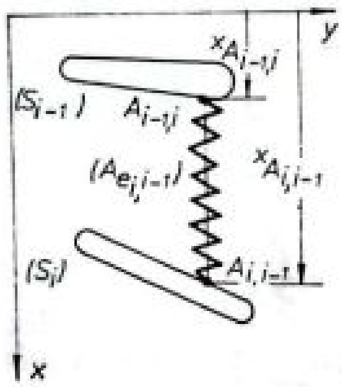


Fig. 24.8.

Pentru calculul lucrului mecanic elementar al forțelor elastice interioare, se va considera mai întîi o pereche de elemente cuplate printr-un arc elicoidal, de exemplu perechea (S_{i-1}) și (S_i), (fig. 24.8), scriindu-se

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{e_{int(i-1,i)}} = \bar{F}_{e_{i-1,i}}\mathrm{d}\bar{r}_{A_{i-1,i}} + \bar{F}_{e_{i,i-1}}\mathrm{d}\bar{r}_{A_{i,i-1}} =$$

$$= F_{e_{i-1,i}}\mathrm{d}x_{A_{i-1,i}} + F_{e_{i,i-1}}\mathrm{d}x_{A_{i,i-1}} =$$

$$= F_{e_{i,i-1}}\mathrm{d}(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i-1,i}}),$$

sau încă, avînd în vedere și expresia (24.68) a forței elastice interioare (cu $j = i - 1$), mai rezultă

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{e_{int(i-1,i)}} = \{-k_{e_{i,i-1}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})] +$$

$$+ F_{e_{i,i-1_{st}}}\}\,\mathrm{d}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})],$$

adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{e_{int(i-1,i)}} = \mathrm{d}\left\{-\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]^2 + \right.$$

$$\left. + F_{e_{i,i-1_{st}}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})] + \mathrm{const}\right\}. \qquad (24.72)$$

Scanned with CamScanner

Lucrul mecanic elementar corespunzător tuturor forțelor elastice interioare va fi dat de relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{e_{int}} = \mathrm{d}\left\{\sum_{i=2}^{n}\left[-\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]^2 + F_{e_{i,i-1_{st}}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]\right] + \text{const}\right\} = -\,\mathrm{d}V^*_{e_{int}}, \tag{24.73}$$

rezultînd de aici următoarea expresie pentru funcția potențială elastică interioară

$$V^*_{e_{int}} = \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}[x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]^2 - F_{e_{i,i-1_{st}}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]\right] + \text{const}. \tag{24.74}$$

În baza relațiilor (24.71) și (24.74) se va putea scrie acum și expresia funcției potențiale elastice totale sub forma

$$V^*_e = V^*_{e_{ext}} + V^*_{e_{int}} = \frac{1}{2}k_{e_{10}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}})^2 - F_{e_{10_{st}}}(x_{A_{10}} - x_{A_{10_{st}}}) + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}[(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]^2 - F_{e_{i,i-1_{st}}}(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]\right] + \frac{1}{2}k_{e_{n0}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}})^2 - F_{e_{n0_{st}}}(x_{A_{n0}} - x_{A_{n0_{st}}}),$$

sau încă, convenind să se introducă notațiile

$$x_{A_{01}} = x_{A_{01_{st}}} = 0\,; \quad x_{A_{n+1,n}} = x_{A_{n+1,n_{st}}} = 0 \tag{24.75}$$

Scanned with CamScanner

şi ţinînd seama şi de egalităţile $F_{e_{n+1,n}} = -F_{e_{n,n+1}}$; $k_{e_{n+1,n}} = k_{e_{0n}} = k_{e_{n0}}$, se va mai putea scrie

$$V_e^* = \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} k_{e_{i,i-1}} [(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})]^2 - \right.$$
$$\left. - F_{e_{i,i-1_{st}}} [(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}}) - (x_{A_{i-1,i}} - x_{A_{i-1,i_{st}}})] \right\} + \text{const.} \quad (24.76)$$

Pentru a obţine, în fine, expresia funcţiei potenţiale elastice totale în coordonate generalizate, vor mai trebui exprimate, în ultima relaţie, diferenţele $(x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}})$ în funcţie de parametrii lagrangeieni ai sistemului vibrant. Această exprimare va fi făcută în continuare pentru sistemele vibrante cu elementele cuplate elastic în serie şi executînd translaţii rectilinii în lungul aceleiaşi axe; se înţelege însă că, după acest exemplu, vor putea fi stabilite expresiile funcţiilor potenţiale şi pentru situaţii mai complicate care ar putea fi întîlnite în aplicaţiile tehnice.

Întrucît asigurarea translaţiei implică, aşa cum s-a arătat în dinamica rigidului, situarea centrelor de masă ale elementelor pe suporturile forţelor rezultante, se va considera că această condiţie este satisfăcută şi în cazul sistemului vibrant din fig. 24.9, cu $r = n$ grade de libertate.

Avînd în vedere relaţiile vectoriale evidente

$$\bar{r}_{A_{i,i-1}} = \bar{r}_{G_i} + \bar{r}'_{G_i A_{i,i-1}}; \quad \bar{r}_{A_{i,i-1_{st}}} = \bar{r}_{G_{i_{st}}} + \bar{r}'_{G_i A_{i,i-1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

se vor putea scrie în acest caz relaţiile

$$\bar{r}_{A_{i,i-1}} - \bar{r}_{A_{i,i-1_{st}}} = \bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}},$$

cu următoarele proiecţii pe axa Ox

$$x_{A_{i,i-1}} - x_{A_{i,i-1_{st}}} = x_{G_i} - x_{G_{i_{st}}}, \quad (24.77)$$

Scanned with CamScanner

rezultînd, prin inlocuirea acestor expresii in relația (24.76), expresia de mai jos pentru funcția potențială elastică:

$$V_e^* = \sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}[(x_{G_i}-x_{G_{i_{st}}})-(x_{G_{i-1}}-x_{G_{i-1_{st}}})]^2 - F_{e_{i,i-1_{st}}}[(x_{G_i}-x_{G_{i_{st}}})-(x_{G_{i-1}}-x_{G_{i-1_{st}}})]\right] + \text{const.} \quad (24.78)$$

cu următoarele consecințe directe ale relațiilor (24.75)

$$x_{G_0} = x_{G_{0_{st}}} = 0; \; x_{G_{n+1}} = x_{G_{n+1_{st}}} = 0. \quad (24.79)$$

Remarcînd acum că în cazul sistemului vibrant considerat în fig. 24.9, toate abscisele centrelor de masă ale elementelor reprezintă parametri de poziție independenți, se vor putea alege drept coordonate lagrangeiene ale sistemului chiar diferențele $(x_{G_k} - x_{G_{k_{st}}})$, adică se va putea scrie

$$q_k^* = w_k = (x_{G_k} - x_{G_{k_{st}}}) = x_k^*,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n), \quad (24.80)$$

ceea ce revine la a raporta poziția fiecărui element al sistemului vibrant, nu la originea O a axei Ox, ci la poziția de echilibru static a elementului respectiv, (fig. 24.10, a), convenindu-se ca această raportare să se reprezinte în schițe ca în fig. 24.10, b.

În aceste condiții, expresia (24.78) a funcției potențiale elastice ia forma finală

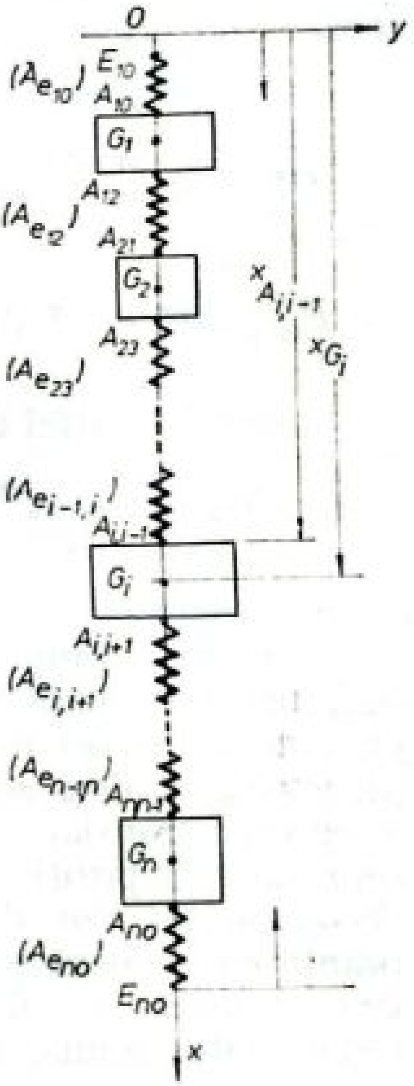


Fig. 24.9

$$V_e^* = \sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2}k_{e_{i,i-1}}(x_i^* - x_{i-1}^*)^2 - F_{e_{i,i-1}}(x_i^* - x_{i-1}^*)\right] + \text{const.}, \quad (24.81)$$

cu convențiile evidente

$$x_0^* = x_{n+1}^* = 0. \tag{24.82}$$

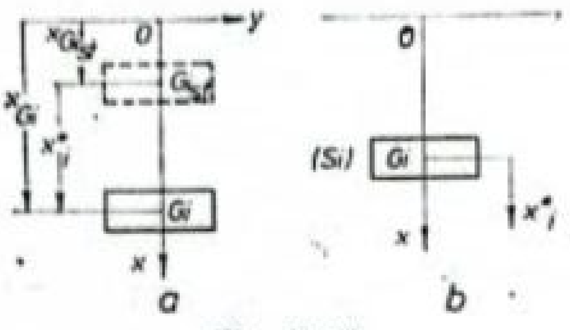


Fig. 24.10.

Expresia forței generalizate elastice corespunzătoare unui grad de libertate generic k va fi obținută acum observîndu-se că la derivarea parțială în raport cu coordonata $q_k^* = x_k^*$ a relației precedente, vor fi derivabili numai termenii care corespund valorilor $k = i$ și $k = i + 1$, putîndu-se scrie deci

$$Q_{e_k}^* = -\frac{\partial V_e^*}{\partial q_k^*} = -\frac{\partial V_e^*}{\partial x_k^*} = -\frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\frac{1}{2} k_{e_{k,k-1}}(x_k^* - x_{k-1}^*)^2 - \right.$$

$$\left. - F_{e_{k,k-1}}(x_k^* - x_{k-1}^*) + \frac{1}{2} k_{e_{k+1,k}}(x_{k+1}^* - x_k^*)^2 - F_{e_{k+1,k}}(x_{k+1}^* - x_k^*)\right].$$

Rezultă astfel expresiile

$$Q_{e_k}^* = k_{e_{k,k-1}} x_{k-1}^* - (k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}})\, x_k^* + k_{e_{k+1,k}} x_{k+1}^* +$$

$$+ F_{e_{k,k-1_{st}}} - F_{e_{k+1,k_{st}}}. \tag{24.83}$$

Întrucît componentele statice ale acestor forțe generalizate sînt echilibrate de componentele statice ale forțelor generalizate corespunzătoare celorlalte solicitări active aplicate sistemului vibrant (de exemplu, ale greutăților, în cazul sistemelor vibrante cu elementele executînd translații rectilinii pe verticală), sau sînt chiar egale cu zero, dacă în poziția de echilibru static a sistemului mecanic arcurile elicoidale nu sînt deformate (de exemplu, în cazul sistemelor vibrante cu elementele rezemate pe un plan orizontal neted și executînd translații rectilinii paralele cu planul de sprijin), se vor lua în considerație numai forțele generalizate elastice dinamice:

$$\boxed{Q_{ed_k}^* = k_{e_{k,k-1}} x_{k-1}^* - (k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}})\, x_k^* + k_{e_{k+1,k}} x_{k+1}^*}, \tag{24.84}$$

cu

$$Q_{ed_1}^* = -(k_{e_{10}} + k_{e_{21}})\, x_1^* + k_{e_{21}} x_2^* \tag{24.85}$$

cu convențiile evidente

$$x_0^* = x_{n+1}^* = 0. \tag{24.82}$$

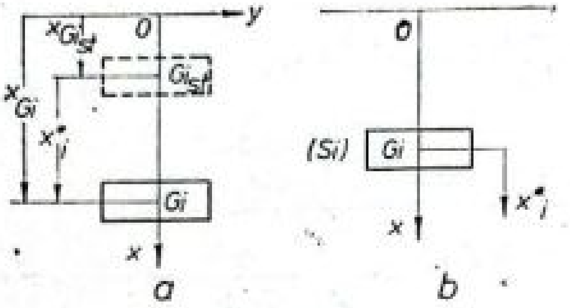


Fig. 24.10.

Expresia forței generalizate elastice corespunzătoare unui grad de libertate generic k va fi obținută acum observîndu-se că la derivarea parțială în raport cu coordonata $q_k^* = x_k^*$ a relației precedente, vor fi derivabili numai termenii care corespund valorilor $k = i$ și $k = i + 1$, putîndu-se scrie deci

$$Q_{e_k}^* = -\frac{\partial V_e^*}{\partial q_k^*} = -\frac{\partial V_e^*}{\partial x_k^*} = -\frac{\partial}{\partial x_k^*}\Big[\frac{1}{2}k_{e_{k,k-1}}(x_k^* - x_{k-1}^*)^2 -$$

$$- F_{e_{k,k-1}}(x_k^* - x_{k-1}^*) + \frac{1}{2}k_{e_{k+1,k}}(x_{k+1}^* - x_k^*)^2 - F_{e_{k+1,k}}(x_{k+1}^* - x_k^*)\Big].$$

Rezultă astfel expresiile

$$Q_{e_k}^* = k_{e_{k,k-1}} x_{k-1}^* - (k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}})\, x_k^* + k_{e_{k+1,k}} x_{k+1}^* +$$

$$+ F_{e_{k,k-1_{st}}} - F_{e_{k+1,k_{st}}}. \tag{24.83}$$

Întrucît componentele statice ale acestor forțe generalizate sînt echilibrate de componentele statice ale forțelor generalizate corespunzătoare celorlalte solicitări active aplicate sistemului vibrant (de exemplu, ale greutăților, în cazul sistemelor vibrante cu elementele executînd translații rectilinii pe verticală), sau sînt chiar egale cu zero, dacă în poziția de echilibru static a sistemului mecanic arcurile elicoidale nu sînt deformate (de exemplu, în cazul sistemelor vibrante cu elementele rezemate pe un plan orizontal neted și executînd translații rectilinii paralele cu planul de sprijin), se vor lua în considerație numai forțele generalizate elastice dinamice:

$$\boxed{Q_{ed_k}^* = k_{e_{k,k-1}} x_{k-1}^* - (k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}})\, x_k^* + k_{e_{k+1,k}} x_{k+1}^*}\,, \tag{24.84}$$

cu

$$Q_{ed_1}^* = -(k_{e_{10}} + k_{e_{12}})\, x_1^* + k_{e_{21}} x_2^* \tag{24.85}$$

Scanned with CamScanner

CamScanner

şi

$$Q^*_{ed_n} = k_{e_{n,n-1}} x^*_{n-1} - (k_{e_{n,n-1}} + k_{e_{n0}}) x^*_n. \tag{24.86}$$

Se va observa că, exceptind forțele generalizate extreme $Q^*_{ed_1}$ și $Q^*_{ed_n}$, care conțin numai cite doi termeni avînd ca factori coordonatele generalizate, toate celelalte forțe generalizate, corespunzătoare gradelor de libertate $k = 2, \ldots, n-1$, conțin cite trei termeni liniari în parametrii lagrangeieni $q^*_k = w^*_k = x^*_k$ și anume, termeni succesivi, corespunzători valorilor $k-1$, k și $k+1$.

Expresia generală (24.84) a forței generalizate elastice scoate în evidență, direct, caracteristicile dinamice generalizate elastice corespunzătoare sistemului vibrant din fig. 24.8, acestea fiind:

$$c_{hj}\begin{cases} = 0; & j \neq h-1, h, h+1 \\ = -k_{e_{h,h-1}}; & j = h-1 \\ = (k_{e_{h,h-1}} + k_{e_{h,h+1}}); & j = h;\ (h, j = 1, 2, \ldots, n) \\ = -k_{e_{h+1,h}} & j = h+1, \end{cases} \tag{24.87}$$

evident, cu

$$c_{10} = c_{n,n+1} = 0, \tag{24.88}$$

conform convenției de notații adoptate.

Expresiile stabilite mai sus pentru caracteristicile dinamice generalizate elastice arată că în cazul sistemului vibrant considerat în fig. 24.8 matricea de rigiditate a sistemului are forma

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} \ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots c_{h,j-1} & c_{hj} & c_{h,j+1} \ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \ldots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{24.89}$$

Revenind la expresia (24.84) a forței generalizate elastice dinamice corespunzătoare gradului de libertate k, se va observa că

termenul care se referă la parametrul lagrangeian x_k^* din expresia acestei forțe este

$$Q^*_{ed\,k_{(k)}} = -(k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}})\,x_k^* = F_{e_{(k)}}, \tag{24.90}$$

el corespunzînd forței elastice rezultante $\overline{F}_{e_{(k)}}$, exercitate asupra elementului (S_k) prin deformarea elastică liniară a arcurilor elicoidale $(Ae_{k,k-1})$ și $(Ae_{k,k+1})$, în ipoteza că extremitățile acestor arcuri, care nu sînt legate la elementul (S_k), ar fi fixate, (fig. 24.11). Această forță elastică rezultantă $\overline{F}_{e_{(k)}}$ ar avea constanta elastică

$$k_{e_{(k)}} = k_{e_{k,k-1}} + k_{e_{k+1,k}}, \tag{24.91}$$

iar graficul variației forței cu deformația ar avea forma din fig. 24.12 cu

$$\operatorname{tg} \varphi_{(k)} = k_{e_{(k)}}. \tag{24.92}$$

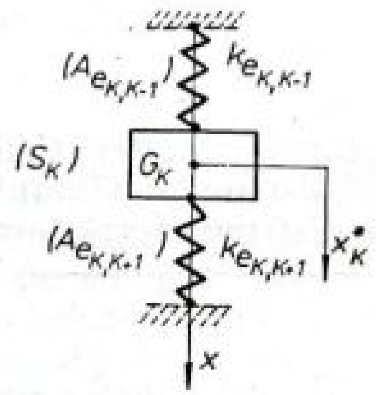


Fig. 24.11.

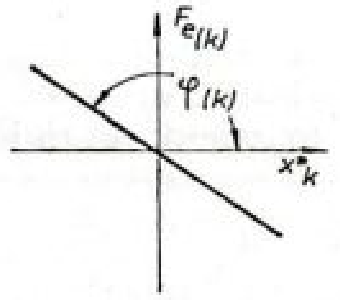


Fig. 24.12.

Trebuie de făcut mențiunea că există însă și situații cînd legăturile active ale unui element (S_i) cu elementele vecine (S_{i-1}) și (S_{i+1}) se realizează prin cîte două, sau chiar mai multe arcuri elicoidale montate în paralel, dintre care cîte unul cu legătură permanentă cu elementele cuplate, iar celelalte nefiind fixate de elementul (S_i), ci numai de elementele vecine și prezentînd, în poziția de echilibru static a sistemului mecanic, jocuri de mărimi egale cu $b^*_{i,i-1}$, respectiv $b^*_{i,i+1}$ (fig. 24.13).

Considerind un asemenea cuplaj format din cite două arcuri montate în paralel, dintre care unul cu joc, (fig. 24.14), se va observa că forța generalizată dinamică corespunzătoare gradului de

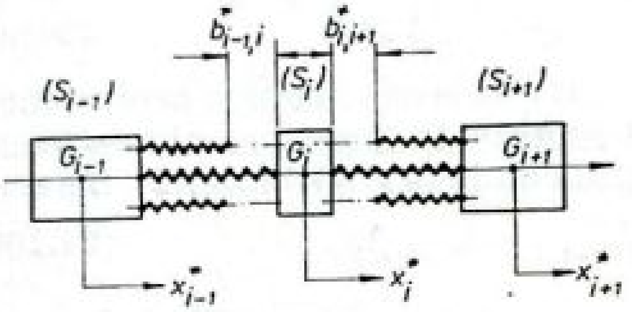


Fig. 24.13.

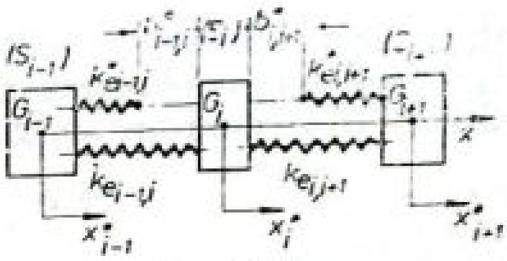


Fig. 24.14.

libertate i va avea trei serii de valori diferite, corespunzătoare celor trei intervale distincte de variație a parametrului lagrangeian x_i^* și anume:

— valorile

$$Q^*_{ed_i} = k_{e_{i-1,i}} x^*_{i-1} - (k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}}) x^*_i + k_{e_{i+1,i}} x^*_{i+1} \qquad (24.93)$$

pentru

$$-b^*_{i-1,i} < x^*_i < b^*_{i,i+1} \qquad (24.94)$$

(fig. 24.15, a);

— valorile

$$Q^*_{ed_i} = (k_{e_{i-1,i}} + k^*_{e_{i-1,i}}) x^*_{i-1} - (k_{e_{i-1,i}} + k^*_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}}) x^*_i + + k_{e_{i+1,i}} x^*_{i+1} \qquad (24.95)$$

pentru

$$x^*_i \leqslant -b^*_{i-1,i} \qquad (24.96)$$

(fig. 24.15, b);

— valorile

$$Q^*_{ed_i} = k_{e_{i-1,i}} x^*_{i-1} - (k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}} + k^*_{e_{i+1,i}} x^*_i - - (k_{e_{i+1,i}} + k^*_{e_{i+1,i}}) x^*_{i+1} \qquad (24.97)$$

pentru

$$x^*_i \geqslant b^*_{i,i+1} \qquad (24.98)$$

(fig. 24.15, c).

Termenul corespunzător parametrului lagrangeian x_i^* din expresiile acestor forțe generalizate, reprezentînd forța elastică re-

Scanned with CamScanner

zultantă care ar acționa asupra elementului (S_i) în cazul cînd extremitățile legate cu elementele vecine (S_{i-1}) și (S_{i+1}) ale arcurilor ar rămîne fixe, va avea expresia

$$F'_{e(i)} = -(k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}})\, x_i^* \qquad (24.99)$$

în cazul valabilității condițiilor (24.94), variația mărimii acestei forțe în funcție de deplasarea x_i^* fiind reprezentată prin porțiunea rectilinie AB, trecînd prin origine, a graficului $CABD$ din fig. 24.15, a, cu

$$\operatorname{tg} \varphi'_{(i)} = -(k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}}), \qquad (24.100)$$

expresia

$$F''_{e(i)} = -(k_{e_{i-1,i}} + k^*_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}})\, x_i^* \qquad (24.101)$$

pentru condiția (24.96), cu variația mărimii acestei forțe reprezentată prin porțiunea rectilinie CA a graficului din fig. 24.16, a,

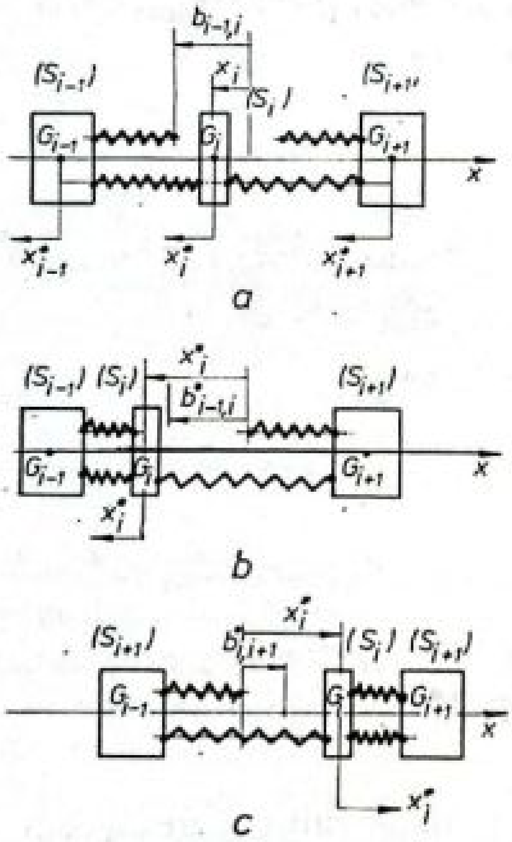


Fig. 24.15.

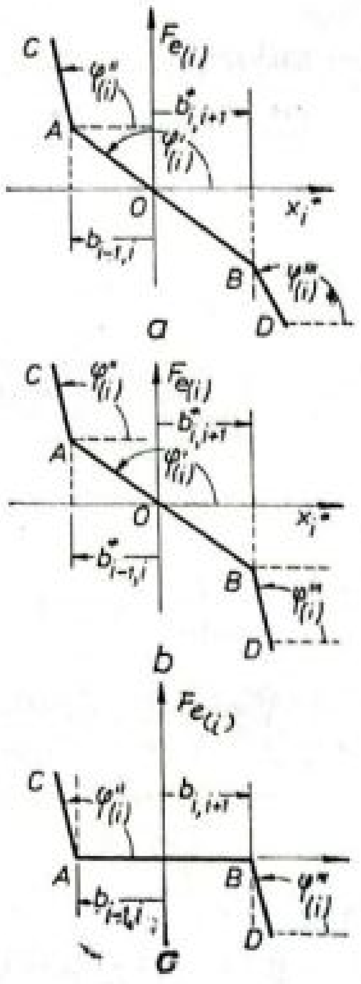


Fig. 24.16.

Scanned with CamScanner
CamScanner

cu
$$\operatorname{tg} \varphi''_{(i)} = -(k_{e_{i-1,i}} + k^*_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}}) \quad (24.102)$$

și expresia
$$F'''_{e_{(i)}} = -(k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}} + k^*_{e_{i+1,i}})\, x_i^* \quad (24.103)$$

în cazul valabilității condiției (24.98), variația mărimii forței $F'''_{e_{(i)}}$ în funcție de parametrul lagrangeian x_i^* fiind reprezentată prin porțiunea rectilinie *BD* a graficului din fig. 24.16, a, cu
$$\operatorname{tg} \varphi'''_{(i)} = -(k_{e_{i-1,i}} + k_{e_{i+1,i}} + k^*_{e_{i+1,i}}). \quad (24.104)$$

Se înțelege că în cazul cînd cele două perechi de arcuri elicoidale care leagă elementul (S_i) de elementele vecine (S_{i-1}) și (S_{i+1}) sînt, două cîte două, identice, adică pot fi scrise condițiile
$$k_{e_{i-1,i}} = k_{e_{i,i+1}} = k,\; k^*_{e_{i-1,i}} = k^*_{e_{i,i+1}} = k^*,\; b^*_{i-1,i} = b^*_{i,i+1} = b^*, \quad (24.105)$$

atunci segmentele *CA* și *BD* ale graficului variației mărimii forței elastice $\bar{F}_{e_{(i)}}$ în funcție de parametrul lagrangeian x_i^* devin paralele (fig. 24.16, b); de asemenea, în cazul cînd ambele perechi de arcuri sînt identice și au jocuri egale, atunci graficul $F_{e_{(i)}} = f(x_i^*)$ va avea forma din fig. 24.16, c.

În situațiile examinate mai sus se spune că între elementul (S_i) și elementele vecine (S_{i-1}) și (S_{i+1}) s-au realizat ***cuplaje elastice cu caracteristici liniare pe porțiuni.***

În încheierea prezentării caracteristicilor dinamice corespunzătoare forțelor elastice dezvoltate prin deformarea elastică axială — prin întindere și comprimare — a arcurilor elicoidale, se reamintește faptul că toate concluziile trase mai sus sînt valabile numai în ipoteza că axa arcului elicoidal deformat prin întindere și comprimare rămîne fixă în spațiu. În cazul cînd această din urmă condiție nu poate fi acceptată, axa arcului formînd un unghi variabil, β, cu axa *Ox* pe care se deplasează elementul (S) legat la o extremitate a arcului, ca în fig. 24.17, în care se presupune că greutatea elementului este suficient de mare pentru

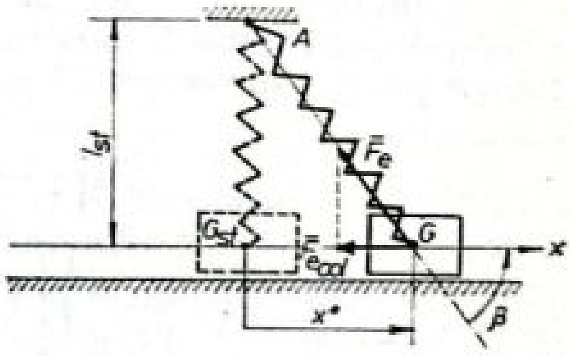


Fig. 24.17.

ca legătura prin reazem să nu fie desființată, atunci forța elastică dezvoltată de arc influențează deplasarea elementului, în ipoteza neglijării frecărilor, numai prin componenta coliniară $\bar{F}_{e_{col}}$, care, chiar în condițiile cuplajului liniar ($\gamma = 0$), nu mai are caracteristică liniară.

Într-adevăr, dacă se notează cu l_0 lungimea nedeformată a arcului și cu

$$l = AG = \sqrt{AG_{st}^2 + x^{*2}} = \sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}}$$

lungimea arcului într-o poziție determinată prin distanța x^* a elementului la poziția sa de echilibru static — poziție considerată, în ipoteza menționată a neglijării frecărilor, la intersecția normalei dusă prin A la suprafața de sprijin (fig. 24.17) —, atunci componenta $\bar{F}_{e_{col}}$ a forței elastice $\bar{F}_e$, ultima de modul

$$|\bar{F}_e| = k_e(l - l_0) = k_e(\sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}} - l_0), \tag{24.106}$$

care va acționa asupra elementului în direcția deplasării lui și deci care va intra în ecuația diferențială a mișcării elementului, va avea următoarea valoare scalară raportată la versorul $\bar{i}$ al axei Ox:

$$F_{e_{col}} = k_e(\sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}} - l_0)\cos\beta = -k_e(\sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}} - l_0)\frac{x^*}{\sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}}},$$

adică

$$F_{e_{col}} = -k_e x^*\left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_{st}^2 + x^{*2}}}\right] =$$

$$= -k_e x^*\left[1 - \frac{l_0}{l_{st}}\left(1 + \frac{x^{*2}}{l_{st}^2}\right)^{-1/2}\right]. \tag{24.107}$$

Cum este vorba de deplasări mici ($x^* << l_{st}$), se poate dezvolta binomul după puterile raportului x^*/l_{st}, reținîndu-se din dezvoltare numai primii doi termeni. Rezultă astfel expresia

$$F_{e_{col}} = -k_e\left[\left(1 - \frac{l_0}{l_{st}}\right) + \frac{1}{2}\frac{l_0 x^{*2}}{l_{st}^3}\right]x^* =$$

$$= -k_e\left(1 - \frac{l_0}{l_{st}}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{l_0}{l_{st}^3\left(1 - \frac{l_0}{l_{st}}\right)}x^{*2}\right]x^*,$$

Scanned with CamScanner

adică $(k_e(1 - l_0/l_{st}) = k_e^*)$:

$$F_{e_{col}} = -k_e^*[1 + \gamma x^{*2}]x^*, \qquad (24.108)$$

cu

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{l_0}{l_{st}^3\left(1 - \frac{l_0}{l_{st}}\right)} > 0, \qquad (24.109)$$

care confirmă afirmația făcută mai sus, privind caracterul neliniar în raport cu parametrul lagrangeian x^* al forței elastice $F_{e_{col}}$, care solicită elementul considerat.

De asemenea, se va mai menționa faptul că în unele situații cuplajul elastic dintre două elemente, (S_i) și (S_j), ale unui sistem vibrant poate fi realizat printr-o combinație fie de s arcuri elicoidale (Ae_{ij}^{σ}), $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$, montate în serie, (fig. 24.18, a), fie de r arcuri elicoidale (Ae_{ij}^{ρ}), $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$, montate în paralel (fig. 24.18, b), fie, într-un caz mai general, sub forma unui ansamblu format din r șiruri de arcuri elicoidale montate în paralel, cu un șir oarecare, cu numărul de ordine ρ format, la rîndul său, din s_ρ arcuri

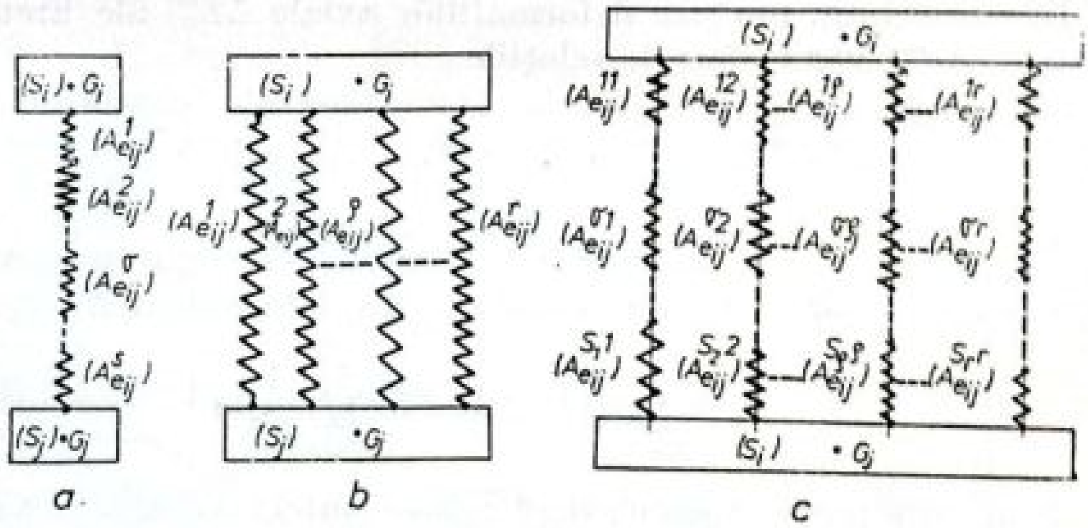


Fig. 24.18.

elicoidale montate în serie (fig. 24.18, c); se va arăta, în continuare, că în aceste situații fiecare din combinațiile amintite va putea fi înlocuită cu un arc elicoidal echivalent unic, cu constanta elastică exprimată în funcție de constantele elastice ale arcurilor care intră în combinația respectivă.

Scanned with CamScanner

Pentru simplificarea scrierii se va renunța la indicii inferiori ai constantelor elastice, indicînd numerele de ordine ale elementelor cuplate, utilizîndu-se în schimb doi indici superiori, primul desemnînd numărul de ordine al arcului în șir, iar al doilea numărul de ordine al șirului.

Considerînd, mai întîi, o combinație de forma celei din fig. 24.18 a, constituită din s_ρ arcuri elicoidale ($Ae^{\sigma\rho}$) montate în serie într-un singur șir, cu constantele $k_e^{\sigma\rho}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, s_\rho$), se va observa că, în conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, la fiecare punct de legătură dintre arcuri, forțele interioare respective, de exemplu $\bar{F}^{(\rho)}_{e_{\sigma-1,\sigma}}$ și $\bar{F}^{(\rho)}_{e_{\sigma,\sigma-1}}$, trebuie să formeze o pereche de vectori direct opuși, (fig. 24.19), rezultînd de aici că toate arcurile elicoidale montate în serie vor dezvolta aceleași forțe elastice, de modul

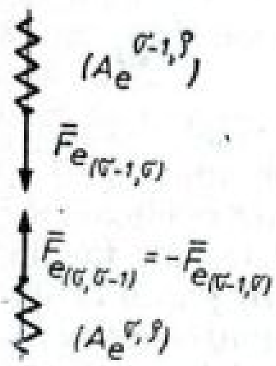


Fig. 24.19.

$$|\bar{F}^{(\rho)}_{e_{\sigma-1,\sigma}}| = |\bar{F}^{(\rho)}_{e_{\sigma,\sigma-1}}| = |\bar{F}^{(\rho)}_{e_{\sigma,\sigma+1}}| = F_e^{(\rho)}, \; (\sigma = 1, 2, \ldots, s_\rho). \tag{24.110}$$

În consecință, modulii deformațiilor axiale $\Delta L_\sigma^{(\rho)}$ ale arcurilor elicoidale ($Ae^{\sigma\rho}$) vor fi dați de relațiile

$$|\Delta L_\sigma^{(\rho)}| = \frac{F_e^{(\rho)}}{k_e^{\sigma\rho}}, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, s_\rho), \tag{24.111}$$

iar deformația totală a ansamblului de arcuri elicoidale montate în serie, toate cu același sens de deformare, va avea valoarea

$$|\Delta L^{(\rho)}| = \sum_{\sigma=1}^{s\rho} |\Delta L_\sigma^{(\rho)}| = F_e^{(\rho)} \sum_{\sigma=1}^{s\rho} \frac{1}{k_e^{\sigma\rho}}. \tag{24.112}$$

Pe de altă parte, forța elastică $\bar{F}_e^{(\rho)}$ ar putea fi dezvoltată de un singur arc elicoidal echivalent ansamblului de arcuri montate în serie, a cărui constantă, notată cu simbolul $k_e^{(\rho)}$, va trebui să aibă o astfel de valoare, încît modulul deformației axiale a acestui arc echivalent

$$|\Delta L^{*(\rho)}| = \frac{F_e^{(\rho)}}{k_e^{(\rho)}}, \tag{24.113}$$

Scanned with CamScanner
CamScanner

să fie egală cu modulul deformației axiale totale a ansamblului de arcuri elicoidale montate în serie, adică să fie satisfăcută relația

$$\frac{F_e^{(\rho)}}{k_e^{(\rho)}} = F_e^{(\rho)} \sum_{\sigma=1}^{s_\rho} \frac{1}{k_e^{\sigma\rho}} . \tag{24.114}$$

Rezultă de aici, după simplificarea lui $F_e^{(\rho)}$, următoarea expresie pentru constanta elastică a arcului echivalent grupului considerat de arcuri elicoidale montate în serie :

$$\boxed{k_e^{(\rho)} = \frac{1}{\sum_{\sigma=1}^{s_\rho} \frac{1}{k_e^{\sigma\rho}}}} . \tag{24.115}$$

În cazul cînd toate arcurile elicoidale componente au aceeași constantă elastică ($k_e^{\sigma\rho} = k_e^{0\rho}$; $\sigma = 1, 2, \ldots, s_\rho$), formula precedentă ia forma

$$\boxed{k_e^{(\rho)} = \frac{k_e^{0\rho}}{s_\rho}} . \tag{24.116}$$

Considerînd, în continuare, și combinația din fig. 24.18, b, constituită din r arcuri elicoidale montate în paralel, se va observa că forța elastică totală, dezvoltată de cele r arcuri elicoidale, este dată de suma forțelor elastice dezvoltate de fiecare arc în parte, ca rezultantă a unui sistem de vectori paraleli, adică se poate scrie

$$|\bar{F}_e| = \sum_{\rho=1}^{r} |\bar{F}_{e\rho}| = \sum_{\rho=1}^{r} k_e^{(\rho)} |\Delta L_\rho|, \tag{24.117}$$

ΔL_ρ reprezentînd și acum deformațiile axiale ale arcurilor ($Ae^{1\rho}$), ($\rho = 1, 2, \ldots, r$), (fig. 24.20).

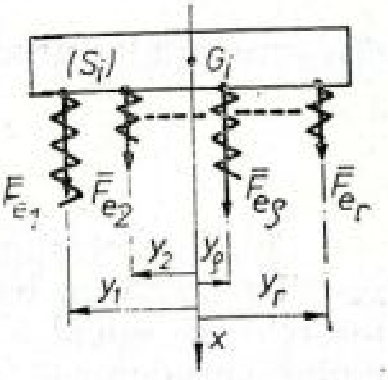


Fig. 24.20.

Pe de altă parte însă, aceeași forță elastică $\bar{F}_e$ ar putea fi dezvoltată de un arc unic, echivalent întregului sistem de arcuri elicoidale, de constantă k_e, adică

$$|\bar{F}_e| = k_e |\Delta L|, \tag{24.118}$$

ΔL fiind deformația axială corespunzătoare acestui ultim arc.

Scanned with CamScanner
CamScanner

Rezultă deci egalitatea

$$k_e|\Delta L| = \sum_{\rho=1}^{r} k_e^{(\rho)}|\Delta L_\rho|. \qquad (24.119)$$

Luind în considerație numai cazul cind elementul (S_i), cuplat prin această combinație de arcuri elicoidale, execută translații rectilinii în lungul axei Ox, paralelă la direcția comună a axelor arcurilor, (fig. 24.20), și reamintindu-se observația, cunoscută din dinamica rigidului, că pentru asigurarea translației suportul rezultantei tuturor forțelor elastice va trebui să treacă prin centrul de masă G_i al elementului (S_i) — acest centru jucind deci și rolul de centru al sistemului de forțe paralele $\overline{F}_{e\rho}$ —, rezultă, prin aplicarea teoremei lui Varignon, următoarea condiție de montare a arcurilor în paralel, pentru ca efectuarea translației să fie asigurată :

$$\sum_{\rho=1}^{r} \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{F}_{e\rho}) = \sum_{\rho=1}^{r} y_\rho|\overline{F}_{e\rho}| = \sum_{\rho=1}^{r} y_\rho k_e^{(\rho)}|\Delta L_\rho| = 0. \qquad (24.120)$$

Pentru ca toate arcurile să aibă aceeași deformație axială, egală, evident, și cu deformația axială a arcului unic echivalent, adică

$$|\Delta L_\rho| = |\Delta L|, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \qquad (24.121)$$

va trebui să fie satisfăcută deci relația

$$\left(\sum_{\rho=1}^{r} y_\rho k_e^{(\rho)}\right)|\Delta L| = 0,$$

din care rezultă următoarea condiție finală de montare a arcurilor :

$$\sum_{\rho=1}^{r} y_\rho k_e^{(\rho)} = 0. \qquad (24.122)$$

În această situație, simplificarea, în relația (24.119), a deformațiilor axiale în baza condițiilor (24.121), conduce la următoarea formulă de calcul a constantei elastice a arcului echivalent sistemului considerat de arcuri elicoidale montate în paralel :

$$\boxed{k_e = \sum_{\rho=1}^{r} k_e^{(\rho)}}\,, \qquad (24.123)$$

Scanned with CamScanner

cu forma particulară

$$\boxed{k_e = r k_e^0}\,, \tag{24.124}$$

dacă toate cele r arcuri elicoidale au aceeași constantă elastică ($k^{(\rho)} = k_e^0$; $\rho = 1, 2, \ldots, r$).

Cu aceasta, se poate trece la considerarea cazului mai general de combinații de arcuri elicoidale, reprezentat in fig. 23.21, c.

În baza celor arătate mai inainte, fiecare din cele r șiruri de arcuri elicoidale ($Ae^{\sigma\rho}$), de constante elastice $k_e^{\sigma\rho}$, va putea fi inlocuit cu cite un arc echivalent unic, de constantă elastică $k_e^{(\rho)}$, dată de relația (24.115), adică

$$k_e^{(\rho)} = \frac{1}{\sum\limits_{\sigma=1}^{s_\rho} \frac{1}{k_e^{\sigma\rho}}}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.125}$$

rezultind astfel o combinație de r arcuri elicoidale echivalente montate in paralel; la rindul lor, acestea din urmă vor putea fi inlocuite cu un arc elicoidal echivalent unic, cu constanta elastică dată de relația (24.123), in care constantele $k_e^{(\rho)}$ vor fi inlocuite cu expresiile (24.125).

Se obține astfel următoarea formulă finală pentru calculul constantei elastice a arcului elicoidal unic echivalent combinației din fig. 24.18, c

$$\boxed{k_e = \sum_{\rho=1}^{r} \frac{1}{\sum\limits_{\sigma=1}^{s_\rho} \frac{1}{k_e^{\sigma\rho}}}}\,, \tag{24.126}$$

cu forma particulară

$$\boxed{k_e = \frac{r}{s} k_e^0}\,, \tag{24.127}$$

dacă fiecare din cele r șiruri conține același număr, $s_\rho = s$, ($\rho = 1, 2, \ldots, r$), de arcuri elicoidale montate in serie și toate cele

$r \times s$ arcuri elicoidale au aceeași constantă elastică, ($k_e^{\sigma\rho} = k_e^0$; $\sigma = 1, 2, \ldots, s$; $\rho = 1, 2, \ldots, r$).

Se înțelege că în baza relațiilor precedente vor putea fi înlocuite, prin arcuri elicoidale echivalente unice, combinații și mai complicate de arcuri elicoidale, prin descompunerea lor în subansamble de tipul celor examinate mai sus.

b) *Caracteristicile dinamice generalizate corespunzătoare forțelor elastice dezvoltate prin încovoierea barelor elastice.* În aplicațiile tehnice se întîlnesc frecvent sisteme vibrante, fie independente, fie constituind subsisteme ale unor sisteme mecanice mai complexe, realizate prin fixarea unui număr oarecare n de rigide (S_i), de mase M_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, pe o bară elastică rectilinie, ultima avînd un număr determinat de puncte de legătură exterioară, realizată prin încastrări — la extremități —, sau prin reazeme, fie fixe, fie cu posibilități de deplasare bilaterală.

În fig. 24.21, a, este prezentat un asemenea sistem vibrant, format din rigidele (S_1) și (S_2) fixate pe bara elastică AB, încastrată în A și avînd un reazem cu posibilități de deplasare bilaterală în D, reprezentarea schematică, convențională, a acestui sistem vibrant fiind arătată în fig. 24.21, b.

În cele ce urmează, masa barei elastice va fi considerată neglijabilă în raport cu masele elementelor fixate pe ea, iar deformațiile ei în timpul mișcării sistemului vibrant vor fi considerate mici și realizate numai prin încovoiere într-un plan determinat, coincizînd cu planul tuturor solicitărilor active la care sînt supuse elementele sistemului.

În aceste condiții, se poate admite că deplasările elementelor fixate pe bară sînt numai translații rectilinii paralele, efectuate în lungul unor axe normale la poziția nedeformată a axei barei și situate în planul solicitărilor active.

În consecință, luînd direcția comună a translațiilor ca direcție a axei fixe Oy (fig. 24.22), pozițiile elementelor cuplate pe bara elastică vor fi determinate, în ipotezele de lucru adoptate, numai prin ordonatele centrelor lor de masă, y_{G_h}, $(h = 1, 2, \ldots, n)$, aceste ordonate reprezentînd totodată și parametrii de poziție independenți ai sistemului vibrant considerat, al cărui număr de grade de libertate este, în condițiile precizate, egal cu n $(r = n)$.

Considerînd, și de astă dată, numai cazul cuplajelor liniare — deformații elastice la încovoiere proporționale cu solicitările —,

Scanned with CamScanner

se va ține seama, în aprecierea forțelor elastice exercitate asupra elementelor fixate pe bara care suferă deformații la încovoiere, de următoarele concluzii furnizate de experiența practică:

— Valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{j}$ al axei Oy — la care sînt raportate și deplasările $(y_{G_h} - y^0_{G_h})$ ale elementelor — a forței elastice rezultante exercitată de bară asupra unui element

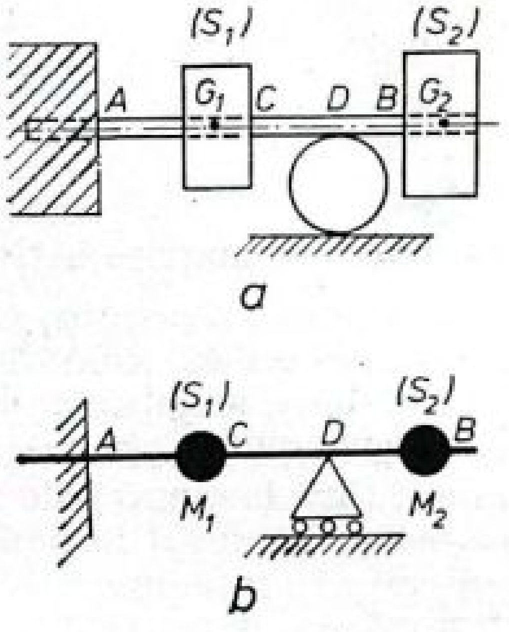


Fig. 24.21.

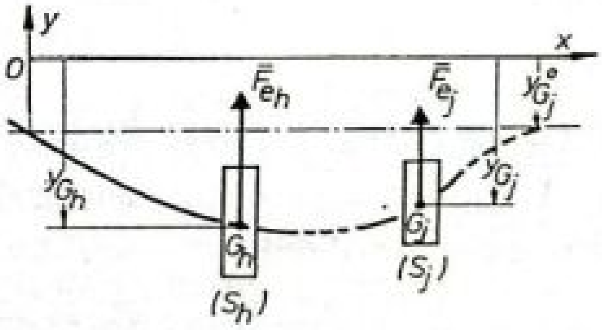


Fig. 24.22.

(S_h), fixat de bară, este o funcție liniară de deplasările, luate cu semnele schimbate, ale tuturor elementelor sistemului vibrant considerat, adică se poate scrie

$$F_{e_h} = -\sum_{j=1}^{n} k_{e_{h_j}}(y_{G_j} - y^0_{G_j}), \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (24.128)$$

$y^0_{G_j}$ fiind ordonatele centrelor de masă ale elementelor, corespunzătoare poziției nedeformate a barei. (Aceste ordonate pot avea, în particular, valoarea zero atunci cînd centrele de masă ale elementelor se găsesc pe axa barei și se alege axa Ox astfel încît să coincidă cu poziția nedeformată a acestei axe.).

— Coeficienții $k_{e_{h_j}}$ ai formelor liniare (24.128) depind de dimensiunile și natura materialului din care este confecționată bara, de tipul legăturilor exterioare aplicate barei, precum și de pozițiile

elementelor pe bară și satisfac *principiul reciprocității*, adică se pot scrie egalitățile

$$k_{e_{hj}} = k_{e_{jh}}, \ (h, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{24.129}$$

aceste constante, numite și acum *constante elastice* sau *constante de rigiditate*, formînd o matrice pătratică simetrică, notată cu simbolul

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} k_{e_{11}} \ldots k_{e_{1j}} \ldots k_{e_{1n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ k_{e_{h1}} \ldots k_{e_{hj}} \ldots k_{e_{hn}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ k_{e_{n1}} \ldots k_{e_{nj}} \ldots k_{e_{nn}} \end{Vmatrix}. \tag{24.130}$$

Se va arăta ulterior că determinantul acestei matrice satisface condiția

$$\det \mathbf{K} \neq 0. \tag{24.131}$$

Considerînd sistemul de relații (24.128) ca un sistem de n ecuații algebrice liniare neomogene în necunoscutele $(y_{G_j} - y^0_{G_j})$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, soluția sistemului va avea, ținînd seama și de condiția (24.131), forma

$$y_{G_j} - y^0_{G_j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{K_{jk}}{\det \mathbf{K}} F_{e_k},$$

sau încă

$$\boxed{y_{G_j} - y^0_{G_j} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} F_{e_k}, \ (j = 1, 2, \ldots, n)}\,, \tag{24.132}$$

unde prin

$$\alpha_{jk} = \frac{K_{jk}}{\det \mathbf{K}} = (-1)^{j+k} \frac{\begin{vmatrix} k_{e_{11}} \ldots\ldots k_{e_{1,k-1}} & k_{e_{1,k+1}} \ldots\ldots k_{e_{1n}} \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ k_{e_{j-1,1}} \ldots k_{e_{j-1,k-1}} & k_{e_{j-1,k+1}} \ldots k_{e_{j-1,n}} \\ k_{e_{j+1,1}} \ldots k_{e_{j+1,k-1}} & k_{e_{j+1,k+1}} \ldots k_{e_{j+1,n}} \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ k_{e_{n1}} \ldots\ldots k_{e_{n,k-1}} & k_{e_{n,k+1}} \ldots\ldots k_{e_{nn}} \end{vmatrix}}{\det \mathbf{K}} \tag{24.133}$$

CamScanner

Scanned with CamScanner

au fost notați complemenții algebrici normați ai elementelor $k_{e_{jk}}$ din determinantul matricei **K**, K_{jk} fiind complemenții algebrici obișnuiți ai acelorași elemente.

Mărimile α_{jk}, numite *coeficienți de influență*, formează o matrice pătratică simetrică, notată cu simbolul

$$\boxed{\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1k} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{j1} \dots \alpha_{jk} \dots \alpha_{jk} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nk} \dots \alpha_{nn} \end{Vmatrix} = \mathbf{K}^{-1}} \qquad (24.134)$$

egală cu inversa matricei de rigiditate și numită *matricea de influență a sistemului vibrant considerat.*

Relațiile (24.132) exprimă faptul că deplasarea totală a unui element oarecare (S_j) al sistemului vibrant considerat rezultă din însumarea unor termeni proporționali cu forțele elastice dezvoltate în dreptul tuturor elementelor sistemului, cu factorii de proporționalitate reprezentați prin coeficienții de influență; această concluzie este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *principiul suprapunerii efectelor.*

În cazul unui sistem vibrant cu un singur element fixat pe bara elastică $(h, j = 1)$, rezultă condițiile

$$\det \mathbf{K} = |k_{e_{11}}| = k_{e_{11}} = k_e; \; K_{11} = K = 1,$$

obținîndu-se astfel următoarea relație între constanta de rigiditate și coeficientul de influență $\alpha_{11} = \alpha$:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{k_e}}. \qquad (24.135)$$

Pentru un sistem vibrant cu două elemente fixate pe bara elastică $(h, j = 1, 2)$, se pot scrie relațiile

$$\det \mathbf{K} = \begin{vmatrix} k_{e_{11}} & k_{e_{12}} \\ k_{e_{21}} & k_{e_{22}} \end{vmatrix} = k_{e_{11}} k_{e_{22}} - k_{e_{12}}^2, \qquad (24.136)$$

Scanned with CamScanner

respectiv
$$K_{11} = |k_{e_{22}}| = k_{e_{22}} \tag{24.137}$$
$$K_{12} = K_{21} = -|k_{e_{12}}| = -k_{e_{12}} = -k_{e_{21}} \tag{24.138}$$
și
$$K_{22} = |k_{e_{11}}| = k_{e_{11}}, \tag{24.139}$$
rezultînd astfel următoarele valori pentru cei trei coeficienți de influență distincți :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{K_{11}}{\det \mathbf{K}} = \frac{k_{e_{22}}}{k_{e_{11}}k_{e_{22}} - k_{e_{12}}^2}, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{K_{12}}{\det \mathbf{K}} = -\frac{k_{e_{12}}}{k_{e_{11}}k_{e_{22}} - k_{e_{12}}^2}, \\ \alpha_{22} &= \frac{K_{22}}{\det \mathbf{K}} = \frac{k_{e_{11}}}{k_{e_{11}}k_{e_{22}} - k_{e_{12}}^2}. \end{aligned} \tag{24.140}$$

Pentru coeficienții de influență au fost stabilite, în cadrul disciplinei de rezistența materialelor, formule concrete de calcul, cele mai uzuale din aceste formule fiind prezentate și în tabelul alăturat.

În relațiile din acest tabel diversele simboluri utilizate au următoarele semnificații : E este modulul de elasticitate longitudinal al barei, (N/m²) ; I, I_1, I_2 — momentele de inerție ale secțiunilor transversale în raport cu punctele de intersecție ale secțiunilor cu axa barei (m⁴) ; a, b, c, d, l dimensiuni constructive (m) ; α_{hj} $(h, j = 1, 2)$ coeficienții de influență (m/N).

Revenind la expresia (24.128) a forței elastice $\bar{F}_{e_h}$ exercitată asupra elementului (S_h), va rezulta următoarea valoare pentru această forță, corespunzătoare poziției de echilibru static a sistemului vibrant

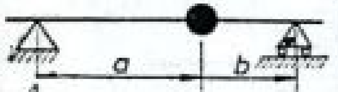
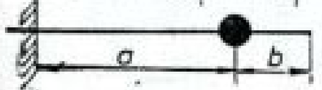
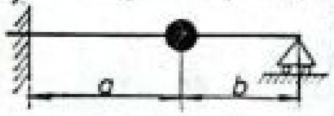
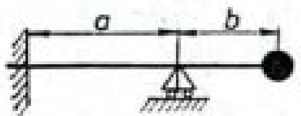
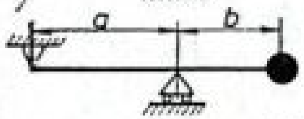
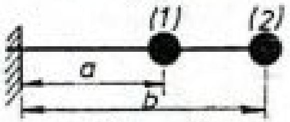
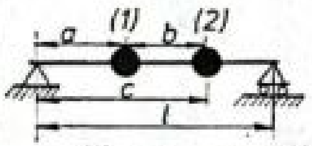
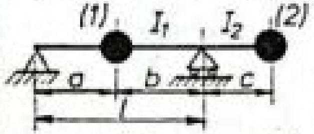
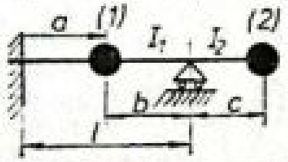
$$F_{e_{h_{st}}} = -\sum_{j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_{j_{st}}} - y_{G_j}^0), \tag{24.141}$$

$y_{G_{j_{st}}}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ fiind abscisele centrelor de masă G_j corespunzătoare acestei poziții de echilibru static.

Eliminind între relațiile (24.141) și (24.128) grupul de termeni $\left(\sum_{j=1}^{n} k_{e_j} y_{G_j}^0\right)$, în general necunoscuți pentru montaje în funcțiune,

Scanned with CamScanner

Coeficienți de influență

Schema / α_{hj}	$\alpha_{11} = \alpha$	$\alpha_{12} = \alpha_{21}$	α_{22}
	$\frac{a^2 b^2}{3EI(a+b)}$	—	—
	$\frac{a^3}{3EI}$	—	—
	$\frac{a^3 b^2 (3a+4b)}{12EI(a+b)^3}$	—	—
	$\frac{b^2(3a+4b)}{12EI}$	—	—
	$\frac{b^2(a+b)}{3EI}$	—	—
	$\frac{a^3}{3EI}$	$\frac{a^2}{2EI}\left(b - \frac{a}{3}\right)$	$\frac{b^3}{3EI}$
	$\frac{a^3}{3EI}\left[1 - \frac{a(2l+b)^2}{4l^3}\right]$	$\frac{a^2}{2EI}\left[c - \frac{a}{3} - \frac{3c^2}{2l^3}\left(l - \frac{a}{3}\right)\left(l - \frac{c}{3}\right)\right]$	$\frac{c^3}{3EI}\left[1 - \frac{c(2l+d)^2}{4l^3}\right]$
	$\frac{a^2 b^2}{3EIl}$	$\frac{ad}{6EIl}(l^2 - a^2 - d^2)$	$\frac{c^2 d^2}{3EIl}$
	$\frac{a^2 b^2}{3EI_1 l}$	$-\frac{abc(l+a)}{6EI_1 l}$	$\frac{c^2}{3EI_2}\left(\frac{I_2}{I_1} l + c\right)$
	$\frac{a^3}{3EI_1}\left[1 - \frac{a(2l+b)^2}{4l^3}\right]$	$-\frac{ca^2}{2EI_1}\left[\frac{3}{2}\left(1 - \frac{a}{3l}\right) - 1\right]$	$\frac{c^3}{3EI_2}\left[1 + \frac{3\frac{I_2}{I_1} l}{4c}\right]$

rezultă următoarea expresie finală pentru valoarea scalară, raportată la versorul ales $\bar{j}$, a forței elastice $\bar{F}_{e_h}$

$$\bar{F}_{e_h} = -\sum_{j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) + F_{e_{h_{st}}}, \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (24.142)$$

în care forța elastică statică $F_{e_{h_{st}}}$ va putea fi determinată din condițiile de echilibru static scrise pentru elementul (S_h).

Lucrul mecanic elementar corespunzător tuturor acestor forțe elastice va fi dat de relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_e = \sum_{h=1}^{n} \bar{F}_{e_h} \mathrm{d}\bar{r}_{G_h} = \sum_{h=1}^{n} F_{e_h} \mathrm{d}y_{G_h} = \sum_{h=1}^{n} F_{e_h} \mathrm{d}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}) =$$

$$= -\sum_{h,j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) \mathrm{d}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}) + \sum_{h=1}^{n} F_{e_{h_{st}}} \mathrm{d}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}),$$

sau încă, observind că datorită condițiilor de simetrie (24.129) poate fi scrisă relația

$$\sum_{h,j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) \mathrm{d}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{h,j=1}^{n} [k_{e_{hj}}(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) \mathrm{d}(y_{G_h} - \right.$$

$$\left. - y_{G_{h_{st}}}) + k_{e_{jh}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}) \mathrm{d}(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}})]\right\} =$$

$$= \mathrm{d}\left\{\sum_{h,j=1}^{n} \frac{1}{2} k_{e_{hj}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}})(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}})\right\},$$

mai rezultă

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_e = \mathrm{d}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}})(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{n} F_{e_{h_{st}}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}}) + \text{const.}\right\} = -\mathrm{d}V_e^*. \qquad (24.143)$$

Ultima relație arată că funcția potențială elastică corespunzătoare sistemului vibrant considerat în fig. 24.22 are forma

$$V_e^* = \left\{\frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{n} k_{e_{hj}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}})(y_{G_j} - y_{G_{j_{st}}}) - \sum_{h=1}^{n} F_{e_{h_{st}}}(y_{G_h} - y_{G_{h_{st}}})\right\} + \text{const.}$$

$$(24.144)$$

Scanned with CamScanner

Alegînd și aici drept coordonate generalizate ale sistemului vibrant deformațiile elastice dinamice din dreptul maselor amplasate pe bară, adică

$$q_k^* = w_k = y_{G_k} - y_{G_{k_{st}}} = y_k^*, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{24.145}$$

ceea ce revine la a raporta și acum pozițiile elementelor sistemului la pozițiile lor de echilibru static — această raportare fiind indicată în schița de funcționare a sistemului vibrant prin convenția de reprezentare arătată în fig. 24.23 —, se poate scrie următoarea expresie finală a funcției potențiale elastice corespunzătoare sistemului vibrant considerat:

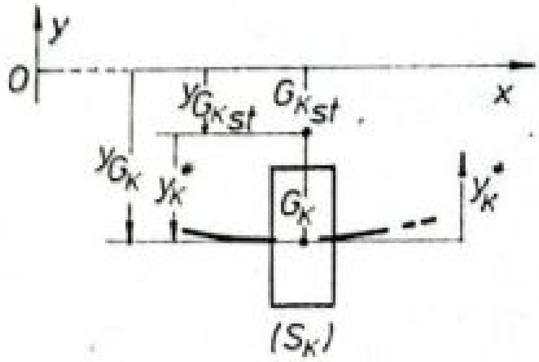


Fig. 24.23

$$V_e^* = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} k_{e_{kj}} y_k^* y_j^* - \sum_{k=1}^{n} F_{e_{k_{st}}} y_k^* + \text{const.} \tag{24.146}$$

Avînd în vedere expresiile derivatelor parțiale în raport cu coordonatele generalizate ale funcției V_e^*, adică

$$\frac{\partial V_e^*}{\partial q_k^*} = \frac{\partial V_e^*}{\partial y_k^*} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_{e_{kj}} y_j^* + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} k_{e_{hk}} y_h^* - F_{e_{k_{st}}},$$

sau încă

$$\frac{\partial V_e^*}{\partial y_k^*} = \sum_{j=1}^{n} k_{e_{kj}} y_j^* - F_{e_{k_{st}}} \tag{24.147}$$

și ținînd seama și de faptul că forțele elastice statice sînt fie egale cu zero — cînd bara nu este deformată în poziția de echilibru static —, fie echilibrate de componentele statice ale forțelor generalizate corespunzătoare celorlalte tipuri de solicitări active la care poate fi supus sistemul vibrant, vor rezulta următoarele expresii pentru forțele generalizate elastice dinamice în cazul sistemului vibrant considerat:

$$Q_{ed_k}^* = -\left(\frac{\partial V_e^*}{\partial y_k^*}\right)_d = -\sum_{j=1}^{n} k_{e_{kj}} y_j^*, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{24.148}$$

Scanned with CamScanner

Ultimele expresii scot direct în evidență expresiile caracteristicilor dinamice generalizate elastice corespunzătoare sistemului vibrant din fig. 22.25, ele coincizînd în acest caz chiar cu constantele elastice de influență, adică

$$c_{hj} = k_{e_{hj}},\ (h,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24.149}$$

ceea ce înseamnă că matricea de rigiditate a acestui sistem va avea forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{K} = \begin{Vmatrix} k_{e_{11}} & k_{e_{12}} \ldots & k_{e_{1j}} & \ldots & k_{e_{1n}} \\ k_{e_{21}} & k_{e_{22}} \ldots & k_{e_{2j}} & \ldots & k_{e_{2n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{e_{h1}} & k_{e_{h2}} \ldots & k_{e_{hj}} & \ldots & k_{e_{hn}} \\ \vdots & & & & \\ k_{e_{n1}} & k_{e_{n2}} \ldots & k_{e_{nj}} & \ldots & k_{e_{nn}} \end{Vmatrix}. \tag{24.150}$$

În condițiile

$$F_{e_{h_{st}}} = 0,\ (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24.151}$$

expresia (24.146) a funcției potențiale se va reduce numai la forma pătratică în parametrii lagrangeieni, adică

$$V_e^* = \frac{1}{2} \sum_{h,\, j=1}^{n} k_{e_{hj}} y_h^* y_j^* + \text{const.}, \tag{24.152}$$

iar prin atribuirea valorii zero pentru constanta aditivă va rezulta valoarea

$$V_e^*(0) = 0$$

pentru poziția de echilibru stabil a sistemului vibrant $(y_k^* = 0)$ și deci următoarea condiție

$$V_e^* = \mathscr{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{h,\, j=1}^{n} k_{e_{hj}} y_h^* y_j^* > 0 \tag{24.153}$$

pentru orice poziție situată în vecinătatea poziției de echilibru stabil a sistemului vibrant, ceea ce permite să se tragă concluzia că și de-

Scanned with CamScanner

terminantul matricei de rigiditate **C** este diferit de zero, adică se poate scrie condiția

$$\det \mathbf{C} \neq 0, \tag{24.154}$$

care confirmă concluzia generală (24.36) și condiția (24.131).

24.1.2. Caracteristicile dinamice generalizate de amortizare

Mișcările vibratorii ale sistemelor mecanice sînt însoțite, totdeauna, și de disipări de energie mecanică, provocate de solicitările rezistente datorate frecărilor, fie uscate, fie vîscoase, solicitări care nu totdeauna pot fi neglijate; în cazurile cînd trebuiesc luate în considerație aceste solicitări disipative, al căror efect este o micșorare continuă a amplitudinilor vibrațiilor, se spune că *sistemul vibrant funcționează cu amortizare.*

Amortizarea în sistemele vibrante poate exista sub următoarele două forme:

1) *Amortizarea externă*, corespunzătoare situației cînd solicitările disipative iau naștere datorită contactului cu mediul exterior, fie al elementelor constitutive ale sistemului vibrant, fie al elementelor elastice de cuplare, această formă de amortizare prezentîndu-se sub unul din tipurile menționate mai jos:

— *amortizare coulombiană* (*uscată*), provocată de solicitările de frecare uscată, reprezentate, de regulă, prin forțe de frecare la alunecare care apar în cazul sistemelor vibrante cu elementele executînd translații rectilinii pe suprafețe aspre;

— *amortizare vîscoasă*, provocată de rezistențele de amortizare dezvoltate de către elementele elastice de cuplare exterioare și interioare, rezistențe ce pot lua valori apreciabile în cazurile cînd elementele elastice de legătură sînt implantate în medii fluide cu vîscozitate mare.

2) *Amortizare internă*, corespunzătoare situației cînd solicitările disipative iau naștere în interiorul elementelor sistemelor vibrante sau al elementelor de cuplare, deosebindu-se și aici două tipuri de amortizare:

— *amortizare vîsco-elastică*, caracterizată prin dependența solicitărilor disipative nu numai de amplitudinile mișcărilor elementelor respective, ci și de frecvența acestor mișcări;

Scanned with CamScanner

— *amortizare histeretică*, caracterizată prin faptul că solicitările disipative, reprezentate în acest caz prin diverse tipuri de forțe de frecare depinzînd numai de amplitudinile mișcărilor elementelor prezintă *fenomenul histerezis*, adică diagrama solicitare-deformație închide o buclă la fiecare ciclu de funcționare (fig. 24.24), aria limitată de această buclă fiind proporțională cu cantitatea de energie disipată pe ciclu de elementul considerat.

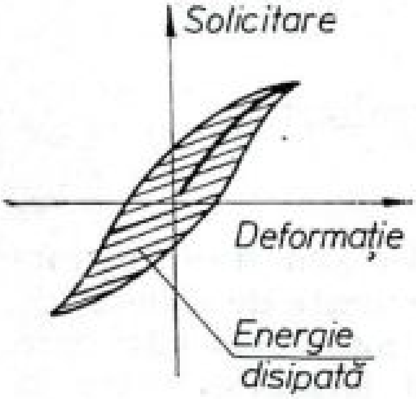


Fig. 24.24

De regulă, amortizarea internă este luată în considerație numai la studiul comportării elementelor unui sistem vibrant la oboseală, în condiții de rezonanță; în problemele tehnice obișnuite ea este neglijată, așa cum va fi neglijată, de altfel, și în lucrarea de față.

Luînd deci în considerație, în continuare, numai amortizarea externă, vor fi stabilite expresiile caracteristicilor dinamice generalizate corespunzătoare celor două tipuri, menționate la început, de amortizări externe.

1°. Caracteristicile dinamice generalizate de amortizare coulombiană

Forțele de frecare la alunecare sînt luate în considerație îndeosebi în cazul sistemelor vibrante formate dintr-un număr oarecare n de elemente (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, executînd translații rectilinii pe un plan de reazem aspru, în lungul unei aceeași axe (Δ) luată ca axă de referință Ox și legate între ele prin arcuri elicoidale (fig. 24.25).

Dacă componentele normale la planul comun de sprijin ale forțelor active aplicate elementelor sistemului vibrant considerat

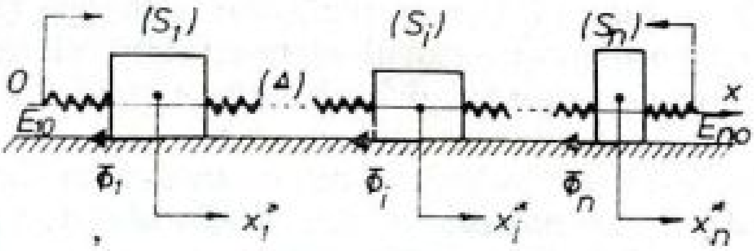


Fig. 24.25.

mai sus sînt constante, atunci și reacțiunile $\overline{N}_i$, exercitate de planul de sprijin asupra elementelor (S_i) sînt constante și deci și forțele rezultante de frecare la alunecare dezvoltate la contactul elementelor cu planul de sprijin vor fi constante, putîndu-se scrie următoarele expresii pentru valorile scalare, raportate la versorul $\overline{i}$ al axei Ox, ale acestor forțe :

$$\Phi_i = -(\text{sign}\,\dot{x}_{G_i})|\overline{\Phi}_i| = -(\text{sign}\,\dot{x}_{G_i})\,\mu_i\,|\overline{N}_i| \qquad (24.155)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde $(\text{sign}\,\dot{x}_{G_i})$ este funcția discontinuă definită astfel :

$$(\text{sign}\,\dot{x}_{G_i})\begin{cases} = +1 \text{ pentru } \dot{x}_{G_i} > 0, \\ = 0 \quad\;\, \text{pentru } \dot{x}_{G_i} = 0, \\ = -1 \text{ pentru } \dot{x}_{G_i} < 0, \end{cases} \qquad (24.156)$$

$\dot{x}_{G_i} = \dot{x}_i^*$ fiind valoarea scalară a vitezei de translație a elementului (S_i), raportată la același versor $\overline{i}$.

Forța generalizată corespunzătoare gradului de libertate k pentru aceste forțe de frecare la alunecare va avea deci expresia

$$Q_{a_k}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i \frac{\partial \overline{r}_{G_i}}{\partial q_k^*} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \frac{\partial x_{G_i}}{\partial x_k^*} = -\sum_{i=1}^{n} (\text{sign}\,\dot{x}_i^*)\,|\overline{\Phi}_i|\,\frac{\partial x_{G_i}}{\partial x_k^*},$$

sau încă, observînd că se poate scrie

$$\frac{\partial x_{G_i}}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}(x_{G_{i_{st}}} + x_i^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k^*} \begin{cases} = 1 \text{ pentru } i = k, \\ = 0 \text{ pentru } i \neq k, \end{cases}$$

mai rezultă

$$\boxed{\begin{gathered} Q_{a_k}^* = -(\text{sign}\,\dot{x}_k^*)\,|\overline{\Phi}_k| \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}}\,, \qquad (24.157)$$

$x_k^* = (x_{G_k} - x_{G_{k_{st}}})$ fiind, ca de obicei, parametrii lagrangeieni corespunzători acestui tip de sistem vibrant.

Întrucît, în condițiile precizate, forțele generalizate de frecare coulombiană sînt constante ca mărime, dar își schimbă semnul odată

Scanned with CamScanner

cu viteza generalizată $\dot{x}_k^*$, după fiecare alternanță a vibrației elementului respectiv, studiul mișcării unui asemenea sistem vibrant trebuie efectuat separat pentru fiecare interval de timp în care funcția discontinuă (sign $\dot{x}_k^*$) își păstrează semnul; legătura între două alternanțe succesive se realizează pe baza observației că elongația și viteza elementului (S_i) la sfîrșitul primei alternanțe reprezintă date inițiale pentru alternanța următoare.

2°. Caracteristicile dinamice generalizate de amortizare viscoasă

Considerînd modelul mai general de legătură elastică, adoptat și în primele două volume ale prezentei lucrări, care permite elementelor (S_i) și (S_j) cuplate prin el să execute mișcări elicoidale coaxiale, la deformarea lui vor acționa asupra elementelor cuplate, în cele două puncte teoretice de legătură A_{ij} și A_{ji} (fig. 24.26), în afara solicitărilor elastice, și cîte un *răsucitor al rezistențelor de amortizare*, admițînd ca axă centrală axa comună a mișcărilor elicoidale ale celor două elemente, luată atît ca axă fixă Oz, cît și ca axe $Q_iz'_i$ și $Q_jz'_j$ atașate elementelor presupunînd că și centrele de masă, G_i și G_j, ale elementelor se găsesc de asemenea pe axa Oz, componentele celor doi răsucitori în centrele de masă ale elementelor cuplate vor fi date de relațiile

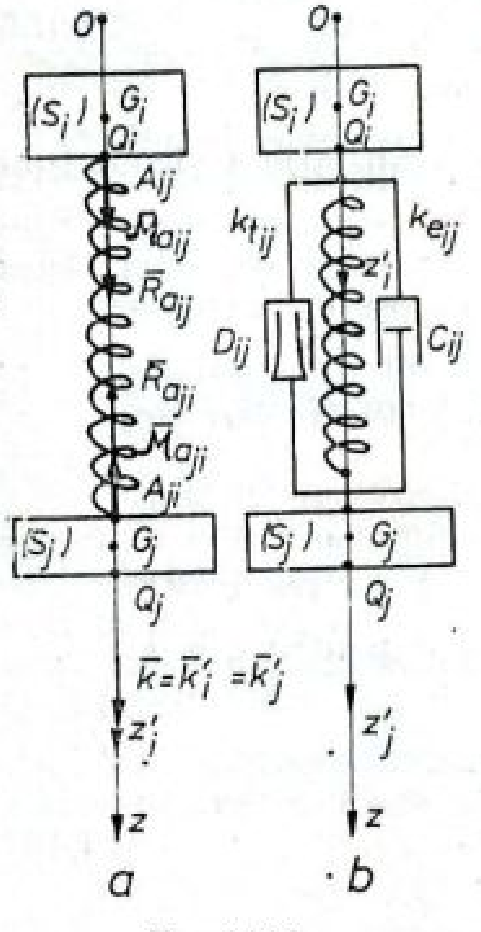


Fig. 24.26.

$$\overline{\mathcal{R}}_{a_{ij}} = -\overline{\mathcal{R}}_{a_{ji}} = -C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j}) = -C_{ij}(v_{G_i} - v_{G_j})\,\bar{k};$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{a_{ij}} = -\overline{\mathcal{M}}_{a_{ji}} = -D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j) = -D_{ij}(\omega_i - \omega_j)\,\bar{k}, \tag{24.158}$$

stabilite pe cale experimentală, cu coeficienții $C_{ij} = C_{ji}$ și $D_{ij} = D_{ji}$ putînd fi considerați, într-o primă aproximație, constanți.

Trebuie făcută însă precizarea că în realitate acești coeficienți de amortizare, C_{ij} și D_{ij}, pot depinde de deplasările relative $(z_i^* - z_j^*)$

(cu $z_i^* = z_{G_i} - z_{G_{i_{st}}}$ și $z_j^* = z_{G_j} - z_{G_{j_{st}}}$), respectiv $(\varphi_i^* - \varphi_j^*)$ (cu $\varphi_i^* = \varphi_i - \varphi_{i_{st}}$ și $\varphi_j^* = \varphi_j - \varphi_{j_{st}}$) ale elementelor cuplate, de vitezele lor relative, $(v_{G_i} - v_{G_j})$, respectiv $(\omega_i - \omega_j)$, și chiar de timp explicit, adică pot fi funcții de forma

$$C_{ij} = \Phi_{ij}((z_i^* - z_j^*)\,;\ (v_{G_i} - v_{G_j})\,;\ t),$$

$$D_{ij} = \psi_{ij}((\varphi_i^* - \varphi_j^*)\,;\ (\omega_i - \omega_j)\,;\ t), \tag{24.159}$$

în care caz se spune că *sistemul vibrant evoluează cu amortizare neliniară generală*, sau că *sistemul vibrant are amortizare cu caracteristică neliniară generală*, denumirea de „neliniară'' fiind justificată de observația că în condițiile (24.159) graficele variațiilor solicitărilor de amortizare $|\overline{\mathscr{R}}_{a_{ij}}|$, respectiv $|\overline{\mathscr{M}}_{a_{ij}}|$, în funcție de vitezele relative $(v_{G_i} - v_{G_j})$, respectiv $(\omega_i - \omega_j)$, nu sînt segmente de drepte, ci porțiuni de curbe, mai mult sau mai puțin complicate.

În aplicațiile tehnice curente, cele două serii de coeficienți de amortizare sînt considerați fie ca funcții numai de cîte una singură dintre variabilele care apar în relațiile (24.159), fie — și aceasta cel mai adesea — constanți, rezultînd de aici următoarele patru tipuri de amortizări vîscoase uzuale :

— *Amortizare vîscoasă parametrică*, cînd coeficienții de amortizare depind numai de timp, adică relațiile (24.159) iau formele particulare

$$C_{ij} = \Phi_{ij}(t) = C_{ij}(t)\,;\ D_{ij} = \psi_{ij}(t) = D_{ij}(t), \tag{24.160}$$

aceste variații în timp datorîndu-se fie unor modificări structurale în timp a materialelor din care sînt confecționate elementele elastice de legătură, fie unor modificări în timp a compozițiilor chimice ale fluidelor de amortizare în care sînt implantate, de multe ori, elementele elastice.

— *Amortizare vîscoasă cu caracteristică neliniară dependentă de deplasări*, corespunzătoare cazului cînd coeficienții de amortizare depind numai de deplasările relative ale elementelor cuplate, adică relațiile (23.186) iau formele simplificate

$$C_{ij} = \Phi_{ij}(z_i^* - z_j^*),$$

$$D_{ij} = \psi_{ij}(\varphi_i^* - \varphi_j^*) \tag{24.161}$$

și, în particular, formele

$$C_{ij} = C^0_{ij}[\alpha_{ij}|z^*_i - z^*_j| - 1],$$
$$D_{ij} = D^0_{ij}[\beta_{ij}|\varphi^*_i - \varphi^*_j| - 1], \qquad (24.162)$$

cu C^0_{ij}, D^0_{ij}, α_{ij} și β_{ij} constante pozitive.

În ultima situație, întîlnită în unele aplicații tehnice, se va observa că în cazul deplasărilor relative mici, satisfăcînd condițiile

$$|z^*_i - z^*_j| < \frac{1}{\alpha_{ij}}\ ; \quad |\varphi^*_i - \varphi^*_j| < \frac{1}{\beta_{ij}}, \qquad (24.163)$$

vor rezulta consecințele

$$C_{ij} < 0\ ; \quad D_{ij} < 0, \qquad (24.164)$$

din care motiv se va spune că *sistemul vibrant are amortizare negativă*, iar în cazul deplasărilor relative mari, satisfăcînd condițiile

$$|z^*_i - z^*_j| > \frac{1}{\alpha_{ij}}\ ; \quad |\varphi^*_i - \varphi^*_j| > \frac{1}{\beta_{ij}}, \qquad (24.165)$$

vor rezulta, în baza relațiilor (24.162), consecințele

$$C_{ij} > 0\ ; \quad D_{ij} > 0, \qquad (24.166)$$

în baza cărora se va spune că *sistemul vibrant are amortizare pozitivă*.

Se înțelege că, în funcție de valorile deplasărilor relative la translație și rotație ale elementelor cuplate, un același sistem vibrant poate evolua un timp, ca urmare a imprimării unor valori inițiale mari ale deplasărilor relative, cu amortizare pozitivă, după care, odată cu micșorarea valorilor acestor deplasări relative, să evolueze cu amortizare negativă.

— *Amortizare vîscoasă cu caracteristică neliniară dependentă de viteze*, cînd coeficienții de amortizare depind numai de vitezele relative de translație, respectiv unghiulare, ale elementelor cuplate, adică relațiile (24.161) iau formele

$$C_{ij} = \Phi_{ij}(v_{G_i} - v_{G_j}),$$
$$D_{ij} = \psi_{ij}(\omega_i - \omega_j), \qquad (24.167)$$

şi, în particular, formele

$$C_{ij} = C_{ij}^0 \,|\, v_{G_i} - v_{G_j} \,|\,; \quad D_{ij} = D_{ij}^0 \,|\, \omega_i - \omega_j \,|, \qquad (24.168)$$

cu C_{ij}^0 şi D_{ij}^0 constante pozitive.

— *Amortizare vîscoasă cu caracteristică liniară*, corespunzătoare condițiilor

$$C_{ij} = C_{ij}^0\,; \quad D_{ij} = D_{ij}^0, \qquad (24.169)$$

C_{ij}^0 şi D_{ij}^0 fiind şi acum constante pozitive.

În cele ce urmează, se va lua în considerație numai cazul amortizării cu caracteristică liniară, cel mai des întîlnit în aplicațiile tehnice curente, pentru care torsorii, în centrele de masă G_i, ale rezistențelor de amortizare exercitate asupra elementelor (S_i) ca urmare a cuplajului elastic al lor cu elementele (S_j), vor avea formele

$$\mathcal{T}_{G_i}(\overline{R}_{aij}) = \begin{cases} \overline{R}_{aij} = -\,C_{ij}^0(\overline{v}_{G_i} - \overline{v}_{G_j}), \\ \overline{\mathcal{M}}_{aij} = -\,D_{ij}^0(\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_j). \end{cases} \qquad (24.170)$$

În cazul cînd elementul (S_i) al sistemului vibrant este legat printr-un element elastic cu amortizare liniară de un corp (S^*) din mediul înconjurător, care execută, la rîndul lui, o mişcare elicoidală coaxială cu cea a elementului (S_i) cu parametrii cinematici $\overline{v}_{E_{i_*}}$ şi $\overline{\omega}_{E_{i_*}}$, atunci răsucitorul rezistențelor de amortizare care acționează asupra elementului (S_i) ca urmare a acestei legături va fi scris sub forma folosită şi în dinamica sistemelor de rigide, adică

$$\mathcal{T}_{G_i}(\overline{R}_{a_{i_*}}) = \begin{cases} \overline{R}_{ai_*} = -\,C_{i_*}^0(\overline{v}_{G_i} - \overline{v})_{E_{i_*}} = -\,C_{i_*}^0\overline{v}_{G_i} + C_{i_*}^0\overline{v}_{E_{i_*}} \\ \overline{\mathcal{M}}_{a_{i_*}} = -\,D_{i_*}^0(\overline{\omega}_i - \overline{\omega}_{E_{i_*}}) = -\,D_{i_*}^0\overline{\omega}_i + D_{i_*}^0\overline{\omega}_{E_{i_*}}, \end{cases}$$

$$(24.171)$$

termenii

$$\overline{R}_{ai_{*d}} = -\,C_{i_*}^0\overline{v}_{G_i}\,; \quad \overline{\mathcal{M}}_{ai_{*d}} = -\,D_{i_*}^0\overline{\omega}_i \qquad (24.172)$$

reprezentînd şi aici *componentele disipative* ale torsorilor rezistențelor de amortizare exterioară, iar termenii

$$\overline{R}_{ai_{*pt}} = C_{i_*}^0\overline{v}_{E_{i_*}} = \overline{R}_{ai_{*pt}}(t)\,; \quad \overline{\mathcal{M}}_{ai_{*pt}} = D_{i_*}^0\overline{\omega}_{E_{i_*}} = \overline{\mathcal{M}}_{ai_{*pt}}(t), \qquad (24.173)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

purtînd, ca și în dinamica sistemelor de rigide, denumirea de *componentele perturbatoare* ale torsorilor rezistențelor de amortizare exterioară și jucînd rolul de solicitări active de excitație.

Forțele generalizate corespunzătoare componentelor disipative ale răsucitorilor de amortizare exterioară vor fi date de relațiile (13.243), stabilite în cel de-al doilea volum al lucrării, relații care vor fi retranscrise însă cu convenția de notații adoptată în mecanica vibrațiilor, adică

$$Q^*_{ext_{Ra_k}} = -\frac{\partial \mathscr{R}^*_{extka}}{\partial \dot{q}^*_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{24.174}$$

cu funcția disipativă a lui Rayleigh corespunzătoare avînd, în baza relațiilor (13.244) și (13.253), forma

$$\mathscr{R}^*_{ext_{Ra}} = \frac{1}{2}\sum_i [C^0_{i_*} v^2_{G_*} + D^0_{i_*} \overline{\omega}^2_i] = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} \beta^*_{ext_{hj}}\, \dot{q}^*_h\, \dot{q}^*_j \tag{24.175}$$

și cu coeficienții formei patratice în vitezele generalizate date și acum de relațiile (13.252) (cu : $c_{Ri_*} = 0$ și $k_{Ri_*} = 0$), dar retranscrise sub forma

$$\beta^*_{ext_{hj}} = \sum_i \left[C^0_{i_*} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q^*_h} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q^*_j} + D^0_{i_*} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_h} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_j} \right]$$
$$(h, j = 1, 2, \ldots, r). \tag{24.176}$$

De asemenea, forțele generalizate corespunzătoare răsucitorilor rezistențelor de amortizare interioară vor fi date de relațiile (13.261), retranscrise acum sub forma

$$Q^*_{int_{Ra_k}} = -\frac{\partial \mathscr{R}^*_{int_{Ra}}}{\partial q^*_k}, \tag{24.177}$$

cu funcția disipativă a lui Rayleigh corespunzătoare determinată printr-o relație analogă relației (13.262), adică

$$R^*_{int_{Ra}} = \frac{1}{2}\sum_{(Ae_{ij})} [C^0_{ij}(v_{G_i} - v_{G_j})^2 + D^0_{ij}(\omega_i - \omega_j)^2] = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} \beta^*_{int_{hj}}\, \dot{q}^*_h\, \dot{q}^*_j, \tag{24.178}$$

Scanned with CamScanner

în care coeficienții formei pătratice în vitezele generalizate vor fi dați de relațiile (13.263), retranscrise sub forma

$$\beta_{int_{hj}} = \sum_{(Ae_{ij})} \left[C_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial q_h^*} (z_{G_i} - z_{G_j}) \frac{\partial}{\partial q_j^*} (z_{G_i} - z_{G_j}) + \right.$$

$$\left. + D_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial q_h^*} (\varphi_i - \varphi_j) \frac{\partial}{\partial q_j^*} (\varphi_i - \varphi_j) \right]. \qquad (24.179)$$

Forțele generalizate totale de amortizare vor avea, în consecință, expresiile

$$Q_{a_k}^* = Q_{ext Ra_k}^* + Q_{int Ra_k}^* = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k^*} (\mathscr{R}_{ext Ra}^* + \mathscr{R}_{int Ra}^*) = - \frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial \dot{q}_k^*}, \qquad (24.180)$$

cu funcția disipativă totală a lui Rayleigh determinată prin relația

$$\mathscr{R}^* = \mathscr{R}_{ext Ra}^* + \mathscr{R}_{int Ra}^* = \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{r} \beta_{hj}^* \dot{q}_h^* \dot{q}_j^*, \qquad (24.181)$$

în care coeficienții β_{hj}^* vor avea valorile

$$\beta_{hj}^* = \beta_{ext_{hj}}^* + \beta_{int_{hj}}^* = \beta_{hj}^* (q^*). \qquad (24.182)$$

Observînd că pot fi scrise egalitățile

$$\frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial \dot{q}_k^*} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k^*} \left[\frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{r} \beta_{hj}^* \dot{q}_h^* \dot{q}_j^* \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}^* \dot{q}_j^* + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{r} \beta_{hk}^* \dot{q}_h^*,$$

cu cele două grupuri de termeni din membrul drept identice, vor rezulta următoarele expresii finale pentru forțele generalizate totale de amortizare :

$$\boxed{Q_{dk}^* = - \sum_{h=1}^{r} \beta_{kh}^* \dot{q}_h^*} \qquad (24.183)$$

Coeficienții β_{hj}^* din expresiile precedente ale forțelor generalizate disipative totale vor reprezenta *caracteristicile dinamice genera-*

Scanned with CamScanner

lizate de amortizare vîscoasă şi vor forma o matrice pătratică simetrică ($\beta^*_{hj} = \beta^*_{jh}$), notată cu simbolul

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \beta^*_{11} & \beta^*_{12} & \dots & \beta^*_{1j} & \dots & \beta^*_{1r} \\ \beta^*_{21} & \beta^*_{22} & \dots & \beta^*_{2j} & \dots & \beta^*_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta^*_{h1} & \beta^*_{h2} & \dots & \beta^*_{hj} & \dots & \beta^*_{hr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta^*_{r1} & \beta^*_{r2} & \dots & \beta^*_{rj} & \dots & \beta^*_{rr} \end{Vmatrix}, \tag{24.184}$$

care va fi numită *matricea de amortizare vîscoasă a sistemului vibrant*; întrucît relaţiile (24.176) şi (24.178) arată că forma pătratică (24.183) în vitezele generalizate este pozitiv definită, rezultă că matricea **B** este nesingulară, adică este satisfăcută condiţia

$$\det \mathbf{B} \neq 0. \tag{24.185}$$

Prin introducerea matricei (24.184), expresiile (23.212) ale forţelor generalizate totale de amortizare vor mai putea fi scrise sub următoarea formă concentrată matriceală:

$$\boxed{\mathbf{Q}^*_d = -\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{q}}^*}. \tag{24.186}$$

Considerînd şi acum numai cazul sistemelor mecanice ce execută mişcări vibratorii în jurul poziţiilor lor de echilibru stabil, se vor dezvolta în serii Mac Laurin, în jurul valorilor $q^*_k = q_{k_{st}} = 0$, coeficienţii β^*_{hj} din expresiile (24.183) ale forţelor generalizate de amortizare, adică se vor scrie relaţiile

$$\beta^*_{hj} = (\beta^*_{hj})_{q^*=0} + \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{\partial \beta^*_{hj}}{\partial q^*_l}\right)_{q^*=0} w_l + \dots, \tag{24.187}$$

dezvoltările putînd fi însă oprite chiar la primul termen, adică se poate scrie

$$\beta^*_{hj} \approx (\beta^*_{hj})_{q^*=0} = b_{hj}, \quad (h,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ r), \tag{24.188}$$

Scanned with CamScanner

cu b_{hj} constanți, această aproximare fiind justificată de faptul că în relațiile (24.183) coeficienții β_{kh} trebuie înmulțiți acum numai cu mărimile $\dot{w}_h$, relativ mici în condițiile unor vibrații în jurul poziției de echilibru stabil, ca și variațiile w_k ale parametrilor lagrangeieni.

În consecință, expresiile (24.183) ale forțelor generalizate de amortizare vor lua în aceste condiții formele particulare

$$\boxed{\begin{gathered} Q^*_{d_k} = -\sum_{h=1}^{r} b_{kh}\,\dot{w}_h \\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r) \end{gathered}}, \tag{24.189}$$

cu coeficienții b_{kh}, care vor reprezenta *caracteristicile dinamice de amortizare vîscoasă ale sistemului vibrant în jurul poziției de echilibru stabil* — formînd o matrice simetrică, ($b_{kh} = b_{hk}$), notată tot cu simbolul **B**, dar cu elementele constante, adică

$$\boxed{\mathbf{B} = \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{h1} & b_{h2} & \ldots & b_{hj} & \ldots & b_{hr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rj} & \ldots & b_{rr} \end{matrix}\right\|}, \tag{24.190}$$

care satisface, de asemenea, condiția de nesingularitate

$$\boxed{\det\ \mathbf{B} \neq 0} \tag{24.191}$$

și care va fi numită *matricea de amortizare vîscoasă a sistemului vibrant în jurul poziției de echilibru stabil.*

Se înțelege că prin introducerea acestei matrice, și expresiile (23.216) ale forțelor de amortizare vîscoasă vor putea fi retranscrise sub forma concentrată matriceală :

$$\boxed{\mathbf{Q}^*_d = -\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{w}}}, \tag{24.192}$$

$\dot{\mathbf{w}}$ fiind matricea coloană formată cu elementele $\dot{w}_h$.

Scanned with CamScanner

În continuare, vor fi stabilite expresiile concrete ale caracteristicilor dinamice generalizate de amortizare viscoasă corespunzătoare mișcărilor vibratorii în jurul poziției de echilibru stabil pentru cele două sisteme vibrante particulare, dar foarte des întîlnite în aplicațiile tehnice, menționate și atunci cînd s-a vorbit de solicitările conservative : sistemul vibrant constituit din elemente cuplate în serie prin arcuri elicoidale și executînd translații rectilinii în lungul aceleiași axe și sistemul vibrant constituit din elemente cuplate în serie prin arcuri spirale și executînd rotații în jurul aceleiași axe fixe.

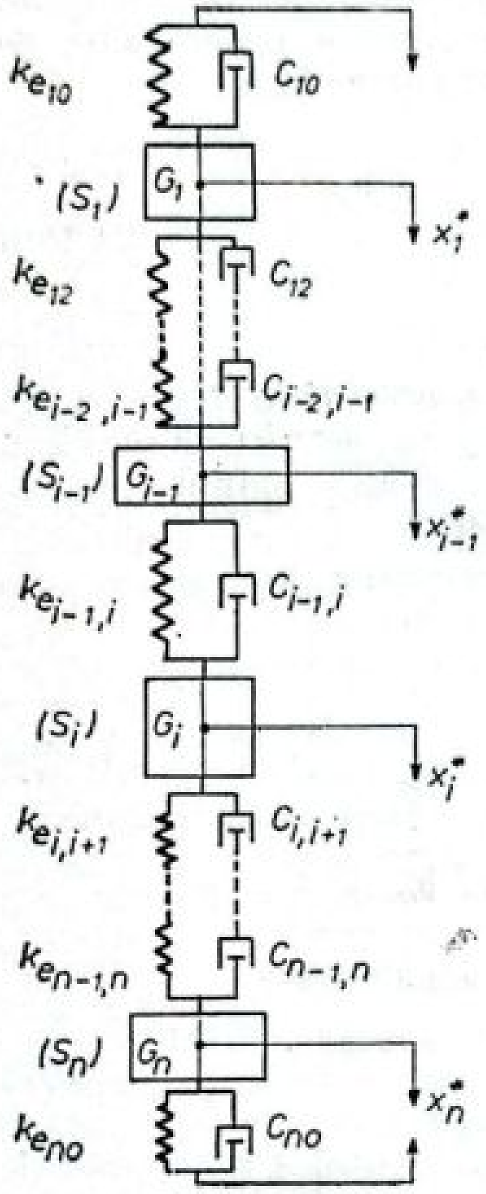


Fig. 24.27.

a) *Caracteristicile dinamice generalizate de amortizare viscoasă corespunzătoare sistemelor vibrante cu elementele cuplate elastic în serie și executînd translații rectilinii în lungul aceleiași axe.* Se va considera și acum un sistem vibrant cu $r = n$ grade de libertate, format dintr-un număr de n elemente (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, legate în serie prin arcuri elicoidale cu amortizări cu caracteristici liniare $(C_{i,i-1} = C^0_{i,i-1})$ și executînd translații rectilinii în lungul axei Ox (fig. 24.27).

Întrucît se vor studia vibrațiile acestui sistem în jurul poziției de echilibru stabil, se vor putea alege și acum diferențele $(x_{G_k} - x_{G_{k_{st}}})$ drept coordonate lagrangeiene ale sistemului vibrant, ele coincizînd astfel și cu variațiile parametrilor lagrangeieni, adică vor rezulta relațiile

$$q_k^* = x_{G_k} - x_{G_{k_{st}}} = x_k^* = w_k, \tag{24.193}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

cu consecințele

$$\dot{q}_k^* = \dot{x}_{G_k} = \dot{x}_k = \dot{w}_k, \tag{24.194}$$

în baza cărora, expresia (24.181) a funcției disipative totale a lui Rayleigh, cu cei doi termeni ai ei determinați prin relațiile (24.175) și (24.178), (cu $\varphi_i \equiv 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$), va lua forma particulară

$$\mathscr{R}^* = \frac{1}{2} C^0_{10}\, \dot{x}^{*2}_1 + \frac{1}{2} C^0_{n0}\, \dot{x}^{*2}_n + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} C^0_{i,i-1}(\dot{x}^*_i - \dot{x}^*_{i-1})^2,$$

sau încă, folosind o convenție de notare analoagă convenției (24.82), adică introducînd termenii

$$\dot{x}^*_0 = \dot{x}^*_{n+1} = 0, \tag{24.195}$$

mai rezultă

$$\boxed{\mathscr{R}^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} C^0_{i,i-1}(\dot{x}^*_i - \dot{x}^*_{i-1})^2} . \tag{24.196}$$

În consecință, forțele generalizate de amortizare viscoasă vor avea expresiile

$$Q^*_{d_k} = -\frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial \dot{q}^*_k} = -\frac{\partial \mathscr{R}^*}{\partial \dot{x}^*_k} = -\sum_{i=1}^{n+1} C^0_{i,i-1}(\dot{x}^*_i - \dot{x}^*_{i-1})\frac{\partial}{\partial \dot{x}^*_k}(\dot{x}^*_i - \dot{x}^*_{i-1}),$$

sau încă, observind că numai termenii corespunzători valorilor $i = k$ și $i = k + 1$ vor avea derivate parțiale în raport cu $\dot{x}^*_k$ diferite de zero, mai rezultă

$$Q^*_{d_k} = -C^0_{k,k-1}(\dot{x}^*_k - \dot{x}^*_{k-1}) + C^0_{k+1,k}(\dot{x}^*_{k+1} - \dot{x}^*_k),$$

adică

$$\boxed{\begin{gathered} Q^*_{d_k} = C^0_{k,k-1}\, \dot{x}^*_{k-1} - (C^0_{k,k-1} + C^0_{k+1,k})\, \dot{x}^*_k + C^0_{k+1,k}\, \dot{x}^*_{k+1}, \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}} \tag{24.197}$$

cu

$$Q^*_{d_1} = -(C^0_{10} + C^0_{21})\,\dot{x}_1 + C^0_{21}\,\dot{x}^*_2 \tag{24.198}$$

și

$$Q^*_{d_n} = C^0_{n,n-1}\,\dot{x}^*_{n-1} - (C^0_{n,n-1} + C^0_{n0})\,\dot{x}^*_n, \tag{24.199}$$

ca urmare a condițiilor (24.195).

Scanned with CamScanner

Expresiile (24.197) ale forțelor generalizate de amortizare viscoasă scot în evidență direct valorile caracteristicilor dinamice generalizate de amortizare corespunzătoare sistemului vibrant considerat în fig. 24.27, acestea fiind

$$b_{hj}\begin{cases} = \quad 0 & \text{pentru} \quad j \neq h-1,\ h,\ h+1, \\ = -C^0_{h,h-1} & \text{pentru} \quad j = h-1, \\ = \quad (C^0_{h,h-1} + C^0_{h+1,h}) & \text{pentru} \quad j = h, \\ = -C^0_{h,h+1} & \text{pentru} \quad j = h+1, \end{cases} \tag{24.200}$$

$$(h, j = 1, 2, \ldots, n).$$

În consecință, matricea de amortizare viscoasă a sistemului vibrant considerat în fig. 24.27 va avea forma

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{h,h-1} & b_{hh} & b_{h,h+1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_{n-1,n-2} & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

(24.201)

b) *Caracteristicile dinamice generalizate de amortizare vîscoasă corespunzătoare sistemelor vibrante cu elemente cuplate elastic în serie și executînd rotații în jurul aceleiași axe fixe.*

Se va lua în considerație și aici sistemul vibrant cu $r = n$ grade de libertate format din n elemente (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, legate în serie prin arcuri spirale cu amortizare cu caracteristică liniară $(D_{i,i-1} = D^0_{i,i-1}\,;\ \ i = 1, 2, \ldots, n+1)$ și executînd rotații în jurul aceleiași axe fixe $(\Delta \equiv Oz)$, de versor $\bar{k}$, (fig. 24.28), versor la care vor fi raportate atît semnele unghiurilor de rotație ale elementelor, cît și valorile scalare ale momentelor de amortizare.

Scanned with CamScanner

Alegînd și acum drept coordonate generalizate ale sistemului vibrant unghiurile de rotație ale elementelor raportate la pozițiile lor de echilibru static, vor rezulta și aici concluziile

$$q_k^* = \varphi_k - \varphi_{k_{st}} = \varphi_k^* = w_k, \tag{24.202}$$

cu consecințele

$$\dot{q}_k^* = \dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k^* = \dot{w}_k, \tag{24.203}$$

în baza cărora expresia (24.181) a funcției disipative totale a lui Rayleigh, în care, în expresiile (24.175) și (24.178) ale celor doi termeni ai ei se vor face înlocuirile $v_{G_i} \equiv 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, va lua următoarea formă particulară, corespunzătoare acestui tip de sistem vibrant

$$\mathcal{R}^* = \frac{1}{2} D_{10}^0 \dot{\varphi}_1^{*2} + \frac{1}{2} D_{n_0}^0 \dot{\varphi}_n^{*2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} D_{i,i-1}^0 (\dot{\varphi}_i^* - \dot{\varphi}_{i-1}^*)^2,$$

sau încă, introducînd și acum termenii

$$\dot{\varphi}_0^* = \dot{\varphi}_{n+1}^* = 0, \tag{24.204}$$

se mai poate scrie

$$\boxed{\mathrm{R}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} D_{i,i-1}^0 (\dot{\varphi}_i^* - \dot{\varphi}_{i-1}^*)^2} \cdot \tag{24.205}$$

Trecînd la calculul forței generalizate de amortizare corespunzătoare gradului de libertate k, se va observa și aici că numai termenii corespunzător valorilor $i = k$ și $i = k + 1$ vor admite derivate parțiale diferite de zero în raport cu viteza generalizată $\dot{\varphi}_k^*$, adică se va putea scrie

$$Q_{d_k}^* = -\frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_k^*} = -\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\varphi}_k^*} =$$

$$= -D_{k,k-1}^0 (\dot{\varphi}_k^* - \dot{\varphi}_{k-1}^*) + D_{k+1,k}^0 (\dot{\varphi}_{k+1}^* - \dot{\varphi}_k^*)$$

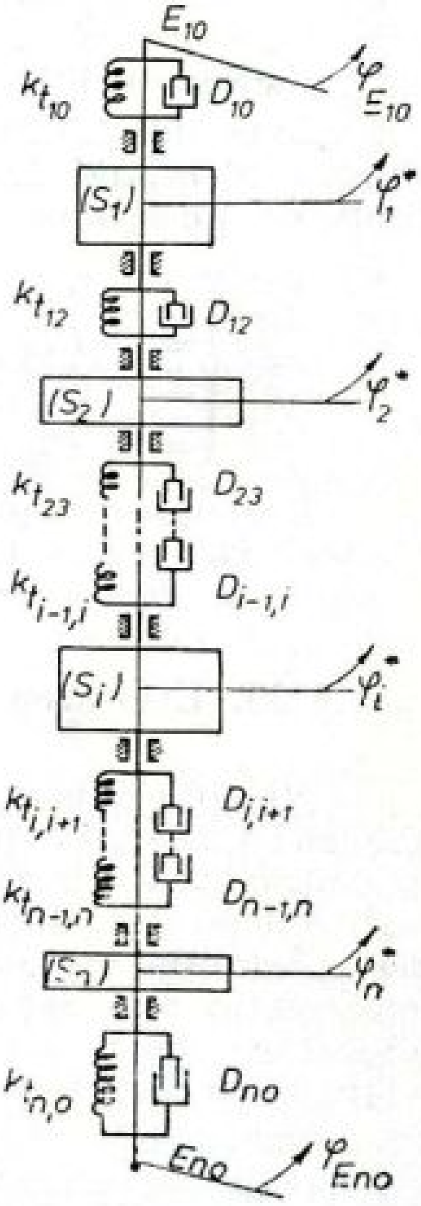


Fig. [illegible]

CamScanner

sau încă

$$\boxed{Q^*_{d_k} = D^0_{k,k-1}\,\dot{\varphi}^*_{k-1} - (D^0_{k,k-1} + D^0_{k+1,k})\,\dot{\varphi}^*_k + D^0_{k+1,k}\,\dot{\varphi}^*_{k+1}}, \qquad (24.206)$$

cu

$$Q^*_{d_1} = -\,(D^0_{10} + D^0_{21})\,\dot{\varphi}^*_1 + D^0_{12}\dot{\varphi}^*_2 \qquad (24.207)$$

și

$$Q^*_{d_n} = D^0_{n,n-1}\,\dot{\varphi}^*_{n-1} - (D^0_{n,n-1} + D^0_{n0})\,\dot{\varphi}^*_n, \qquad (24.208)$$

ca urmare a condițiilor (24.204).

Expresiile (24.206) ale forțelor generalizate de amortizare viscoasă evidențiază direct valorile caracteristicilor dinamice generalizate de amortizare viscoasă, acestea fiind

$$b_{hj}\begin{cases} = \quad 0 & \text{pentru } j \neq h-1,\, h,\, h+1, \\ = -\,D^0_{h,h-1} & \text{pentru } j = h-1, \\ = \quad (D^0_{h,h-1} + D^0_{h+1,h}) & \text{pentru } j = h, \\ = -\,D^0_{h,h+1} & \text{pentru } j = h+1. \end{cases} \qquad (24.209)$$

Este ușor de observat că și în acest caz matricea de amortizare viscoasă va avea tot forma (22.201).

§ 25. Excitarea sistemelor vibrante

Mișcările vibratorii în jurul pozițiilor de echilibru static ale sistemelor mecanice întîlnite curent în aplicațiile practice se efectuează, cel mai adesea, sub acțiunea unor solicitări active neconservative depinzînd, după legi cunoscute, numai de timp, numite *excitații* și care sînt aplicate unora din elementele sistemelor vibrante fie cu intenție, prin intermediul unor generatoare de excitații numite *excitatoare*, fie în mod nedorit, ca urmare a legăturilor sistemelor vibrante cu corpuri în mișcare din mediul înconjurător.

Paragraful de față își propune să prezinte caracteristicile fundamentale ale excitațiilor, precum și principiile constructive ale principalelor tipuri de excitatoare folosite în tehnică.

Scanned with CamScanner

25.1. *Clasificarea și caracterizarea excitațiilor*

În funcție de posibilitatea previziunii dependenței de timp a evoluției solicitărilor de excitație, acestea din urmă se pot împărți în următoarele două categorii :

— *excitații deterministe*, reprezentate prin solicitările de excitație cu evoluții previzibile în timp, exprimabile fie analitic, fie grafic, fie tabelar ;

— *excitații aleatoare*, reprezentate prin solicitările de excitație care intervin în mod accidental în procesele vibratorii, cu evoluții imprevizibile în timp, datorită prezenței unor factori externi necontrolabili.

25.1.1. Caracterizarea excitațiilor deterministe

Considerînd, în continuare, numai cazul care interesează în cea mai mare măsură aplicațiile tehnice concrete, cînd excitațiile pot fi exprimate analitic, se va face mai întîi observația că dependențele temporale

$$F_{ex_i} = F_{ex_i}(t)\,; \quad \mathcal{M}_{ex_i} = \mathcal{M}_{ex_i}(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (25.1)$$

— unde F_{ex_i} și $\mathcal{M}_{ex_i}$ sînt valorile scalare ale componentelor torsorilor în centrele de masă G_i ai solicitărilor de excitație exercitate asupra elementelor (S_i) ale sistemului vibrant, valori raportate la anumiți versori aleși pentru direcțiile acestor solicitări — , vor putea fi realizate sub una din următoarele patru forme principale :

— *ca acțiuni persistente cu evoluții variabile*, cînd funcțiile $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ variază — fie continuu, fie cu discontinuități — pe un interval finit, de același ordin de mărime cu intervalul în care se studiază mișcarea sistemului vibrant ;

— *ca acțiuni persistente cu evoluții în trepte*, cînd funcțiile $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ se reduc la anumite] valori constante pentru un interval finit $[t_1, t_2]$ al duratei procesului vibratoriu, luînd valori zero în afara intervalului, cu considerarea atît a instalării, cît și a încetării, acțiunilor excitante ca producîndu-se instantaneu ;

— *ca acțiuni cu caracter de undă de șoc*, atunci cînd solicitările de excitație acționează pe o durată finită $\mathcal{T}$, cu graficele variațiilor

Scanned with CamScanner

$F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ în această durată — numite *unde de șoc* — prezentîndu-se sub forma unor curbe continue, sau continue pe porțiuni;

— *ca acțiuni cu caracter impulsiv*, atunci cînd solicitările de excitație acționează cu intessități foarte mari, dar numai în intervale de timp foarte mici.

În continuare, vor fi prezentate principalele tipuri de excitații deterministe întîlnite în practica inginerească.

a) *Excitații deterministe persistente cu evoluții variabile în timp.* Din această grupă de excitații, cel mai mare interes pentru aplicațiile tehnice il prezintă excitațiile cu evoluții continue și periodice în timp, adică satisfăcind condițiile

$$F_{ex_i}(t + hT_i) = F_{ex_i}(t); \quad \mathcal{M}_{ex_i}(t + hT_i) = \mathcal{M}_{ex_i}(t), \tag{25.2}$$

$$(i = 1,2 \ldots, n; \quad h = 1, 2, 3, \ldots),$$

cu funcțiile $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ satisfăcind și condițiile de dezvoltare în serie Fourier; mai mult, seriile trigonometrice corespunzătoare acestor dezvoltări sînt, de regulă, foarte rapid convergente, fapt care justifică exprimarea acestor tipuri de solicitări sub forma unor polinoame trigonometrice de un ordin oarecare l_i, adică se folosesc expresiile

$$F_{ex_i} = \frac{1}{2} F_{i0} + \sum_{\lambda=1}^{l_i} F_{i\lambda} \sin(\lambda k_i t + \alpha_{i\lambda}), \tag{25.3}$$

$$\mathcal{M}_{ex_i} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{i0} + \sum_{\lambda=1}^{l_i} \mathcal{M}_{i\lambda} \sin(\lambda k_i t + \beta_{i\lambda}),$$

unde

$$k_i = \frac{2\pi}{T_i} \tag{25.4}$$

este *pulsația fundamentală a excitațiilor*,

$$k_{i\lambda} = \lambda k_i = \lambda \frac{2\pi}{T_i} \tag{25.5}$$

sînt *pulsațiile armonicelor de ordinul* λ *ale excitațiilor*, $F_{i\lambda}$ și $\mathcal{M}_{i\lambda}$ sînt *amplitudinile armonicelor de ordinul* λ *ale excitațiilor*, iar $\alpha_{i\lambda}$ și $\beta_{i\lambda}$ sînt *fazele inițiale ale armonicelor de ordinul* λ *ale excitațiilor*; calculul amplitudinilor și fazelor inițiale ale diverselor armonici ale ex-

Scanned with CamScanner

citațiilor se face după aceleași reguli, expuse în § 21, după care s-au calculat și amplitudinile și fazele inițiale ale armonicilor vibrațiilor periodice, adică, plecîndu-se de la ecuațiile ce definesc variațiile solicitărilor de excitație în intervalul unei perioade:

$$\begin{cases} F_{ex_i} = F_i(t) & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \mathcal{M}_{ex_i} = \mathcal{M}_i(t) & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{25.6}$$

se vor calcula mai întîi coeficienții seriilor Fourier corespunzători acestor solicitări cu ajutorul formulelor

$$\begin{cases} F_{i0} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} F_i(t)\,\mathrm{d}t & \mathcal{M}_{i0} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} \mathcal{M}_i(t)\,\mathrm{d}t \\ F'_{i\lambda} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} F_i(t)\cos(\lambda k_i t)\,\mathrm{d}t, \text{ respectiv } & \mathcal{M}'_{i\lambda} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} \mathcal{M}_i(t)\cos(\lambda k_i t)\,\mathrm{d}t \\ F''_{i\lambda} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} F_i(t)\sin(\lambda k_i t)\,\mathrm{d}t & \mathcal{M}''_{i\lambda} = \dfrac{k_i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{k_i}} \mathcal{M}_i(t)\sin(\lambda k_i t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{25.7}$$

și apoi se vor calcula și amplitudinile și fazele inițiale ale diverselor armonici ale excitațiilor, cu ajutorul relațiilor

$$F_{i_\lambda} = \sqrt{F'^2_{i\lambda} + F''^2_{i\lambda}}\,; \quad \alpha_{i\lambda} = \operatorname{arctg}\frac{F'_{i\lambda}}{F''_{i\lambda}}, \tag{25.8}$$

respectiv

$$\mathcal{M}_{i_\lambda} = \sqrt{\mathcal{M}'^2_{i\lambda} + \mathcal{M}''^2_{i\lambda}}\,; \quad \beta_{i_\lambda} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathcal{M}'_{i\lambda}}{\mathcal{M}''_{i\lambda}}. \tag{25.9}$$

Excitațiile exprimate prin polinoame trigonometrice de forma (25.3) se numesc *excitații poliarmonice* și ele pot fi caracterizate prin dependența amplitudinilor și fazelor inițiale de pulsațiile (frecvențele) corespunzătoare; prima dependență poate fi evidențiată, ca și în cazul vibrațiilor periodice, prin *spectrogramele excitațiilor respective*, reprezentate în fig. 25.1, *a* pentru forțele de excitație și în fig. 25.1, *b* pentru momentele de excitație.

Scanned with CamScanner

În cazul cînd expresiile (25.3) ale solicitărilor de excitație se reduc numai la primul termen al polinoamelor trigonometrice, adică

$$F_{ex_i} = F_{i0} \sin(k_i t); \quad \mathcal{M}_{exi} = \mathcal{M}_{i1} \sin(k_i t), \tag{25.10}$$

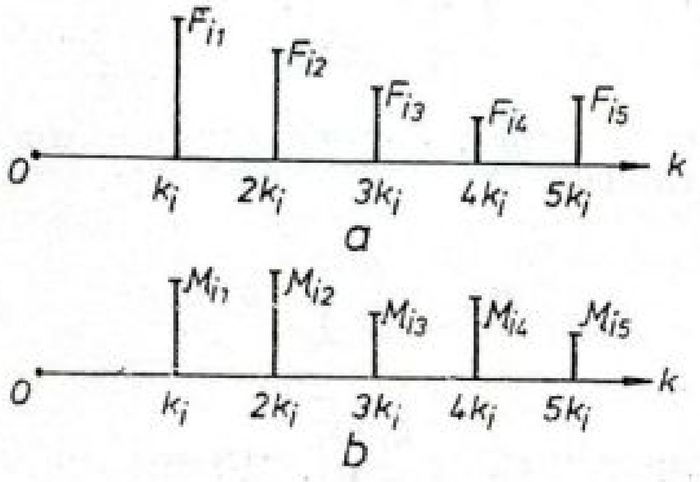


Fig. 25.1

solicitările respective se numesc *excitații armonice*, iar în cazul cînd expresiile menționate se reduc numai la primii doi termeni ai polinoamelor trigonometrice, solicitările de excitație se numesc *excitații biarmonice*.

În situațiile cînd funcțiile $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ sînt funcții continue de timp, dar neperiodice, solicitările de excitație se numesc și ele *excitații neperiodice*, cele mai frecvente tipuri de asemenea excitații neperiodice fiind:

— *excitațiile liniare*, corespunzătoare următoarelor forme ale funcțiilor $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$

$$F_{ex_i} = F_i^0 t; \quad \mathcal{M}_{ex_i} = \mathcal{M}_i^0 t, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.11}$$

cu F_i^0 și $\mathcal{M}_i^0$ constante;

— *excitațiile exponențial descrescătoare*, pentru care funcțiile $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$ se prezintă sub formele

$$F_{ex_i} = F_i^0 e^{-at}; \quad \mathcal{M}_{ex_i} = \mathcal{M}_i^0 e^{-bt}; \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.12}$$

cu F_i^0, $\mathcal{M}_i^0$, a și b constante;

— *excitațiile exponențial crescătoare*, corespunzătoare funcțiilor

$$F_{ex_i} = F_i^0 e^{at}; \quad \mathcal{M}_{ex_i} = \mathcal{M}_i^0 e^{bt}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.13}$$

cu F_i^0, $\mathcal{M}_i^0$, a și b constante.

b) *Excitații deterministe persistente cu evoluții în trepte.*

Scanned with CamScanner

Expresiile analitice ale acestor excitații sînt de forma

$$F_{ex_i}(t)\begin{cases} = F_i^0 = \text{const.} & \text{pentru} \quad t \in [t_1,\ t_2]; \\ = 0 & \text{pentru} \quad t \in (-\infty,\ t_1) \cup (t_2, +\infty); \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{ex_i}(t)\begin{cases} = \mathcal{M}_i^0 = \text{const.} & \text{pentru} \quad t \in [t_1,\ t_2]; \\ = 0 & \text{pentru} \quad t \in (-\infty,\ t_1) \cup (t_2, +\infty), \end{cases} \qquad (25.14)$$

cu graficele de variație ale solicitărilor de acest tip reprezentate în fig. 25.2, *a* pentru forțele de excitație și în fig. 25.2, *b* pentru momentele de excitație. Aceste grafice indică instalarea instantanee, la momentul t_1 și încetarea bruscă, la momentul t_2, a unor asemenea tipuri de excitații; se înțelege însă că oricînd, printr-o schimbare a originii pe axa timpului, fie momentul începerii excitației, fie cel al încetării ei, va putea fi considerat ca moment zero.

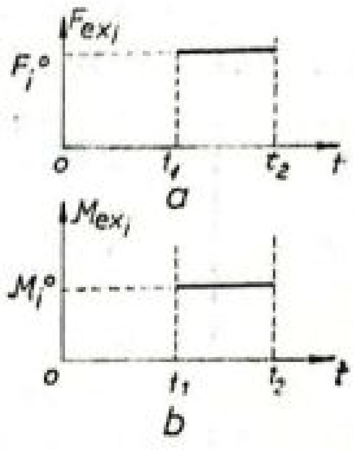


Fig. 25.2.

c) *Excitații deterministe în unde de șoc.* Tipurile cele mai des întîlnite de excitații în unde de șoc sînt:

— *Excitațiile în unde de șoc cu forma de undă în buclă sinusoidală*, (fig. 25.3, a și b), definite prin următoarele expresii ale func-

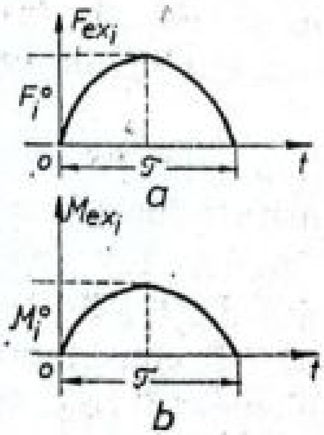


Fig. 25.3.

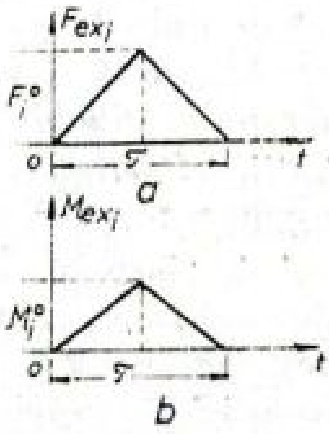


Fig. 25.4.

țiilor $F_{ex_i}(t)$ și $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$:

$$\begin{cases} F_{ex_i} \begin{cases} = F_i^0 \sin\left(\dfrac{\pi t}{\mathcal{T}}\right) & \text{pentru} \quad t \in [0, \mathcal{T}]; \\ = 0 & \text{pentru} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (\mathcal{T}, +\infty); \end{cases} \\ \mathcal{M}_{ex_i} \begin{cases} = \mathcal{M}_i^0 \sin\left(\dfrac{\pi t}{\mathcal{T}}\right) & \text{pentru} \quad t \in [0, \mathcal{T}]; \\ = 0 & \text{pentru} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (\mathcal{T}, +\infty). \end{cases} \end{cases} \tag{25.15}$$

cu F_i^0 și $\mathcal{M}_i^0$ constante.

— *Excitațiile în unde de șoc, cu forma de undă triunghiulară,* (fig. 25.4 a și b), definite prin ecuațiile

$$\begin{cases} F_{ex_i} \begin{cases} = 2 F_i^0 \dfrac{t}{\mathcal{T}} & \text{pentru} \quad t \in \left[0, \dfrac{\mathcal{T}}{2}\right]; \\ = 2 F_i^0 \left(1 - \dfrac{t}{\mathcal{T}}\right) & \text{pentru} \quad t \in \left[\dfrac{\mathcal{T}}{2}, \mathcal{T}\right]; \\ = 0 & \text{pentru} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (\mathcal{T}, +\infty); \end{cases} \\ \mathcal{M}_{ex_i} \begin{cases} = 2 \mathcal{M}_i^0 \dfrac{t}{\mathcal{T}} & \text{pentru} \quad t \in \left[0, \dfrac{\mathcal{T}}{2}\right]; \\ = 2 \mathcal{M}_i^0 \left(1 - \dfrac{t}{\mathcal{T}}\right) & \text{pentru} \quad t \in \left[\dfrac{\mathcal{T}}{2}, \mathcal{T}\right]; \\ = 0 & \text{pentru:} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (\mathcal{T}, +\infty). \end{cases} \end{cases} \tag{25.16}$$

Se precizează că mișcarea oscilatorie efectuată în timpul acțiunii excitațiilor în unde de șoc se numește *vibrație inițială*, iar mișcarea vibratorie efectuată după încetarea excitațiilor în unde de șoc se numește *vibrație reziduală*.

d) *Excitații deterministe de tip impulsiv.* În această situație, excitația, de regulă o forță F_{ex_i} de intensitate foarte mare și acționind într-un interval de timp $\Delta t = t_1 - t_0$ foarte mic, va putea fi exprimată, cu ajutorul funcției impuls unitate $\delta(t)$ a lui Dirac, in funcție de variația impulsului, $\mathcal{H}_i$, constantă și considerată cunoscută, pe care il provoacă forța respectivă la elementul (S_i), in baza relației

$$F_{ex_i} = \mathcal{H}_i \cdot \delta(t). \tag{25.17}$$

Într-adevăr, dacă se inmulțește relația precedentă cu dt și se integrează de la $(-\infty)$ la $(+\infty)$ ambii membri ai egalității, rezultă relația

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{ex_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_i \delta(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{H}_i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (25.18)$$

sau incă, avînd in vedere faptul că, pe de o parte, forța de excitație este definită numai pe intervalul $[t_0, t_1]$, reducindu-se la zero in tot restul intervalului și că, pe de altă parte, din modul de definire a funcției lui Dirac, rezultă condiția

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

apare evidentă concluzia

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{ex_i}(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{H}_i, \qquad (25.19)$$

ca o consecință a valabilității relației (25.17).

În cazul cînd solicitarea impulsivă este un moment, atunci în relațiile precedente locul impulsului $\mathscr{H}_i$ il va lua momentul cinetic $\mathscr{K}_{G_i}$.

Considerîndu-se cunoscute funcțiile (25.1), care definesc componentele torsorilor în centrele de masă G_i ale solicitărilor de excitație aplicate elementelor (S_i) ale sistemului vibrant, vor putea fi calculate forțele generalizate de excitație corespunzătoare gradelor de libertate k, ele avînd expresiile

$$Q^*_{ex_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{F}_{ex_i} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q^*_k} + \mathscr{M}_{ex_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q^*_k} \right], \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \ (25.20)$$

În cazul celor mai multe dintre sistemele vibrante intilnite în practică, forțele generalizate de excitație depind și ele numai de timp; considerînd, în continuare, numai această din urmă situație, rezultă că forțele generalizate de excitație cu care se va lucra obișnuit vor avea exoresiile

$$\boxed{Q^*_{ex_k} = Q^*_{ex_k}(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r),}\ , \qquad (25.21)$$

Scanned with CamScanner

ele formînd o matrice coloană notată cu simbolul **S**, adică

$$\mathbf{S} = \| Q^*_{ex_1} Q^*_{ex_2} \dots Q^*_{ex_k} \dots Q^*_{ex_r} \|^T, \qquad (25.22)$$

numită *matricea de excitație*.

În foarte multe situații funcțiile $Q_{ex_k}(t)$ se prezintă ca *excitații generalizate poliarmonice sincrone sinfazice*, adică au formele

$$Q^*_{ex_k} = \sum_{\lambda=1}^{l} Q^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt), \quad (k = 1, 2, \dots, r), \qquad (25.23)$$

constantele $Q^0_{k\lambda}$, numite în această lucrare *caracteristici dinamice generalizate de excitație poliarmonică*, formînd un număr de l matrice coloană de forma

$$\mathbf{Q}^{(\lambda)} = \| Q^0_{1\lambda}\, Q^0_{2\lambda} \dots Q^0_{k\lambda} \dots Q^0_{r\lambda} \|^T, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l). \qquad (25.24)$$

În această din urmă situație, matricea (25.22) de excitație va lua forma

$$\mathbf{S} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathbf{Q}^{(\lambda)} \sin(\lambda pt), \qquad (25.25)$$

respectiv forma particulară

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} \sin(pt), \qquad (25.26)$$

în cazul excitațiilor generalizate armonice sincrone sinfazice ($\lambda = 1$; $\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}$).

În continuare, vor fi stabilite semnificațiile forțelor generalizate de excitație, pentru cele două tipuri uzuale de sisteme vibrante constituite din elemente cuplate elastic în serie, examinate și în paragraful precedent: sistemul vibrant cu elementele executînd translații rectilinii în lungul aceleiași axe și sistemul vibrant cu elementele executînd rotații în jurul aceleiași axe.

a) *Forțele generalizate de excitație aplicate sistemelor vibrante cu elementele executînd translații rectilinii în lungul aceleiași axe.* Se consideră din nou sistemul vibrant reprezentat în figura 24.27,

în care elementele (S_i) ale sistemului vor fi considerate supuse și la excitațiile $\bar{F}_{ex_i}(t)$, orientate de asemenea în lungul axei Ox.

În aceste condiții, $(\varphi_i \equiv 0;\ \bar{r}_{G_i} = x_{G_i}\bar{i};\ i = 1, 2, \ldots, n)$, expresiile (25.20) ale forțelor generalizate de excitație vor lua formele simplificate

$$Q^*_{ex_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{ex_i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q^*_k} = \sum_{i=1}^{n} F_{ex_i} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial x^*_k},$$

sau încă, ținind seama și acum de condițiile

$$\frac{\partial x_{G_i}}{\partial x^*_k} = \frac{\partial(x^*_i + x_{G_{i_{st}}})}{\partial x^*_k} = \frac{\partial x^*_i}{\partial x^*_k} \begin{cases} = 1, & \text{pentru } i = k; \\ = 0, & \text{pentru } i \neq k, \end{cases}$$

mai rezultă

$$Q^*_{ex_k} = F_{ex_k} = F_{ex_k}(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.27}$$

adică, în cazul acestui tip de sistem vibrant forțele generalizate de excitație coincid efectiv cu forțele de excitație și deci matricea de excitație (25.25) va lua acum forma

$$\boxed{\mathbf{S} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathbf{F}^{(\lambda)} \sin(\lambda pt),} \tag{25.28}$$

cu

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{F}^{(\lambda)} = \| F^0_{1\lambda}\, F^0_{2\lambda} \ldots F^0_{k\lambda} \ldots F^0_{n\lambda} \|^T \\ (\lambda = 1, 2, \ldots, l)\end{gathered}}, \tag{25.29}$$

pentru forțe de excitație poliarmonice, sincrone, sinfazice, adică de forma

$$F_{ex_k} = \sum_{\lambda=1}^{l} F^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt), \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{25.30}$$

b) *Forțele generalizate de excitație aplicate sistemelor vibrante cu elementele executînd rotații în jurul aceleiași axe fixe.* Se consideră iarăși sistemul vibrant reprezentat în figura 24.28, cu ele-

Scanned with CamScanner

mentele (S_i) ale sistemului supuse la momentele de excitație $\mathcal{M}_{ex_i}(t)$, orientate în lungul axei de rotație Oz.

În această situație ($\bar{r}_{G_i} \equiv 0$; $\varphi_i = \varphi_i^* + \varphi_{i_{st}}$; $i = 1, 2, \ldots, n$), expresiile (25.20) ale forțelor generalizate de excitație se reduc la termenii

$$Q^*_{ex_k} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{ex_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k^*} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{ex_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k^*}, \quad (k = 1,2, \ldots, r = n),$$

care, prin considerarea condițiilor cunoscute

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k^*} = \frac{\partial(\varphi_i^* + \varphi_{i_{st}})}{\partial \varphi_k^*} = \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \varphi_k^*} \begin{cases} = 1, & \text{pentru}: \ i = k, \\ = 0 & \text{pentru}: \ i \neq k, \end{cases}$$

vor mai putea fi scriși sub forma

$$Q^*_{ex_k} = \mathcal{M}_{ex_k} = \mathcal{M}_{ex_k}(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.31}$$

evidențiind faptul că în cazul acestui de-al doilea tip de sistem vibrant forțele generalizate de excitație coincid cu momentele de excitație aplicate elementelor cu același număr de ordine ca și al gradului de libertate considerat.

Pentru momente de excitație poliarmonice, sincrone, sinfazice, adică de forma

$$\mathcal{M}_{ex_k} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathcal{M}^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25.32}$$

matricea de excitație (25.25) va lua forma

$$\boxed{\mathbf{S} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathbf{M}^{(\lambda)} \sin(\lambda pt)}, \tag{25.33}$$

cu

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{M}^{(\lambda)} = \| \mathcal{M}^0_{1\lambda} \ \mathcal{M}^0_{2\lambda} \ \ldots \ \mathcal{M}^0_{k\lambda} \ \ldots \ \mathcal{M}^0_{n\lambda} \|^T \\ (\lambda = 1, 2, \ldots, l)\end{gathered}}. \tag{25.34}$$

25.1.2. Caracterizarea excitațiilor aleatoare

Se va considera și aici numai cazul *excitațiilor aleatoare staționare ergodice*, determinate printr-un număr oarecare N de realizări ale variațiilor solicitărilor de excitație $F_{ex_i}(t)$ și $\mathscr{M}_{ex_i}(t)$, înregistrate pe o durată $\mathscr{T}$ și caracterizate prin condițiile:

— Toate realizările au aceeași valoare medie individuală, egală și cu valoarea medie globală, constantă, a realizărilor, adică

$$\overline{F_{ex_{ij}}(t)} = \mu_{F_i} = \text{const}\,; \quad \overline{\mathscr{M}_{ex_{ij}}(t)} = \mu_{\mathscr{M}_i} = \text{const}\,; \tag{25.35}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, n;\quad j = 1,\ 2 \ldots, \mathrm{N}).$$

— Funcțiile de autocorelație individuale sînt aceleași pentru toate realizările, depind numai de intervalul τ de autocorelare și coincid și cu funcția de autocorelație globală a realizărilor, adică

$$\mathscr{K}_{F_{i_{jj}}}(\tau) = \mathscr{K}_{F_i}(\tau)\,; \quad \mathscr{K}_{\mathscr{M}_{i_{jj}}}(\tau) = \mathscr{K}_{\mathscr{M}_i}(\tau) \tag{25.36}$$

$$(i = 1,2, \ldots, n;\quad j = 1, 2 \ldots, N).$$

În această situație, fiecare excitație aleatoare va fi determinată numai prin cîte una singură dintre realizări și va fi caracterizată prin următoarele mărimi statistice principale:

— *Valorile medii ale excitațiilor*, definite prin relațiile

$$\overline{F_{ex_i}(t)} = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{\frac{\mathscr{T}}{2}} F_{ex_i}(t)\ dt = \mu_{F_i}\,;$$

$$\mathscr{M}_{ex_i}(t) = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{\frac{\mathscr{T}}{2}} \mathscr{M}_{ex_i}(t)\ dt = \mu_{\mathscr{M}_i}. \tag{25.37}$$

$$(i = 1,2,\ldots, n)$$

și putînd fi obținute practic prin planimetrarea ariilor cuprinse între axa timpului și graficele realizărilor respective ale excitațiilor considerate.

— *Funcțiile de autocorelație ale excitațiilor*, definite prin relațiile

$$\mathscr{K}_{F_i}(\tau) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} F_{ex_i}(t)\ F_{ex_i}(t+\tau)\,\mathrm{d}t;$$

$$\mathscr{K}_{\mathcal{M}_i}(\tau) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{\frac{\mathcal{T}}{2}} \mathcal{M}_{ex_i}(t)\ \mathcal{M}_{ex_i}(t+\tau)\,\mathrm{d}t \qquad (25.38)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

și determinate, paractic, cu ajutorul *corelogramelor excitațiilor* respective, trasate de un corelator.

— *Densitățile spectrale ale mediilor patratice ale excitațiilor*, definite prin relațiile

$$S_{F_i}(k) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathscr{K}_{F_i}(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}_{F_i}(\tau)\, e^{-ik\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$S_{\mathcal{M}_i}(k) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathscr{K}_{\mathcal{M}_i}(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}_{\mathcal{M}_i}(\tau)\, e^{-ik\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (25.39)$$

$$(i = 1,2, \ldots, n)$$

și determinate, în cazul unor expresii mai simple ale funcțiilor $\mathscr{K}_{F_i}(\tau)$ și $\mathscr{K}_{\mathcal{M}_i}(\tau)$, prin integrare analitică, iar în cazul unor expresii mai complicate, prin integrare numerică.

— *Mediile pătratice ale excitațiilor*, definite prin relațiile

$$\overline{F^2_{ex_i}(t)} = \mathscr{K}_{F_i}(0) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} F^2_{ex_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{F_i}(k)\,\mathrm{d}k$$

$$\overline{\mathcal{M}^2_{ex_i}(t)} = \mathscr{K}_{\mathcal{M}_i}(0) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} \mathcal{M}^2_{ex_i}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathcal{M}_i}(k)\,\mathrm{d}k \qquad (25.40)$$

$$(i = 1,2, \ldots, n)$$

Scanned with CamScanner

şi determinate, practic, prin planimetrarea ariilor cuprinse între axa pulsaţiilor şi graficele densităţilor spectrale ale mediilor patratice, $S_{F_i}(k)$, respectiv $S_{\mathcal{M}_i}(k)$.

— *Densitățile de probabilitate ale amplitudinilor excitațiilor*, definite prin relaţiile

$$p(F_i) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(F_i)}{\mathrm{d}F_i}\ ;\quad p(\mathcal{M}_i) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}(\mathcal{M}_i)}{\mathrm{d}\mathcal{M}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25.41}$$

şi determinate, practic, fie prin prelucrări statistice, fie prin adoptarea unor densităţi aproximative, cel mai adesea de tip Gauss, adică de forma

$$p(F_i) = \frac{1}{\sigma_{F_i}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[F_i-\mu_{F_i}]^2}{2\sigma^2_{F_i}}},\quad p(\mathcal{M}_i) = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{M}_i}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[\mathcal{M}_i-\mu_{\mathcal{M}_i}]^2}{2\sigma^2_{\mathcal{M}_i}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25.42}$$

unde $\sigma^2_{F_i}$ şi $\sigma^2_{\mathcal{M}_i}$ sînt *dispersiile excitațiilor aleatoare*, iar σ_{F_i} şi $\sigma_{\mathcal{M}_i}$ sînt *abaterile medii pătratice ale excitațiilor aleatoare*, ultimele fiind determinate prin relaţiile

$$\sigma_{F_i} = \sqrt{\overline{F^2_{ex_i}(t)} - \mu^2_{F_i}}\ ;\quad \sigma_{\mathcal{M}_i} = \sqrt{\overline{\mathcal{M}^2_{ex_i}(t)} - \mu^2_{\mathcal{M}_i}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25.43}$$

— *Funcțiile de distribuție ale probabilităților amplitudinilor excitațiilor*, definite prin relaţiile

$$\mathcal{P}(F_i) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{\sum_j \Delta t_j}{\mathcal{T}}\ ;\quad \mathcal{P}(\mathcal{M}_i) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{\sum_j \Delta t_j}{\mathcal{T}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25.44}$$

unde Δt_j sînt intervalele de timp din duratele totale $\mathcal{T}$ ale înregistrărilor excitațiilor, în care amplitudinile excitațiilor rămîn inferioare valorilor F_i, respectiv $\mathcal{M}_i$, aceste funcții fiind determinate practic cu ajutorul integralelor

$$\mathcal{P}(F_i) = \int_{-\infty}^{F_i} p(F_i)\,\mathrm{d}F; \quad \mathcal{P}(\mathcal{M}_i) = \int_{-\infty}^{\mathcal{M}_i} p(\mathcal{M}_i)\,\mathrm{d}\,\mathcal{M} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25.45}$$

25.2. *Principii constructive ale excitatoarelor*

Dintre diversele categorii și tipuri de excitații, cele care intervin cel mai des în problemele concrete ale tehnicii vibrațiilor sînt cele deterministe poliarmonice și, în particular, cele armonice, exercitate prin intermediul unor sisteme mecanice auxiliare, considerate ca neaparținînd sistemului vibrant, cunoscute sub denumirile de *vibratoare*, *generatoare de excitații* sau *excitatoare.*

Excitatoarele sînt folosite fie în studiul experimental al vibrațiilor pentru simularea unor excitații — de regulă de tip armonic — aplicate unor elemente ale sistemului vibrant, fie pentru realizarea unei largi game de tipuri de mașini vibratoare.

În principiu, orice excitator este format din două părți constitutive, reprezentate prin *corpul excitatorului* și prin *elementele mobile ale excitatorului*, acestea din urmă fiind niște mase auxiliare care execută mișcări relative — fie de translație rectilinie, fie de rotație — față de corpul excitatorului.

Dintre diversele puncte de vedere posibile de luat în considerație la clasificarea excitatoarelor, se vor alege următoarele două :

— *Clasificarea excitatoarelor după modul de amplasare a lor în sistemul vibrator*, deosebindu-se :

1°. **Excitatoare externe,** corespunzătoare cazului cînd corpul excitatorului (*Ce*) este fixat de un corp din mediul înconjurător aflat în stare de repaus, iar elementul mobil (*Em*) este legat, prin inter-

mediul unui element de legătură elastică (Ae), de un element (S_i) al sistemului vibrant (fig. 25.5).

De regulă, deplasarea elementului mobil — și deci și a extremității E_{i0}, legată cu exteriorul, a elementului elastic (Ae)-obișnuit un arc elicoidal de constantă elastică $k_{e_{i0}}$ și de coeficient de amortizare C_{i0}^0 — este o translație rectilinie în lungul axei elementului elastic, periodică, cu expresia ei aproximabilă cu un polinom trigonometric de un ordin oarecare l_i, adică se poate scrie

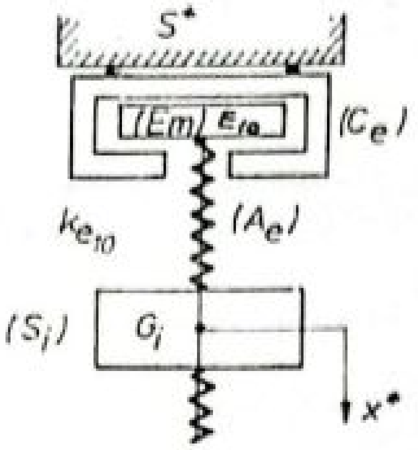


Fig. 25.5.

$$S_{E_{i0}} - S_{E_{i0_{st}}} = f_i(t) = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{\lambda=1}^{l_i} A_{i\lambda} \sin(\lambda p_i t + \alpha_{i\lambda}), \quad (25.46)$$

ceea ce înseamnă că viteza de deplasare a extremității E_{i0} a elementului elastic va avea expresia

$$v_{E_{i0}} = \dot{f}_i(t) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \lambda p_i A_{i\lambda} \cos(\lambda p_i t + \alpha_{i\lambda}). \quad (25.47)$$

Pentru aprecierea forței de excitație exercitată asupra elementului (S_i) prin deplasarea extremității E_{i0} a elementului elastic, legată de excitator, se vor lua în considerație următoarele două situații :

— *Cuplajul excitatorului cu elementul* (S_i) *se face prin arc elicoidal cu amortizare neglijabilă.*

În această situație, forța de excitație va fi reprezentată numai prin componenta perturbatoare a forței elastice, cu valoarea scalară raportată la versorul $\bar{i}$ al axei arcului — luată ca direcție a axei Ox ($S_{E_{i0}} = x_{E_{i0}}$; $s_{E_{i0_{st}}} = x_{E_{i0_{st}}}$) — dată de relația

$$F_{ex_i} = F_{e_{i0_{pt}}} = k_{e_{i0}}(x_{E_{i0}} - x_{E_{i0_{st}}}),$$

sau încă, ținînd seama și de expresia (25.46) a diferenței ($x_{E_{i0}} - x_{E_{i0_{st}}}$), mai rezultă

$$\boxed{F_{ex_i} = \frac{1}{2} k_{e_{i0}} a_{i0} + k_{e_{i0}} \sum_{\lambda=1}^{l_i} A_{i\lambda} \sin(\lambda p_i t + \alpha_{i\lambda})}, \quad (25.48)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$p_i = \frac{2\pi}{T_i} \tag{25.49}$$

reprezentînd pulsația fundamentală a excitației, T_i fiind perioada deplasării extremității E_{i0}.

Se va observa că în acest caz amplitudinile și fazele inițiale ale diverselor armonici sînt independente de pulsații.

— *Cuplajul excitatorului cu elementul* (S_i) *se face prin arc cu amortizare.*

În această de a doua situație, forța totală de excitație va rezulta atît din componenta perturbatoare a forței elastice exercitate de arcul deformat, cît și din componenta perturbatoare a rezistenței de amortizare corespunzătoare acelui arc, adică se va putea scrie

$$F_{ex_i} = F_{e_{i0_{pt}}} + R_{a_{i0_{pt}}} = k_{e_{i0}}(x_{E_{i0}} - x_{E_{i0_{st}}}) + C^0_{i0} v_{E_{i0}},$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile (25.46) și (25.47), se mai poate scrie următoarea expresie a forței totale de excitație:

$$F_{ex_i} = \frac{1}{2} k_{e_{i0}} a_{i0} + \sum_{\lambda=1}^{l_i} A_{i\lambda}[k_{e_{i0}} \sin(\lambda p_i t + \alpha_{i\lambda}) + C^0_{i0} \lambda p_i \cos(\lambda p_i t + \alpha_{i\lambda})]. \tag{25.50}$$

Scoțînd pe $k_{e_{i0}}$ forțat în factor și introducînd notația

$$\text{arc tg}\left(\lambda p_i \frac{C^0_{i0}}{k_{e_{i0}}}\right) = \chi_{i\lambda}, \tag{25.51}$$

cu

$$\frac{1}{\cos \chi_{i\lambda}} = \sqrt{1 + \left(\lambda p_i \frac{C^0_{i0}}{k_{e_{i0}}}\right)^2},$$

ultima expresie poate fi adusă la următoarea formă finală:

$$\boxed{F_{ex_i} = \frac{1}{2} k_{e_{i0}} a_{i0} + \sum_{\lambda=1}^{l_i} k_{e_{i0}} A_{i\lambda} \sqrt{1 + \left(\lambda p_i \frac{C^0_{i0}}{k_{e_{i0}}}\right)^2} \sin[\lambda p_i t + (\alpha_{i\lambda} + \chi_{i\lambda})]}, \tag{25.52}$$

Scanned with CamScanner

Se va remarca că, de astă dată, atit amplitudinile, cit și fazele inițiale ale diverselor armonice ale excitației depind de pulsațiile $k_{i\lambda} = \lambda\, p_i$ ale lor.

2°. **Excitatoare interioare,** corespunzătoare cazului cind corpul excitatorului este rigid fixat de elementul (S_i) al sistemului vibrant, iar excitațiile exercitate de el asupra acestui element au caracter inerțial: elementele mobile ale excitatorului dezvoltă solicitări de inerție — forțe și momente —, care acționează, prin intermediul legăturilor pasive ce le sint aplicate, asupra corpului excitatorului — și deci și asupra elementului (S_i) de care este fixat acesta din urmă, (fig. 25.6); se înțelege că în această situație vor trebui să fie satisfăcute următoarele două condițiuni:

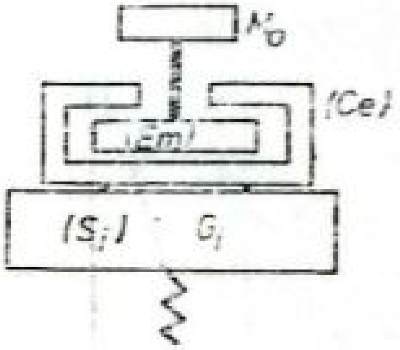


Fig. 25.6.

— Caracteristicile inerțiale ale părților componente ale excitatorului vor trebui să fie neglijabile în raport cu cele ale elementului (S_i), pe care este montat excitatorul, pentru ca ele să nu influențeze direct mișcarea acestui element, formind un subsistem mecanic;

— parametrii cinematici ai mișcărilor relative ale elementelor mobile ale excitatorului să aibă valori foarte mari în raport cu valorile parametrilor cinematici ai elementului (S_i), pentru a se putea neglija influența mișcării de transport a acestui din urmă element.

— *Clasificarea excitatoarelor după modul de realizare tehnică a lor,* in acest sens putindu-se deosebi următoarele categorii principale de generatoare de excitații:

— *excitatoare mecanice,* folosind acționarea mecanică a elementelor mobile;

— *excitatoare electrodinamice,* bazate pe acționarea electrodinamică a elementelor mobile;

— *excitatoare hidraulice și pneumatice,* la care acționarea elementelor mobile se realizează folosindu-se energia fluidelor cu presiune ridicată.

În continuare, vor fi prezentate cele mai des intilnite, in tehnica vibrațiilor, tipuri de vibratoare mecanice și electrodinamice.

Scanned with CamScanner

25.2.1. Excitatoare mecanice

În aplicațiile practice curente sînt folosite următoarele trei tipuri principale de excitatoare mecanice :

a) *Excitatorul cu mecanism bielă-manivelă.* Acest tip de vibrator este un excitator exterior, cu partea mobilă reprezentată prin manivela (Mn) de lungime egală cu r (m), biela (Bl) de lungime egală cu l(m) și din piatra de culisă (Pc), (fig. 25.7), ultima fiind legată la extremitatea E_{i0} a elementului elastic (Ae_{i0}), a cărui extremitate opusă A_{i0} este legată la elementul excitat (S_i) ; manivela se rotește uniform, cu viteza unghiulară p (s^{-1}), în jurul unei axe imobilizată în corpul excitatorului, acesta din urmă fiind fixat, la rîndul lui, de un corp fix din mediul înconjurător.

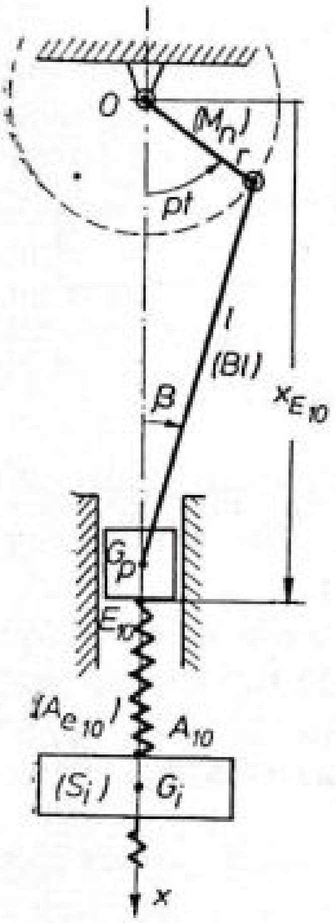


Fig. 25.7.

Alegînd axa în lungul căreia se deplasează centrul de masă G_p al pietrei de culisă ca axă Ox și originea pe această axă în punctul 0 de articulație a manivelei, se verifică cu ușurință că pentru abscisa $x_{E_{i0}}$ a extremității E_{i0} a arcului elastic (Ae_{i0}) poate fi scrisă expresia

$$x_{E_{i0}} = r \cos (p\,t + \varphi_{m_{st}}) + l\left[1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2(pt + \varphi_{m_{st}})\right]^{1/2}, \quad (25.53)$$

cu următoarea valoare corespunzătoare poziției de echilibru static a sistemului vibrant :

$$x_{E_{i0_{st}}} = r \cos \varphi_{m_{st}} + l\left[1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2 \varphi_{m_{st}}\right]^{1/2}, \quad (25.54)$$

$\varphi_{m_{st}}$ fiind valoarea unghiului de rotație al manivelei corespunzătoare acestei poziții de echilibru static a sistemului vibrant, considerată și ca poziție inițială ($t = 0$).

În condițiile

$$r << l, \quad (25.55)$$

Scanned with CamScanner

totdeauna satisfăcute în cazul excitatoarelor, radicalul din expresia (25.53) va putea fi dezvoltat după formula binomului, reținîndu-se din dezvoltare numai primii doi termeni ; rezultă astfel următoarea expresie pentru abscisa $x_{E_{i0}}$:

$$x_{E_{i0}} = \left(l - \frac{r^2}{4\,l} \right) + r \cos\,(pt + \varphi_{m_{st}}) + \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{l} \cos\,[2(pt + \varphi_{m_{st}})] \tag{25.56}$$

și deci următoarea expresie pentru diferența $(x_{E_{i0}} - x_{E_{i0_{st}}})$:

$$x_{E_{i0}} - x_{E_{i0_{st}}} = A_0 + r \cos\,(pt + \varphi_{m_{st}}) + \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{l} \cos\,[2\,(pt + \varphi_{m_{st}})], \tag{25.57}$$

unde prin A_0 s-a notat expresia constantă

$$A_0 = l - \frac{r^2}{4l} - x_{E_{i0_{st}}}. \tag{25.58}$$

În consecință, în ipoteza neglijării amortizării elementului elastic (Ae_{i0}) — situație frecvent considerată în practică —, asupra elementului (S_i), executînd o translație rectilinie în lungul aceleiași axe Ox, va acționa următoarea forță de excitație, exercitată de vibratorul considerat în fig. 25.7,

$$\boxed{F_{ex_i} = k_{e_{i0}} A_0 + k_{e_{i0}}\, r \cos\,(pt + \varphi_{m_{st}}) + \frac{1}{4} k_{e_{i0}} \frac{r^2}{l} \cos\,[2\,(pt + \varphi_{m_{st}})]}\,. \tag{25.59}$$

După cum se vede, în condițiile menționate, excitatorul cu mecanism bielă-manivelă va acționa cu o forță de excitație biarmonică ; în cazul cînd s-ar fi luat mai mulți termeni în dezvoltarea radicalului din expresia lui $x_{E_{i0}}$, s-ar fi obținut o excitație poliarmonică.

b) *Excitatorul cu mecanism excentric-culisă.* Acest tip de generator de excitații poate fi utilizat atît ca excitator exterior, cît și ca excitator interior, pentru elemente care execută mișcări vibratorii de translație rectilinie.

Scanned with CamScanner

Partea mobilă a acestui excitator este constituită dintr-un excentric (Ex) și o culisă (Cl), cuplată cu excentricul prin butonul (Bt), situat la distanța e(m) de axa de rotație a excentricului (fig. 25.8).

Considerind că excentricul se rotește uniform cu viteza unghiulară p (s^{-1}) pornind dintr-o poziție determinată prin valoarea $\varphi_{m_{st}}$ a unghiului său de rotație — valoare corespunzătoare poziției de echilibru static a sistemului vibrant și raportată la o axă de referință (Δ), normală la axa Ox după care se efectuează translația culisei, (fig. 25.8) —, se verifică imediat că deplasarea extremității C a culisei în raport cu poziția sa $C°$, corespunzătoare momentelor în care centrul butonului (Bt) se găsește pe axa (Bt), este dată de relația

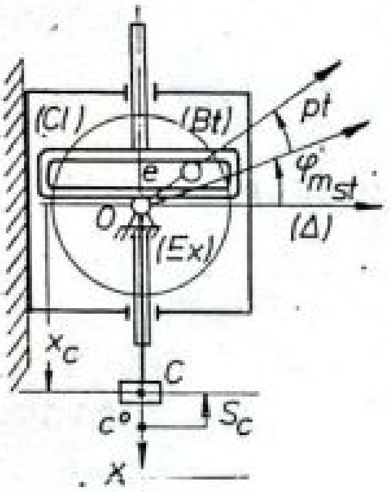


Fig. 25.8.

$$s_C = e \sin(pt + \varphi_{m_{st}}). \qquad (25.60)$$

În cazul cind acest tip de excitator este folosit ca excitator exterior, extremitatea C a culisei este legată la extremitatea E_{i0} a unui arc elicoidal (Ae_{i0}), a cărui extremitate opusă, A_{i0}, este fixată de elementul excitat (S_i), iar corpul excitatorului este imobilizat într-un corp fix din mediul înconjurător, (fig. 25.9).

În această situație, forța de excitație exercitată asupra elementului (S_i), $F_{ex_i} = k_e(x_{E_{i0}} = x_{E_{i0_{st}}})$, va avea expresia

$$\boxed{F_{ex_i} = - k_{e_{i0}}\, e \sin \varphi_{m_{st}} + k_{e_{i0}}\, e \sin(pt + \varphi_{m_{st}})}\,, \qquad (25.61)$$

dacă se neglijează amortizarea elementului elastic și expresia

$$\boxed{F_{ex_i} = -k_{e_{i0}}\, e \sin\varphi_{m_{st}} + k_{e_{i0}}\, e \sqrt{1 + \left(p \frac{C^0_{i0}}{k_{e_{i0}}}\right)^2} \sin\left[pt + (\varphi_{m_{st}} + \chi_{i0})\right]}\,, \qquad (25.62)$$

Scanned with CamScanner

dacă se ia în considerație și amortizarea, în ultimul caz χ_{i0} avînd semnificația

$$\chi_{i0} = \operatorname{arctg}\left(p\,\frac{C_{i0}^{0}}{k_{e_{i0}}}\right). \qquad (25.63)$$

Se observă deci că în ambele cazuri excitația este armonică, cu amplitudinea și faza inițială independente de pulsație dacă se neglijează amortizare și dependente de pulsație, dacă se consideră și amortizarea.

În cazul cînd generatorul de excitații cu excentric și culisă este utilizat ca excitator interior, corpul său este fixat de elementul (S_i), iar în extremitatea C a culisei se montează o masă adițională M_a, pentru mărirea forței de inerție pe care excitatorul o va exercita asupra elementului (S_i), (fig. 25.10).

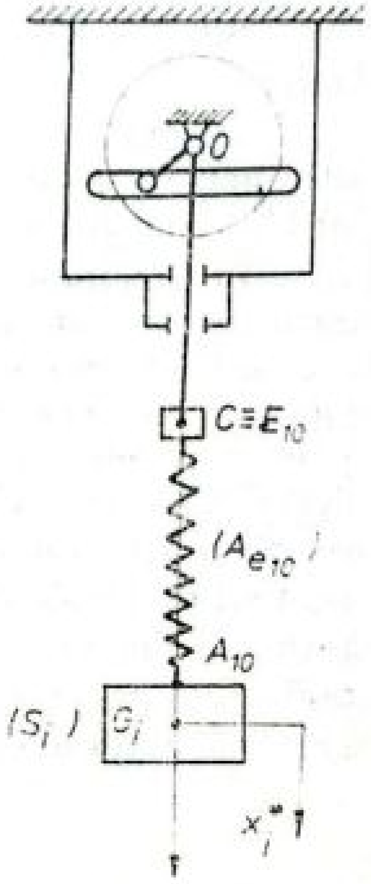


Fig. 25.9.

Notînd cu ξ deplasarea relativă a culisei față de corpul excitatorului, deplasare socotită în raport cu poziția centrală a culisei. va rezulta și acum relația

$$\xi = e \sin(pt + \varphi_{m_{st}}), \qquad (25.64)$$

$\varphi_{m_{st}}$ fiind și acum unghiul de rotație al excentricului corespunzător poziției de echilibru static a sistemului vibrant.

În consecință, accelerația relativă a ansamblului culisă — masă adițională va avea expresia

$$a_r = \ddot{\xi} = -e\,p^2 \sin(pt + \varphi_{m_{st}}), \quad (25.65)$$

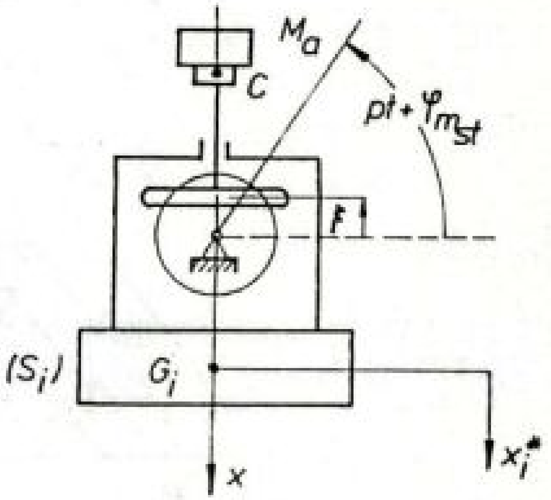


Fig. 25.10.

iar forța de inerție corespunzătoare mișcării relative a acestui ansamblu și acționind ca forță activă asupra excentricului — și deci, prin lagărul acestuia, asupra elementului (S_i) — va fi dată de relația

$$\boxed{F_{ex_i} = -(m_c + M_a)\,a_r = (m + M_a)\,e\,p^2 \sin(pt + \varphi_{m_{st}}),} \qquad (25.66)$$

m_c fiind masa culisei.

Se observă că și această excitație este armonică, dar cu amplitudine dependentă de pulsația excitației.

Excitatoarele mecanice cu mecanism excentric culisă sînt folosite pentru generarea excitațiilor cu frecvențe care nu depășesc 30 Hz și cu amplitudini de cel mult 700 N.

c) *Excitatorul cu rotori dezechilibrați.* Acest tip de generator de excitații este un excitator interior, avînd ca elemente mobile, cel mai adesea, doi rotori dezechilibrați identici, $(\mathcal{R}_{i_1})$ și $(\mathcal{R}_{i_2})$, montați cu axele de rotație relativă paralele în corpul excitatorului și cu centrele de rotație relativă, C_1 și C_2 — centrele cercurilor descrise de centrele de masă G_{r1} și G_{r2} ale rotorilor în mișcările lor relative față de corpul excitatorului —, dispuse simetric față de centrul de masă G_e al corpului excitatorului; corpul (Ce) al excitatorului, care se va fixa de elementul (S_i) al sistemului vibrant ce va trebui excitat, prezintă, în general, trei axe de simetrie triortogonale, care vor fi alese ca axe ale unui reper cartezian $G_e\xi\eta\zeta$ — cu axa $G_e\zeta$

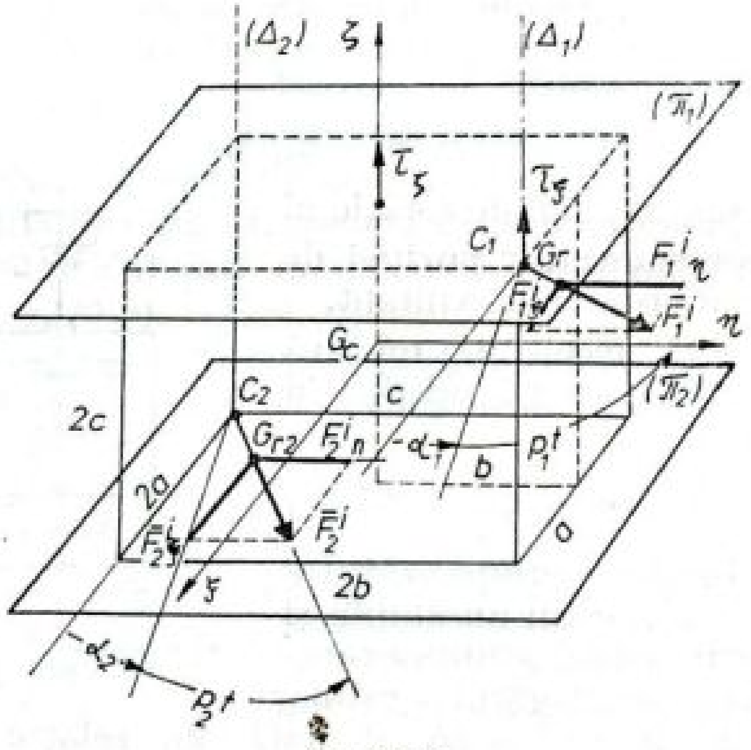


Fig. 25.11.

orientată paralel la axele de rotație relativă ale rotorilor, (fig. 25.11), la aceste axe urmînd a fi raportate și valorile scalare ale solicitărilor de excitație inerțială dezvoltate de rotori.

Se consideră cunoscute datele constructive ale excitatorului, reprezentate prin coordonatele — exprimate în metri — față de reperul $G_c\,\xi\,\eta\,\zeta$ ale centrelor de rotație relativă C_1 și C_2, adică

$$C_1(a\,;\ b\,;\ c)\,;\quad C_2(-a\,;\ -b\,;\ -c), \tag{25.67}$$

prin masele

$$m_1 = m_2 = m\ (\text{kg}) \tag{25.68}$$

și prin excentricitățile

$$e_1 = e_2 = e\ (\text{m}) \tag{25.69}$$

ale rotorilor precum și datele funcționale ale excitatorului, reprezentate prin vitezele unghiulare $\bar{p}_1$ și $\bar{p}_2$, de moduli constanți și egali între ei

$$|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2| = p \tag{25.70}$$

și cu valorile scalare, p_1 și p_2, raportate la versorul i_ζ al axei $G_c\zeta$ și prin unghiurile orientate, α_1 și α_2, cu semnele raportate, de asemenea, la versorul i_ξ și cu modulii satisfăcînd condiția

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \alpha, \tag{25.71}$$

formate în momentul inițial al funcționării excitatorului de către razele C_1G_{r1} și C_2G_{r2} cu paralela la axa $G_c\xi$, (fig. 25.11).

Un excitator cu rotori dezechilibrați care îndeplinește condițiile menționate mai sus se numește *excitator inerțial sincron sinfazic.*

În condițiile precizate, cele două forțe de inerție dezvoltate prin rotația relativă a rotorilor, $\bar{F}^i_1$, și F^i_2, de același modul

$$|\bar{F}^i_1| = |\bar{F}^i_2| = mep^2 \tag{25.72}$$

și orientate după razele C_1G_{r1} și C_2G_{r2}, (fig. 25.11), se reduc în centrul de masă G_c al corpului excitatorului la un torsor rezultant, ale cărui componente

$$\begin{cases} \bar{F}_{ex_i} = \bar{F}^i_1 + \bar{F}^i_2\,; \\ \bar{\mathfrak{M}}_{ex_i} = \bar{\mathcal{M}}_{G_c}(\bar{F}^i_1) + \bar{\mathcal{M}}_{G_c}(\bar{F}^i_2) = \bar{r}'_{C_1} \times \bar{F}^i_1 + r'_{C_2} \times \bar{F}^i_2, \end{cases} \tag{25.73}$$

vor acționa, prin intermediul lagărelor rotorilor, asupra corpului excitatorului — și deci și asupra elementului (S_i) de care se fixează

Scanned with CamScanner

acest corp — ca solicitări exterioare active de excitație, numite, din acest motiv, *excitații inerțiale*.

Proiectind cele două excitații inerțiale determinate prin relațiile (25.73) pe axele reperului $G_e\,\xi\,\eta\,\zeta$, se găsesc următoarele valori ale proiecțiilor lor:

$$\begin{aligned}
F_{ex_{i\xi}} &= m\,e\,p^2\,[\cos(p_1 t+\alpha_1)+\cos(p_2 t+\alpha_2)];\\
F_{ex_{i\eta}} &= m\,e\,p^2\,[\sin(p_1 t+\alpha_1)+\sin(p_2 t+\alpha_2)];\\
F_{ex_{i\zeta}} &= 0 \qquad\qquad (25.74)\\
\mathcal{M}_{ex_{i\xi}} &= -\,c\,m\,e\,p^2\,[\sin(p_1 t+\alpha_1)-\sin(p_2 t+\alpha_2)];\\
\mathcal{M}_{ex_{i\eta}} &= c\,m\,e\,p^2\,[\cos(p_1 t+\alpha_1)-\cos[p_2 t+\alpha_2)];\\
\mathcal{M}_{ex_{i\zeta}} &= m\,e\,p^2\,\{a\,[\sin(p_1 t+\alpha_1)-\sin(p_2 t+\alpha_2)]-\\
&\quad -b\,[\cos(p_1 t+\alpha_1)-\cos(p_2 t+\alpha_2)]\},
\end{aligned}$$

cu semnele reale ale acestor proiecții depinzind însă de semnele vitezelor unghiulare p_1 și p_2 și de semnele unghiurilor inițiale α_1 și α_2.

În funcție de unele valori particulare (valori zero) ale datelor constructive a, b și c și de semnele mărimilor p_1, p_2, α_1 și α_2, se poate realiza o gamă largă de excitatoare inerțiale generatoare de excitații armonice cu diverse orientări fixe față de corpul excitatorului, cele mai des intîlnite dintre acestea fiind următoarele:

— *Excitatorul inerțial generator de forță de excitație unidirecțională armonică*, corespunzător condițiilor

$$a = c = 0;\quad \alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha;\quad p_2 = -p_1 = -p, \qquad (25.75)$$

(fig. 25.12), pentru care torsorul, în polul G_e, al excitațiilor ia forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_{G_e}(\overline{F}_{ex_i}) = \begin{cases}\overline{F}_{ex_i} = 2\,m\,e\,p^2\cos(pt+\alpha)\,\bar{i}_\xi\\ \overline{\mathcal{M}}_{ex_i} = 0\end{cases}}\,. \qquad (25.76)$$

— *Excitatorul inerțial generator de moment de excitație unidirecțional armonic*, în condițiile

$$c = b = 0;\quad \alpha_1 = \alpha;\quad \alpha_2 = \pi+\alpha;\quad p_2 = p_1 = p, \qquad (25.77)$$

(fig. 25.13), pentru care torsorul în polul G_c al excitațiilor ia forma

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_c}(\overline{F}_{ex_i}) = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{ex_i} = 0 \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ex_i} = 2\,me\,p^2\,a \sin(pt+\alpha)\,\bar{i}_\zeta \end{Bmatrix} \cdot \tag{25.78}$$

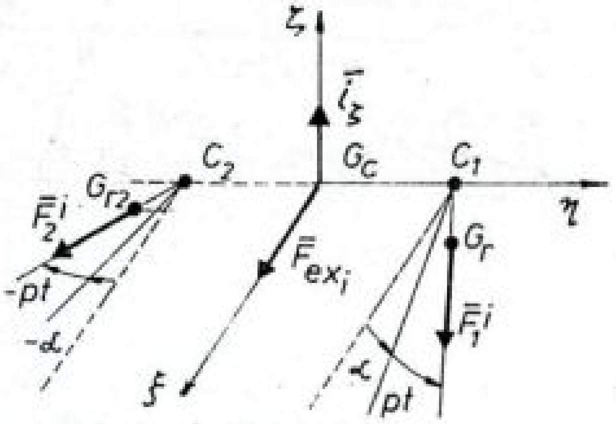


Fig. 25.12.

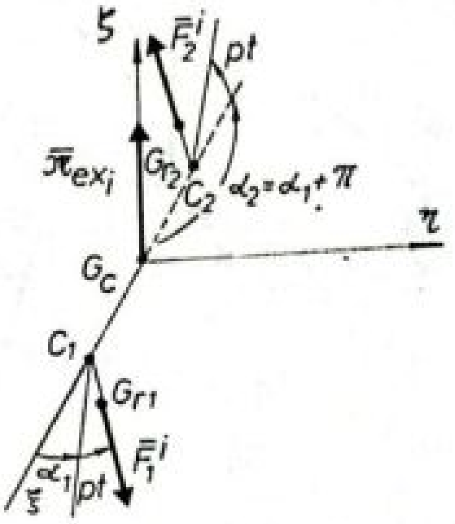


Fig. 25.13.

— *Excitatorul inerțial generator de forță și moment de excitație unidirecționale armonice ortogonale*, în condițiile

$$c = 0;\quad \alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha;\quad p_2 = -p_1 = -p, \tag{25.79}$$

(fig. 25.14), cînd rezultă următorul torsor în polul G_c al excitațiilor

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_c}(\overline{F}_{ex_i}) = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{ex_i} = 2me\,p^2 \cos(pt+\alpha)\,\bar{i}_\xi \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ex_i} = 2me\,p^2\,a \sin(pt+\alpha)\,\bar{i}_\zeta \end{Bmatrix} \cdot \tag{25.80}$$

— *Excitatorul inerțial generator de forță și moment de excitație unidirecționale armonice coliniare*, în condițiile

$$a = 0;\quad \alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha;\quad p_2 = -p_1 = -p, \tag{25.81}$$

(fig. 25.15), cînd torsorul în polul G_c al excitațiilor va lua forma

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_c}(\overline{F}_{ex_i}) = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{ex_i} = 2m\,e\,p^2 \cos(pt+\alpha)\,\bar{i}_\xi \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ex_i} = -\,2\,m\,e\,c\,p^2 \sin(pt+\alpha)\,\bar{i}_\xi \end{Bmatrix} \cdot \tag{25.82}$$

Scanned with CamScanner

Excitatoarele inerțiale cu rotori dezechilibrați sînt folosite pentru realizarea de excitații armonice cu frecvențe care nu depășesc 60 Hz, cu amplitudinile forțelor dezvoltate de ele variind între 400 și 20 000 N.

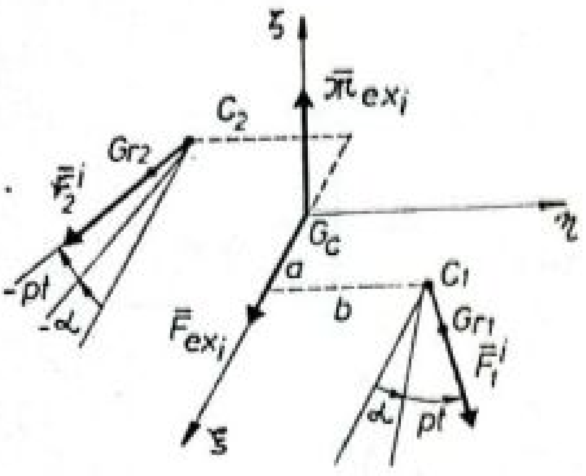


Fig. 25.14.

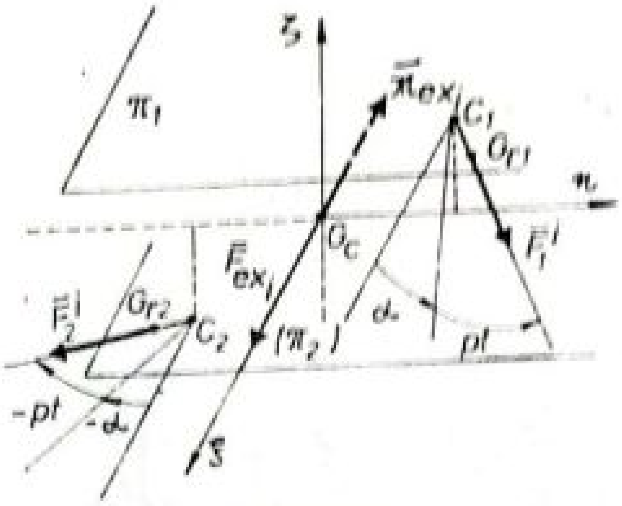


Fig. 25.15.

În încheierea prezentării excitatoarelor cu rotori dezechilibrați, se mai menționează faptul că uneori se realizează și excitatoare cu cîte două, sau chiar mai multe, perechi de rotori dezechilibrați sincroni sinfazici, cu viteze unghiulare comensurabile, obținîndu-se astfel excitații poliarmonice.

25.2.2. Excitatoare electrodinamice

Corpul acestui excitator este constituit dintr-un electromagnet cilindric, cu secțiunea axială reprezentată în fig. 25.16, a cărui parte cilindrică centrală (Cc), terminată cu miezul magnetic (Mm), este înfășurată de bobina de excitație (Be), alimentată la curent continuu; în întrefierul inelar (If) se creează astfel un cîmp magnetic, practic uniform pentru o rază dată a întrefierului, de inducție magnetică egală cu B (tesla), constantă, depinzînd de datele constructive ale electromagnetului și de mărimea tensiunii electrice continue de alimentare a bobinei de excitație.

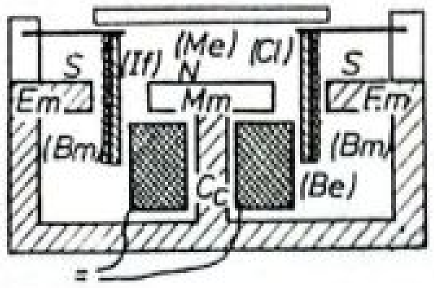


Fig. 25.16.

CamScanner
Scanned with CamScanner

Elementul mobil al excitatorului electrodinamic este reprezentat de bobina mobilă (*Bm*), realizată prin înfășurarea, în spire regulate, a unui conductor electric de lungime egală cu l(m), pe un cilindru (*Cl*) confecționat dintr-un material antimagnetic, pentru a nu se induce în el curenți Foucault, care ar provoca amortizări de tip viscos la deplasarea bobinei în întrefer; cilindrul este fixat rigid de piesa (Me), construită, de regulă, din aluminiu și purtînd numele de *masa excitatorului*.

Se consideră cunoscute rezistența chimică a bobinei, egală cu R (ohmi) și inductanța ei, egală cu L (henry).

Legătura dintre bobina mobilă și corpul excitatorului electrodinamic este realizată printr-o membrană elastică inelară (*Me*), (fig. 25.16), cu marginea exterioară încastrată într-un inel (*In*) fixat rigid de corpul excitatorului și cu marginea interioară fixată de masa excitatorului; această membrană permite bobinei mobile să efectueze numai mici deplasări în lungul axei ei, deplasări pe care le execută sub acțiunea forței de interacțiune dintre cîmpul magnetic din întrefier și dintre curentul de intensitate variabilă $i(t)$ (amperi), care străbate înfășurarea bobinei mobile prin alimentarea ei la o tensiune variabilă $U(t)$ (volți), Această forță de interacțiune este dată de următoarea relație, stabilită în electrodinamică:

$$F = B\,l\,i = \Gamma\, i, \tag{25.83}$$

cu factorul de proporționalitate dintre forța de excitație și intensitatea curentului din bobina mobil, $\Gamma = Bl$, purtînd numele de *constanta excitatorului*.

Relația (25.83) permite să se tragă concluzia că în condițiile realizării unei variații armonice a intensității curentului ce străbate bobina mobilă, se va obține și o forță armonică de acționare a ei, care va putea fi transmisă elementului din sistemul vibrant ce urmează a fi excitat.

Teoria acestor excitatoare arată însă — și experiența confirmă concluziile ei — că este posibilă obținerea unor intensități de curent numai aproximativ armonice în bobina mobilă și aceasta numai în anumite condiții constructive și de funcționare, atît pentru sistemele vibrante, cît și pentru excitatoarele de acest tip, fapt care limitează sensibil posibilitățile de utilizare a lor în aplicațiile tehnice.

Scanned with CamScanner

Astfel, în cazul excitatorului electrodinamic de tip exterior, realizarea unei intensități de curent aproximativ armonice în bobina mobilă este posibilă numai în următoarele condițiuni :

— Reducerea sistemului vibrant la un singur element (S), în translație rectilinie oscilatorie în lungul unei axe (Δ), sub acțiunea unei forțe elastice liniare dezvoltate de un arc elicoidal de constantă elastică k_e și cu amortizare neglijabilă, cu extremitatea E, legată cu exteriorul, fixă, (fig. 25.17) : excitarea elementului se realizează prin fixarea rigidă a lui cu bobina mobilă a excitatorului electrodinamic, în timp ce corpul excitatorului este legat de un postament fix. (În reprezentarea schematică a excitatorului din fig. 25.17, arcul

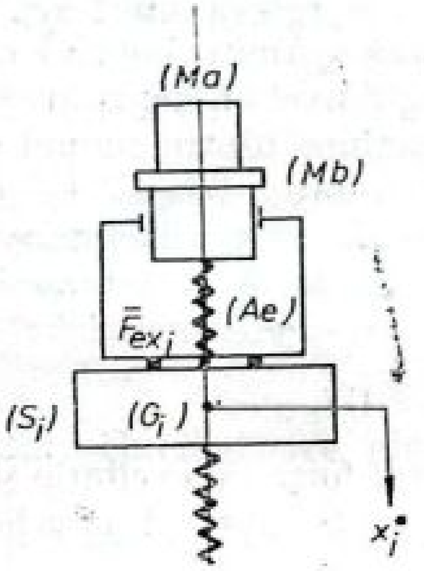


Fig. 25.17

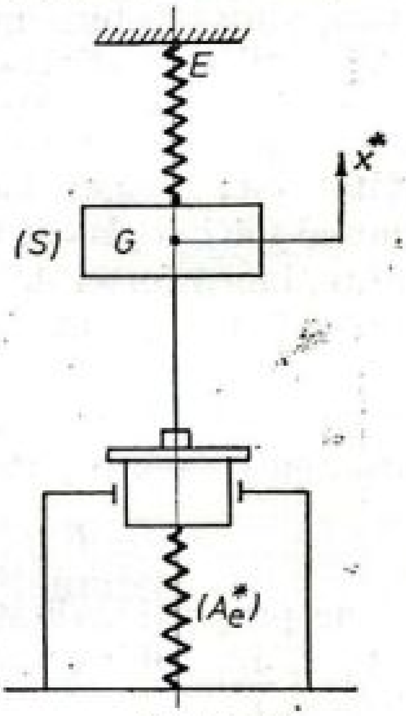


Fig. 25.18

elicoidal (A_e^*) simbolizează cuplajul elastic al bobinei cu corpul excitatorului, realizat în realitate prin membrană elastică) ;

— realizarea unui raport mult subunitar între masa bobinei mobile (inclusiv a masei excitatorului), M_b, și între masa elementului excitat, M, adică satisfacerea condiției

$$M_b << M, \tag{25.84}$$

care permite neglijarea, în calcule, a unor termeni conținînd pe M_b ca factor.

— Construcția înfășurării bobinei mobile cu o rezistență ohmică neglijabilă ($R \approx 0$);

— Alimentarea bobinei mobile la o tensiune alternativă riguros sinusoidală, adică de forma

$$U = U^0 \sin (pt), \tag{25.85}$$

cu U^0 și p constante pozitive.

Se demonstrează că în aceste condiții expresia intensității curentului din bobina mobilă poate fi aproximată prin relația

$$i = -\frac{U^0(k_e - Mp^2)}{p[L(k_e - Mp^2) + B^2l^2]} \cos (pt), \tag{25.86}$$

rezultind astfel următoarea expresie pentru forța de excitație

$$\boxed{F_{ex_i} = F_i^0 \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{25.87}$$

unde prin F_i^0 s-a notat mărimea

$$F_i^0 = \frac{Bl\, U^0 (k_e - Mp^2)}{p[L(k_e - Mp^2) + B^2l^2]} = F_i^0(U^0, p), \tag{25.88}$$

ea reprezentind deci amplitudinea excitației, amplitudine care, pentru un sistem mecanic dat și un excitator dat, depinde de amplitudinea și de pulsația tensiunii de alimentare.

În cazul cînd excitatorul electrodinamic este de tip interior, montarea lui se face ca în fig. 25.18, cu corpul fixat de elementul (S_i) din sistemul vibrant ce urmează a fi excitat, iar pe masa excitatorului se fixează o sarcină adițională, de masă M_a, care se va adăuga la masa M_b a ansamblului rigid format din bobina mobilă și din masa excitatorului. (Arcul elicoidal A_e^*, din fig. 25.18, simbolizează și acum cuplajul elastic dintre bobina mobilă și corpul excitatorului, cuplaj realizat în realitate prin membrană elastică).

Se demonstrează că în această situație obținerea unei forțe de excitație aproximativ armonică este posibilă numai în următoarele condițiuni :

— Valoare neglijabilă a masei M_c a corpului excitatorului în raport cu masa bobinei mobile și a sarcinii adiționale, adică satisfacerea condiției

$$M_c \ll M_b + M_a, \tag{25.89}$$

— Deplasare armonică a bobinei mobile în jurul poziției sale de echilibru stabil, adică o deplasare de forma

$$x_b = e \sin (pt), \tag{25.90}$$

cu e și p constante.

În aceste condițiuni, se demonstrează că forța de excitație exercitată prin intermediul corpului excitatorului asupra elementului (S_i) poate fi exprimată prin relația aproximativă

$$\boxed{F_{ex} = ep^2 (M_b + M_a) \sin (p\, t).} \tag{25.91}$$

Excitatoarele electrodinamice sînt utilizate la producerea forțelor de excitație periodică cu pulsații cuprinse între 5 Hz și 20 Hz și cu amplitudini care nu depășesc valoarea de 30.000 (N).

Principalul dezavantaj al acestor excitatoare îl constituie însă cursa limită — cel mult de 25 mm — a elementului mobil în raport cu corpul excitatorului, fapt care are ca urmare limitarea, la valori relativ mici, a amplitudinilor vibrațiilor elementelor sistemului vibrant acționate de aceste excitatoare.

§ 26. Forme ale ecuațiilor diferențiale ale mișcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice

Diversele forme ale sistemelor de ecuații diferențiale ale mișcărilor vibratorii în jurul pozițiilor de echilibru static ale sistemelor mecanice vor fi obținute plecîndu-se inițial de la sistemul de ecuații Lagrange de specia a doua corespunzătoare lor, ecuații care, în cazul alegerii parametrilor lagrangeieni astfel încît pentru pozițiile de echilibru static ale sistemelor vibrante ei să aibă valoarea zero ($q^k_{st} = 0$; $q^*_k = w_k$; $\mathcal{E}^*(q^*, \dot{q}^*) = \mathcal{E}(w, \dot{w})$; $V^*(q^*) = V(w)$; $Q^*_k = Qk$; $k = 1, 2, \ldots, r$), vor avea formele

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{w}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_k} = Q_{c_k} + Q_{d_k} + Q_{ex_k}, \ (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{26.1}$$

cu următoarele semnificații pentru simbolurile folosite:

— $\mathcal{E}$ este energia cinetică a sistemului vibrant, avînd, în condițiile precizate și pentru sistemele mecanice staționare, considerate obișnuit în aplicațiile tehnice, expresia

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^{n} g_{hj}\, w_h\, w_j, \tag{26.2}$$

cu coeficienții g_{hj} funcții, în general, de parametrii lagrangeieni ai sistemelor mecanice și putînd fi aproximați cu constante numai în cazul mișcărilor vibratorii efectuate în jurul pozițiilor de echilibru stabil;

— Q_{c_k} sînt forțele generalizate conservative, depinzînd numai de coordonatele generalizate ale sistemelor mecanice, deci cu expresii de forma

$$Q_{c_k} = -\frac{\partial V}{\partial w_k} = Q_{c_k}(w), \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{26.3}$$

— Q_{d_k} sînt forțele generalizate de amortizare, depinzînd, în general, de parametrii lagrangeieni și de vitezele generalizate ale sistemelor mecanice, cu expresii de forma

$$Q_{d_k} = Q_{d_k}(w, \dot{w}), \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{26.4}$$

și putînd fi considerate ca depinzînd numai de vitezele generalizate — prin intermediul funcției disipative a lui Rayleigh — doar în cazul mișcărilor vibratorii efectuate în jurul pozițiilor de echilibru stabil;

— Q_{ex_k} sînt forțele generalizate de excitație, în general funcții oarecare de timp, adică de forma

$$Q_{ex_k} = Q_{ex_k}(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{26.5}$$

și în particular poliarmonice, sau chiar simplu armonice.

Din expunerea, efectuată în paragraful precedent, a problemelor generale ale dinamicii vibrațiilor sistemelor de rigide, se poate trage concluzia că stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării unui sistem vibrant, pe baza sistemului lagrangeian de ecuații (26.1), poate fi realizată în următoarele două situații distincte:

— *adoptîndu-se ipoteze riguros reale de lucru*, adică considerîndu-se cazul cînd diversele mărimi dinamice care intervin în ecua-

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

țiile de mișcare sînt luate fără neglijarea unor termeni, avînd deci expresii din cele mai complicate;

— *adoptîndu-se ipoteze simplificatoare de lucru*, constînd, de regulă, în adoptarea celor mai simple legi de variație — obținute prin neglijarea unor termeni — pentru mărimile dinamice care intervin în ecuațiile lagrangeiene și în considerarea unor evoluții limitate numai la valori mici, respectînd condițiile de stabilitate, ale variațiilor parametrilor lagrangeieni.

În prima situație, toți termnii care intervin în sistemul de ecuații Lagrange au expresii complicate și sistemul concret de ecuații care se obține din sistemul lagrangeian inițial se prezintă ca un sistem de ecuații diferențiale neliniare în variațiile parametrilor lagrangeieni de poziție; din acest motiv, mișcările vibratorii efectuate în aceste condiții generale se numesc și ele *vibrații neliniare*.

În cea de-a doua situație, sistemul de ecuații Lagrange (26.1) poate conduce, așa cum se va arăta ulterior, la un sistem de ecuații diferențiale liniare în variațiile parametrilor de poziție lagrangeieni, din care motiv mișcărilor vibratorii efectuate în acest condițiuni li s-a dat denumirea de *vibrații liniare*.

Este ușor de înțeles însă că adoptarea ipotezelor simplificatoare de lucru — adoptare care, evident, ușurează sensibil rezolvarea problemelor de dinamica vibrațiilor —, nu va putea fi făcută decît după o prealabilă și temeinică verificare a posibilităților de acceptare a unor asemenea ipoteze.

În continuare, vor fi prezentate principalele forme ale ecuațiilor diferențiale ale mișcărilor vibratorii în jurul pozițiilor de echilibru static ale sistemelor vibrante, corespunzătoare celor două puncte de vedere distincte, menționate mai sus, care pot fi adoptate în abordarea problemelor de vibrații.

26.1. *Ecuațiile diferențiale, în coordonate generalizate, ale vibrațiilor sistemelor mecanice, efectuate în jurul pozițiilor lor de echilibru static*

26.1.1. Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor neliniare

Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare se cunoaște faptul că integrarea sistemelor de ecuații diferențiale neliniare este, datorită marilor complexități matematice, — fără folosirea MEC — practic

imposibilă, pînă în prezent fiind elaborate metode eficiente de studiu, cu un grad mai mic sau mai mare de aproximație, doar pentru anumite tipuri particulare de ecuații diferențiale neliniare; din acest motiv, studiul vibrațiilor neliniare vor fi redus, în lucrarea de față, doar la cel al sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate.

Considerînd deci un asemenea sistem vibrant cu un grad de libertate, executînd o mișcare vibratorie în jurul poziției sale de echilibru static sub acțiunea unor solicitări conservative, disipative și de excitație, dar în condițiile unor amplitudini oarecare, care nu permit acceptarea aproximărilor (24.20), (24.60) și (24.209), sistemul (26.1) de ecuații Lagrange se va reduce numai la ecuația unică

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial w} = Q_c(w) + Q_d(w,\ \dot{w}) + Q_{ex}(t), \tag{26.6}$$

cu

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\, g(w)\, \dot{w}^2. \tag{26.7}$$

Observînd că pot fi scrise relațiile

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial w}\dot{w}^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\, g}{\mathrm{d}\, w}\dot{w}^2$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[g\,\dot{w}] = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,w}\dot{w}^2 + g\,\ddot{w},$$

va rezulta următoarea formă pentru ecuația (26.6):

$$g\,\ddot{w} + \left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,w}\dot{w}^2 - Q_c(w) - Q_d(w,\ \dot{w})\right] - Q_{ex}(t) = 0, \tag{26.8}$$

sau încă, introducînd notațiile

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w}\dot{w}^2 - Q_c(w) - Q_d(w,\ \dot{w})\right] / g(w) = G(w,\ \dot{w}) \tag{26.9}$$

și

$$-\,Q_{ex}(t)\,/\,g(w) = F(w,\, t), \tag{26.10}$$

forma finală

$$\boxed{\ddot{w} + G(w, \dot{w}) + F(w, t) = 0,} \tag{26.11}$$

reprezentînd *ecuația diferențială generală a vibrațiilor neliniare în jurul pozițiilor de echilibru static ale sistemelor vibrante cu un grad de libertate.*

În funcție de prezența sau absența — în mod explicit — a variabilei t în ecuația (26.11), vibrațiile neliniare pot fi clasificate în :

1°. **Vibrații neliniare neautonome,** corespunzătoare situației cînd timpul t figurează în mod explicit în ecuația diferențială (26.11), evidențiind, de regulă, existența excitațiilor exterioare aplicate sistemului vibrant.

În cazul acestor vibrații se acceptă obișnuit aproximarea

$$g(w) \equiv a = \text{const.}, \tag{26.12}$$

care conduce la expresii simplificate pentru funcția $G(w, \dot{w})$:

$$G(w, \dot{w}) = -\frac{1}{a} Q_e(w) - \frac{1}{a} Q_d(w, \dot{w}) \tag{26.13}$$

și pentru funcția $F(w, t)$:

$$F(w, t) \equiv F(t) = -\frac{1}{a} Q_{ex}(t), \tag{26.14}$$

ceea ce face ca ecuația (26.11) să capete forma

$$\boxed{\ddot{w} + G(w, \dot{w}) + F(t) = 0} \tag{26.15}$$

O formă particulară a acestei ecuații, cunoscută sub numele de *ecuația Duffing*, destul de des întîlnită în tehnica vibrațiilor și pentru care au fost elaborate și metode aproximative de integrare, se obține în următoarele condiții de solicitare :

— Amortizarea este considerată liniară în viteza generalizată, adică se acceptă aproximarea

$$Q_d(w, \dot{w}) \equiv -b\,\dot{w}, \tag{26.16}$$

cu $b > 0$ și constant ;

Scanned with CamScanner

— solicitarea conservativă corespunde unui cupaj elastic neliniar cu caracteristică parabolică, adică forța generalizată conservativă are expresia

$$Q_c(w) = -(k \pm \gamma w^2)\, w, \qquad (26.17)$$

cu $k > 0$ și $\gamma > 0$ constanți;

— solicitarea de excitație este armonică, adică forța generalizată $Q_{ex}(t)$ are expresia

$$Q_{ex}(t) \equiv Q^0 \cos(pt), \qquad (26.18)$$

cu Q^0 și p constanți.

Introducind notațiile

$$\frac{b}{a} = \mu; \quad \frac{k}{a} = \alpha; \quad \frac{\gamma}{a} = \beta; \quad \frac{Q^0}{a} = P^0, \qquad (26.19)$$

va rezulta următoarea formă concretă pentru ecuația Duffing:

$$\boxed{\ddot{w} + \mu \dot{w} + (\alpha \pm \beta w^2)\, w = P^0 \cos(pt).} \qquad (26.20)$$

(În relațiile (26.17) și (26.20), semnul superior din fața coeficienților α și β corespunde cuplajului elastic neliniar tare, iar semnul inferior cuplajului elastic neliniar moale.)

2.° **Vibrații neliniare autonome,** caracterizate prin faptul că timpul t nu figurează în mod explicit in ecuația (26.11), evidențiindu-se, prin aceasta, absența oricărei excitații exterioare in mișcarea sistemului vibrant și deci și explicația denumirii de „autonome" dată vibrațiilor efectuate in aceste condițiuni.

Ecuația diferențială a vibrațiilor neliniare autonome ale unui sistem vibrant staționar cu un grad de libertate va avea deci următoarea formă generală:

$$\boxed{\ddot{w} + G(w, \dot{w}) = 0.} \qquad (26.21)$$

În tehnica vibrațiilor se intilnesc frecvent două clase principale de vibrații neliniare autonome și anume:

a) *Vibrațiile autonome cvasiliniare,* caracterizate prin următoarea formă particulară a funcției $G(w, \dot{w})$:

$$G(w, \dot{w}) = k^2 w + \varepsilon\, [h(w, \dot{w})], \qquad (26.22)$$

Scanned with CamScanner

cu k și ε reprezentind niște constante fizice, prima purtind, din motive ce vor fi arătate ulterior, denumirea de *pulsație proprie a sistemului vibrant*, iar cea de-a doua satisfăcind condiția

$$0 < \varepsilon \leqslant 1 . \tag{26.23}$$

Forma (26.22) a funcției $G(w, \dot{w})$ corespunde situației cind sistemul vibrant ar fi solicitat prin intermediul unui cuplaj elastic liniar, $(Q_c(w) = -k^2 w)$, dar cu amortizare cu caracteristică neliniară, $(Q_d(w, \dot{w}) = -\varepsilon[h(w, \dot{w})])$.

Rezultă deci că vibrațiile cvasiliniare ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate vor fi descrise de următoarea ecuație diferențială :

$$\boxed{\ddot{w} + k^2 w + \varepsilon\,[\,h(w, \dot{w})] = 0}\,. \tag{26.24}$$

Tipurile cele mai des intilnite de vibrații cvasiliniare sînt :

α) *Vibrațiile cvasiliniare cu amortizare slabă*, corespunzătoare condițiilor

$$k^2 = 1\,; \quad h(w, \dot{w}) \equiv h(\dot{w}) = -(\mu - \lambda \dot{w}^2)\,\dot{w}, \tag{26.25}$$

cu

$$\mu > 0\,; \ \lambda > 0, \tag{26.26}$$

pentru care ecuația (26.24) ia forma

$$\boxed{\ddot{w} + w - \varepsilon\,(\mu - \lambda\,\dot{w}^2)\,\dot{w} = 0}\,, \tag{26.27}$$

cunoscută in literatura de specialitate sub numele de *ecuația Rayleigh*.

β) *Vibrațiile cvasiliniare autoexcitate*, corespunzătoare condițiilor

$$k^2 = 1\,; \ h(w, \dot{w}) = -(\alpha - \beta\,w^2)\,\dot{w}, \tag{26.28}$$

cu

$$\alpha > 0\,; \ \beta > 0\,; \ \ w \leqslant w_a, \tag{26.29}$$

unde w_a este valoarea parametrului lagrangeian w care satisface relația

$$\alpha - \beta\,w_a^2 = 0, \tag{26.30}$$

in această situație ecuația (26.24) luind forma

$$\boxed{\ddot{w} + w - \varepsilon(\alpha - \beta\,w^2)\dot{w} = 0}\,, \tag{26.31}$$

Scanned with CamScanner

este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuația van der Pol*.

Este ușor de arătat că ecuațiile Rayleigh și van der Pol sînt echivalente între ele din punct de vedere matematic.

Într-adevăr, derivînd în raport cu timpul ecuația (26.27), se capătă relația

$$\dddot{w} + \dot{w} - \varepsilon(\mu - 3\lambda\dot{w}^2)\ddot{w} = 0,$$

care, prin introducerea notațiilor

$$\dot{w} = \xi; \quad \ddot{w} = \dot{\xi}; \quad \dddot{w} = \ddot{\xi}; \quad \mu = \alpha; \quad 3\lambda = \beta,$$

ia forma

$$\ddot{\xi} + \xi - \varepsilon(\alpha - \beta\xi^2)\dot{\xi} = 0,$$

identică, sub aspect matematic, cu ecuația (26.31).

b) *Vibrațiile neliniare autonome de relaxare*, caracterizate tot prin forma (26.22) a funcției $G(w, \dot{w})$, cu k^2 și $h(w, \dot{w})$ avînd și acum valorile (26.28) dar cu condiția

$$\varepsilon \gg 1. \qquad (26.32)$$

Ecuația diferențială care va modela matematic acest ultim tip de vibrații neliniare autonome va avea deci tot forma (26.31) a ecuației van der Pol, dar cu ε satisfăcînd condiția (26.32).

26.1.1. Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare

Considerind cazul general, al unui sistem vibrant cu r grade de libertate care execută mișcări vibratorii în jurul poziției sale de echilibru stabil, cu coordonatele generalizate alese astfel incit să aibă valorile zero pentru această poziție de echilibru ($q_{k_{st}} = 0$; $q_k^* = w_k$; $k = 1, 2, \ldots, r$), sistem pentru care deci energia cinetică va avea expresia (24.20), adică se va putea scrie

$$\mathscr{E}(w, \dot{w}) \equiv \mathscr{E}(\dot{w}) = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r} a_{ki}\,\dot{w}_k\,\dot{w}_i\,, \qquad (26.33)$$

cu

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial w_k} \equiv 0; \quad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}_k} = \sum_{i=1}^{r} = a_{ki}\,\dot{w}, \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \qquad (26.34)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

se vor admite o serie de ipoteze de lucru privind solicitările aplicate sistemului vibrant, unele din ele găsindu-și confirmarea în situațiile intîlnite în tehnica vibrațiilor, iar altele fiind introduse pentru a se realiza o modelare matematică mai generală a fenomenelor vibratorii liniare. Aceste ipoteze sînt:

— Forțele generalizate conservative statice au, ca urmare a valabilității principiului deplasărilor virtuale aplicat la statică, valori egale cu zero, adică sînt valabile condițiile

$$Q_{c_{st_k}} = 0, \ (k = 1,2,\ldots, r); \tag{26.35}$$

— Funcția potențială generalizată din care derivă forțele generalizate conservative depinde și de timp explicit, o asemenea situație putînd fi întîlnită, de exemplu, la *sistemele vibrante cu rigiditate variabilă în timp*, la care legăturile elastice — cel puțin unele din ele — se comportă tot în limitele de valabilitate a legii lui Hooke, dar cu factorii de proporționalitate dintre solicitări și deformațiile corespunzătoare funcții cunoscute de timp, cel mai adesea periodice, în loc să fie constanți; este ușor de verificat că și în asemenea situații expresia (24.60) a funcției potențiale — și deci și expresiile (24.61) ale forțelor conservative — își păstrează valabilitatea, cu deosebirea că de astă dată mărimile c_{ki} nu vor mai fi constante, ci funcții cunoscute de timp.

Considerînd deci această din urmă situație, mai generală, forțele generalizate conservative dinamice ce vor acționa asupra unui sistem vibrant executînd mișcări oscilatorii în jurul poziției sale de echilibru stabil vor avea expresiile

$$Q_{c_{d_k}} = Q_{c_k}(w_i t) = -\sum_{i=1}^{r} c_{ki}(t)\, w_i, \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{26.36}$$

Se înțelege că în acest mod, expresiile forțelor generalizate conservative corespunzătoare sistemelor vibrante cu rigiditate constantă vor reprezenta forme particulare ale expresiilor (23.48), corespunzătoare condițiilor

$$c_{ki}(t) \equiv c_{ki} = \text{const.}, \quad (k, i = 1,2,\ldots, r). \tag{26.37}$$

— Funcția disipativă a lui Rayleigh, din care derivă forțele generalizate disipative, depinde, de asemenea, explicit și de timp, situație care ar putea fi întîlnită în cazul unor sisteme vibrante la care factorii de proporționalitate dintre solicitările de amortizare și

Scanned with CamScanner

parametrii cinematici relativi de ordinul întîi, corespunzători, ai rigidelor cuplate prin elemente elastice, nu sînt constanți, ci funcții cunoscute de timp; nu este greu de verificat că și în aceste condițiuni rămîn valabile expresiile (24.210) ale forțelor generalizate disipative, cu singura deosebire că mărimile b_{hi} vor fi acum funcțiuni cunoscute de timp.

Considerînd deci o asemenea situație mai generală, cînd se spune că *sistemul vibrant are amortizare variabilă în timp*, forțele generalizate disipative vor avea expresiile

$$Q_{d_k}(w \cdot \dot{w};\ t) \equiv Q_{d_k}(\dot{w}, t) = -\sum_{i=1}^{r} b_{ki}(t)\dot{w}_i.$$

$$(k = 1,2,\ldots, r). \tag{26.38}$$

— Excitația, care este, în general, exterioară, dar care, în anumite situații, poate avea și o origine internă, ca la *sistemele vibrante autoexcitate* care vor fi prezentate ulterior, poate acționa cu o oarecare întîrziere τ față de evoluția principalelor mărimi ce caracterizează mișcarea sistemului vibrant, aceste mărimi fiind, de regulă, deplasările generalizate; asemenea tipuri de *sisteme vibrante liniare cu excitație întîrziată* pot fi întîlnite, de exemplu, la modelarea mișcărilor vibratorii ale mașinilor unelte care prelucrează profile cu neregularități care revin periodic în zonele de lucru.

Forțele generalizate corespunzătoare unor asemenea excitații vor avea deci expresii de forma

$$Q_{ex_k} = Q_{ex_k}(w\,(t-\tau)),\quad (k = 1,2,\ldots,\ r)\,, \tag{26.39}$$

unde τ este durata întîrzierii; cel mai adesea, aceste expresii capătă formele particulare

$$Q_{ex_k}(w\,(t-\tau)) = h_k\, w_k(t-\tau),\quad (k = 1, 2,\ldots, r) \tag{26.40}$$

cu h_k constante.

În ipotezele de lucru adoptate mai sus, sistemul lagrangeian (26.1) de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului vibrant capătă forma simplificată

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}_k}\right) = Q_{c_k}(w, t) + Q_{d_k}(\dot{w}, t) + Q_{e_k}(w(t-\tau)),$$

$$(k = 1,2,\ldots, r), \tag{26.41}$$

Scanned with CamScanner

sau încă, folosind relațiile (26.34), (26.36) și (26.38) și trecind în membrul sting termenii datorați solicitărilor conservative și disipative, rezultă următoarea formă finală pentru *sistemul de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare ale unui sistem vibrant în jurul poziției sale de echilibru stabil*:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r}[a_{ki}\ddot{w}_i + b_{ki}(t)\dot{w}_i + c_{ki}(t)w_i] = Q_{ex_k}(w(t-\tau)) \\ (k = 1,2,\ldots,r)\end{gathered}} \tag{26.42}$$

În baza notațiilor matriceale, ca de exemplu (24.37), introduse în paragrafele precedente, completate și cu notația

$$\ddot{\mathbf{w}} = \|\ddot{w}_1 \ddot{w}_2 \ldots \ddot{w}_i \ldots \ddot{w}_r\|^T \tag{26.43}$$

și cu observația că elementele matricelor $\mathbf{C}$ și $\mathbf{B}$ vor fi acum funcții cunoscute de timp, iar ale matricei $\mathbf{S}$ funcții cunoscute de diferența $(t-\tau)$, evidențiindu-se aceste dependențe prin notațiile $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ și $\mathbf{S}(t-\tau)$, sistemul de ecuații (26.42) va putea fi retranscris sub următoarea *formă matriceală generală a sistemului de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare ale unui sistem vibrant în jurul poziției de echilibru stabil*:

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}(t)\,\mathbf{w} = \mathbf{S}(t-\tau)} \tag{26.44}$$

În funcție de dependența — sau nu — de timp a unora dintre caracteristicile dinamice generalizate ale sistemului vibrant, se pot distinge următoarele forme particulare principale ale ecuațiilor diferențiale liniare ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant:

a) Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale sistemelor vibrante cu rigiditate și amortizare constante și cu excitație întîrziată

Considerind numai cazul cel mai des intîlnit în aplicațiile tehnice, al sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate și cu excitația intîrziată de forma (26.40), particularizarea la această

situație a ecuațiilor (26.42) se va face în baza condițiilor

$$r = 1; \quad \tau \neq 0;$$
$$a_{11} = a; \quad b_{11} = b = \text{const}; \quad c_{11} = c = \text{const}; \tag{26.45}$$
$$Q_{ex_1}(t - \tau) = h\, w\,(t - \tau),$$

rezultînd astfel următoarea formă concretă a *ecuației diferențiale a vibrațiilor liniare ale sistemelor vibrante cu excitație întîrziată*:

$$\boxed{a\,\ddot{w}(t) + b\dot{w}(t) + c\,(w(t) = h\,w(t - \tau)}\,. \tag{26.46}$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $w\,(t - \tau)$ în jurul valorii t, se obține relația

$$w\,(t - \tau) = w(t) - \tau\,\dot{w}(t) + \frac{1}{2\,!}\,\tau^2\,\ddot{w}(t) + \ldots +$$
$$+(-1)^n\,\frac{\tau^n}{n\,!}\,w^{(n)}\,(t) + \ldots = w(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\,(-1)^n\,\frac{\tau^n}{n\,!}\,w^n\,(t) =$$
$$= w(t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\,(-1)^n\,\frac{\tau^n}{n\,!}\,\frac{w'^n}{w}\right], \tag{26.47}$$

cu

$$w^{(n)} = \frac{d^n w}{dt^n}, \tag{26.48}$$

în baza căreia ecuația (26.46) va lua forma

$$\ddot{w} + \frac{b}{a}\,\dot{w} + \frac{c}{a}\,w - \frac{h}{a}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\,(-1)^n\,\frac{\tau^n}{n\,!}\,\frac{w^{(n)}}{w}\right]w = 0. \tag{26.49}$$

Folosind substituția

$$w = w_0\,e^{zt}, \tag{26.50}$$

cu

$$w^{(n)} = z^n w_0 e^{zt} = z^n\,w, \tag{26.51}$$

expresia din paranteza pătrată din ecuația (26.49) va putea fi scrisă sub forma

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\tau^n}{n!}\frac{w^n}{w} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}(\tau z)^n = e^{-\tau z}, \tag{26.52}$$

ceea ce permite ca ecuația (26.46) să poată fi retranscrisă sub următoarea formă finală

$$\boxed{\ddot{w} + 2\mu\,\dot{w} + k^2 w - pw\,e^{-\tau z} = 0}, \tag{26.53}$$

cu următoarele semnificații pentru noii coeficienți ai ecuației

$$2\mu = \frac{b}{a};\quad k^2 = \frac{c}{a};\quad p = \frac{h}{a}. \tag{26.54}$$

b) Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale sistemelor vibrante cu rigiditate și amortizare variabile.

Considerînd și acum, tot din motive de complexitate matematică a problemei, numai cazul sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate, particularizarea ecuațiilor (26.42) la această nouă situație se va face în baza condițiilor

$$\tau = 0;\ r = 1. \tag{26.55}$$

În consecință, folosind notațiile simplificate de mai jos :

$$a_{11} = a;\ b_{11}(t) = b(t);\ c_{11}(t) = \\ = c(t);\quad Q_{ex}(t) = Q(t), \tag{26.56}$$

va rezulta următoarea formă pentru *ecuația diferențială a vibrațiilor liniare parametrice* — cum se mai numesc vibrațiile efectuate în condițiile precizate mai sus — ale sistemelor vibrante cu un grad de libertate :

$$\boxed{a\,\ddot{w} + b(t)\,\dot{w} + c(t)\,w = Q(t)}. \tag{26.57}$$

Scanned with CamScanner

Se va arăta, in continuare, că în cazul cînd $b(t)$ este integrabilă, printr-o schimbare convenabilă de variabilă ecuația diferențială (26.57) poate fi transformată intr-o altă ecuație diferențială de ordinul doi, tot liniară și cu coeficienți variabili, dar fără termenul conținînd derivata de ordinul întîi a noii funcții de timp introduse.

Într-adevăr, folosind substituția

$$w = w\,(t) = y\,(t)\,e^{-\frac{1}{2a}\int b(t)\,dt}, \tag{26.58}$$

cu

$$\dot{w} = \left[\dot{y} - \frac{1}{2a}\,b(t)\,y\right]e^{-\frac{1}{2a}\int b(t)\,dt} \tag{26.59}$$

și

$$\ddot{w} = \left[\ddot{y} - \frac{1}{2a}\,\dot{b}\,y - \frac{1}{a}\,b\,\dot{y} + \frac{1}{4a^2}\,b^2 y\right]e^{-\frac{1}{2a}\int b(t)\,dt}, \tag{26.60}$$

ecuația (26.57) va mai putea fi adusă la forma

$$\ddot{y} + \frac{1}{a}\left[c - \frac{1}{2}\,\dot{b} - \frac{1}{4a}b^2\right]y = \frac{1}{a}\,Q(t)\,e^{\frac{1}{2a}\int b(t)\,dt} \tag{26.61}$$

sau încă, introducînd notațiile

$$\frac{1}{a}\left[c - \frac{1}{2}\,\dot{b} - \frac{1}{4a}\,b^2\right] = g(t)\,; \quad \frac{1}{a}\,Q(t)\,e^{\frac{1}{2a}\int b(t)\,dt} = f(t), \tag{26.62}$$

la forma

$$\boxed{\ddot{y} + g(t)\,y = f(t)}. \tag{26.63}$$

În unele situații, sistemul vibrant cu rigiditate și amortizare variabilă nu este excitat ($Q\,(t) \equiv 0$), rezultînd astfel condiția

$$f(t) \equiv 0, \tag{26.64}$$

iar funcția $g(t)$ este periodică și pară, de perioadă

$$T = \frac{2\pi}{p} \tag{26.65}$$

Scanned with CamScanner

unde p este pulsația fundamentală, ultima funcție putînd fi dezvoltată deci într-o serie Fourier de forma

$$g(t) = \left[\frac{1}{2} g_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_\lambda \cos(\lambda pt)\right]. \tag{26.66}$$

În această situație, ecuația (23.75) va lua forma

$$\boxed{\ddot{y} + \left[\frac{1}{2} g_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_\lambda \cos(\lambda pt)\right] y = 0} \tag{26.67}$$

și este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *ecuația Hill*.

O formă particulară a acestei ecuații o constituie *ecuația Mathieu*, care corespunde situației cînd din seria trigonometrică poate fi reținută numai armonica fundamentală, adică

$$\boxed{\ddot{y} + \left[\frac{1}{2} g_0 + g_1 \cos(pt)\right] y = 0}. \tag{26.68}$$

Ecuația Hill — și deci și ecuația Mathieu — modelează matematic, în particular, vibrațiile liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate, neexcitat, cu amortizare neglijabilă ($b(t) \equiv 0$) și cu caracteristica rigidității exprimată printr-o funcție periodică de timp, ($g(t) \equiv c(t) = c(t + T)$).

e) Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale sistemelor vibrante cu rigiditate și amortizare constante.

Acest ultim tip de vibrații liniare în jurul poziției de echilibru stabil va fi caracterizat prin condițiile

$$\tau = 0\,; \tag{26.69}$$

$$b_{ki}(t) \equiv b_{ki} = \text{const}\,;\quad c_{ki}(t) \equiv c_{ki} = \text{const.},$$

$$(k, i = 1, 2, \ldots, r).$$

Scanned with CamScanner

sau

$$\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{B};\ \mathbf{C}(t) \equiv \mathbf{C};\ \mathbf{S}(t-\tau) \equiv \mathbf{S}, \tag{26.70}$$

în baza cărora sistemele (26.42) și (26.44) de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare vor lua formele particulare

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r} [a_{ki}\ddot{w}_i + b_{ki}\dot{w}_i + c_{ki}w_i] = Q_k(t)\\ (k = 1, 2, \ldots, r),\end{gathered}}\ , \tag{26.71}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{S}} \tag{26.72}$$

în transcrierea matriceală.

Mișcările oscilatorii ale sistemelor vibrante descrise, sub forma diferențială, prin ecuațiile (26.71) sau (26.72) se numesc *vibrații liniare forțate cu amortizare și cu argument întîrziat.*

În multe situații, fie amortizarea, fie excitația, fie chiar ambele tipuri de solicitări, pot fi neglijate, obținîndu-se următoarele tipuri particulare de vibrații liniare ale sistemelor vibrante cu rigiditate constantă :

— *Vibrației liniare libere cu amortizare neglijabilă*, în condițiile

$$b_{ki} = 0;\quad Q_k(t) \equiv 0,\ (k, i = 1,2,\ldots r), \tag{26.73}$$

sau

$$\mathbf{B} = \mathbf{0};\quad \mathbf{S} = \mathbf{0}, \tag{26.74}$$

cînd ecuațiile (23.83) și (23.84) iau formele

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r} [a_{ki}\ddot{w}_i + c_{ki}w_i] = 0,\\ k = (1, 2 \ldots, r),\end{gathered}} \tag{26.75}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0}}\ ; \tag{26.76}$$

— *Vibrațiile liniare libere cu amortizare*, corespunzătoare condițiilor

$$Q_k(t) \equiv 0,\ (k = 1,2,\ldots, r), \tag{26.77}$$

sau

$$\mathbf{S} = 0, \tag{26.78}$$

pentru care ecuațiile (26.71) și (26.72) iau formele

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r} [a_{ki}\,\ddot{w}_i + b_{ki}\,\dot{w}_i + c_{ki}\,w_i] = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, r)\end{gathered}}, \tag{26.79}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = O}\ ; \tag{26.80}$$

— *Vibrații liniare forțate cu amortizare neglijabilă*, în condițiile

$$b_{ki} = 0, \quad (k, i = 1,2,\ldots, r), \tag{26.81}$$

sau

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{26.82}$$

cînd ecuațiile (26.71) și (26.72) capătă formele

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1} [a_{ki}\,\ddot{w}_i + c_{ki}\,w_i] = Q_k(t) \\ (k = 1,2, \ldots, r),\end{gathered}} \tag{26.83}$$

respectiv

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{S}}\ . \tag{26.84}$$

Plecîndu-se fie de la ecuațiile generale (26.71), fie de la transcrierea matriceală (26.72) a lor, pot fi stabilite și alte forme ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru ale unui sistem vibrant cu rigiditate și amortizare constantă, forme care prezintă un interes deosebit pentru studiul vibrațiilor, pe de o parte, pentru motivul că pot ușura, în unele cazuri, rezolvarea problemei principale a tehnicii vibrațiilor — aceea a determinării răspunsurilor sistemelor vibrante — și, pe de altă parte, pentru faptul că unele din aceste forme pot scoate în evidență noi elemente permițînd caracterizarea fenomenelor vibratorii liniare.

CamScanner
Scanned with CamScanner

În cele ce urmează, vor fi prezentate aceste noi forme ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul pozițiilor de echilibru stabil ale sistemelor vibrante cu rigiditate și amortizare constante.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare sub forma normală. Prin inmulțirea fiecăruia dintre ecuațiile (26.71) cu complemenții algebrici normați a^*_{kj}, $(j = 1,2,\ldots,r)$, ai elementelor a_{kj} din determinantul matricei de inerție (24.10), adică cu mărimile

$$a^*_{kj} = \frac{A_{kj}}{\det \mathbf{I}} = (-1)^{k+j} \frac{\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \ldots & a_{k-1,r} \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \ldots & a_{k+1,r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix}}{\det \mathbf{I}}, \tag{26.85}$$

reprezentind, în același timp, elementele inversei matricei simetrice

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{I}} \begin{Vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1j} & \ldots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \ldots & A_{kj} & \ldots & A_{kr} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \ldots & A_{rj} & \ldots & A_{rr} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a^*_{11} & \ldots & a^*_{1j} & \ldots & a^*_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^*_{k1} & & a^*_{kj} & & a^*_{kr} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^*_{r1} & \ldots & a^*_{rj} & \ldots & a^*_{rr} \end{Vmatrix}, \tag{26.86}$$

— A_{kj} fiind complemenții algebrici obișnuiți ai elementelor a_{kj}—, precum și prin însumarea apoi, după indicele k, a ecuațiilor astfel multiplicate, rezultă sistemul de relații

$$\sum_{k=1}^{r} a^*_{kj}\left(\sum_{i=1}^{r} a_{ki}\ddot{w}_i\right) + \sum_{k=1}^{r} a^*_{kj}\left(\sum_{i=1}^{r} b_{ki}\dot{w}_i\right) + \sum_{k=1}^{r} a^*_{kj}\left(\sum_{i=1}^{r} c_{ki} w_i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a^*_{kj} Q_k(t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

Scanned with CamScanner

sau incă, inversind ordinea de sumare la grupurile de termeni din membrul sting al relațiilor pentru a scoate in factori comuni pe $\ddot{w}_i$, $\dot{w}_i$ și w_i, mai rezultă

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} a_{ki}\right]\ddot{w}_i + \sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} b_{ki}\right]\dot{w}_i + \\ + \sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} c_{ki}\right] w_i = \sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} Q_k(t). \tag{26.87}$$

Întrucit matricea de inerție este simetrică, și inversa ei va fi simetrică, adică vor fi valabile relațiile

$$a_{kj}^{*} = a_{jk}^{*}, (k_j = 1, 2, \ldots, r) \cdot \tag{26.88}$$

De asemenea, din teoria determinanților, se cunosc condițiile

$$\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} a_{ki} \begin{cases} = 1 \text{ pentru } i = j; \\ = 0 \text{ pentru } i \neq j. \end{cases} \tag{26.89}$$

În baza ultimelor condiții, primul grup de termeni din membrul sting al relațiilor (26.87) va căpăta următoarea semnificație

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} a_{ki}\right]\ddot{w}_i = \ddot{w}_j, \tag{26.90}$$

deoarece in suma după indicele i va rămine numai termenul pentru care i ia valoarea j.

Introducind apoi notațiile

$$\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}^{*} b_{ki}, \tag{26.91}$$

$$(j, i = 1, 2, \ldots, r),$$

cu mărimile γ_{ji} purtind numele de *coeficienți de cuplare prin amortizare* a vibrațiilor corespunzătoare gradelor de libertate j și i și formind o matrice pătratică, in general nesimetrică, notată cu

Scanned with CamScanner

simbolul **G**, numită *matrice de cuplare prin amortizare* și satisfăcind, în baza expresiilor (26.91) ale elementelor ei, relația

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{j1} & \cdots & \gamma_{ji} & \cdots & \gamma_{jr} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{r1} & \cdots & \gamma_{ri} & \cdots & \gamma_{rr} \end{Vmatrix} = \mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{B}, \tag{26.92}$$

cel de-al doilea grup de termeni din membrul sting al relațiilor (23.99) va lua forma

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*}\, b_{ki}\right]\dot{w}_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ji}\,\dot{w}_i. \tag{26.93}$$

În mod analog, introducind notațiile

$$\delta_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*}\, c_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}^{*}\, c_{ki}\,, \tag{26.94}$$

cu mărimile δ_{ji} purtind numele de *coeficienți de cuplare elastică* a vibrațiilor corespunzătoare gradelor de libertate j și i și formind, de asemenea, o matrice pătratică, in general nesimetrică, notată cu simbolul **D**, numită *matrice de cuplaj elastic*, sau incă *matrice dinamică* a sistemului vibrant și satisfăcind, in baza expresiilor (26.94) ale elementelor e , relația

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{j1} & \cdots & \delta_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{j1} & \cdots & \delta_{ji} & \cdots & \delta_{jr} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{r1} & \cdots & \delta_{ri} & \cdots & \delta_{rr} \end{Vmatrix} = \mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{C} \tag{26.95}$$

și cel de-al treilea grup de termeni din membrul sting al relațiilor (26.87) va putea fi scris sub forma

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*}\, c_{ki}\right] w_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ji} w_i. \tag{26.96}$$

Scanned with CamScanner
CamScanner

Se vor mai introduce, în fine, și notațiile

$$\sum_{k=1}^{r} a_{kj}^{*} Q_k(t) = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}^{*} Q_k(t) = h_j(t), \tag{26.97}$$

cu mărimile h_j formînd o nouă matrice coloană, notată cu simbolul **H** și satisfăcînd relația

$$\mathbf{H} = \| h_1(t) \dots h_j(t) \dots h_r(t) \|^T = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{S}, \tag{26.98}$$

În baza relațiilor (26 90), (26.93), (26.96) și 26.97), sistemul de ecuații (26.87) va lua forma

$$\boxed{\ddot{w}_j + \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ji}\dot{w}_i + \sum_{i=1}^{r} \delta_{ji} w_i = h_j}\,, \tag{26.99}$$

respectiv forma

$$\boxed{\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{D}\mathbf{w} = \mathbf{H}} \tag{26.100}$$

în transcrierea matriceală și va reprezenta *forma normală a sistemului de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu rigiditate și amortizare constante.*

Este ușor de verificat că ultima formă a acestor ecuații putea fi obținută și direct din ecuația matriceală (23.84), prin înmulțirea ei, la stînga, cu inversa matricei de inerție și prin considerarea relațiilor (26.92), (26.95) și (26.98).

În cazul cînd matricea de cuplare prin amortizare se prezintă ca o matrice diagonală, adică are forma

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{rr} \end{Vmatrix}, \tag{26.101}$$

se spune că *vibrațiile sistemului vibrant nu sînt cuplate prin amortizare între ele.*

Scanned with CamScanner

Dacă matricea dinamică a sistemului vibrant se prezintă ca o matrice diagonală, adică are forma

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_{rr} \end{Vmatrix}, \qquad (26.102)$$

se spune că *vibrațiile sistemului vibrant nu sînt cuplate elastic între ele.*

În cazul cînd atît matricea **G**, cît și matricea **D** sînt matrice diagonale, se spune că *vibrațiile sistemului vibrant sînt complet decuplate între ele*; în această ultimă situație, sistemul (23.99) de ecuații diferențiale va lua forma particulară

$$\boxed{\ddot{w}_j + \gamma_{jj}\,\dot{w}_j + \delta_{jj}\,w_j = h_j}, \qquad (26.103)$$

reducîndu-se, după cum se vede, la un număr de r ecuații diferențiale liniare independente între ele, ceea ce evidențiază faptul că fiecare parte principală a sistemului vibrant, cu poziția determinată prin parametrul lagrangeian w_j, vibrează independent de celelalte părți constitutive ale sistemului.

Se poate trage deci concluzia că forma normală a ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant permite să se stabilească *gradul de cuplare* ale vibrațiilor sistemului.

Se mai face mențiunea că în cazul unor sisteme vibrante mai simple, cu elementele supuse numai la legături active (elastice) și cu numărul gradelor de libertate coincizind cu numărul elementelor sistemului, cînd deci mărimile $\ddot{w}_j$ au semnificații de accelerații liniare sau unghiulare, ecuațiile (26.99) reprezintă chiar ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise pentru elementele izolate din sistem, după împărțirea prealabilă a lor prin caracteristicile inerțiale corespunzătoare accelerațiilor $\ddot{w}_j$; din acest motiv, această modalitate de a scrie ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare sub forma (26.99) a mai fost denumită de unii autori *metoda ecuațiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert.*

Se înțelege că formele (26.99) și (26.100) ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare vor putea fi particularizate și la sistemele vibrante cu amortizare neglijabilă ($\mathbf{B} = \mathbf{O}$) și la sistemele vibrante neexcitate ($\mathbf{S} = \mathbf{O}$).

Scanned with CamScanner

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare sub forma corespunzătoare principiului suprapunerii efectelor. Această formă a ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil este folosită, de regulă, în cazul sistemelor vibrante cu numărul gradelor de libertate egal cu numărul elementelor $(r = n)$, neamortizate $(\mathbf{B} = \mathbf{0})$ și neexcitate $(\mathbf{S} = \mathbf{0})$, cu matricea de inerție avînd forma diagonală: în aceste cazuri, ecuația matriceală (26.72) va lua forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{26.104}$$

iar înmulțirea ei cu inversa matricei de rigiditate

$$C^{-1} = \begin{Vmatrix} c_{11}^* & \ldots & c_{1r}^* \\ c_{21}^* & \ldots & c_{2r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1}^* & \ldots & c_{rr}^* \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \mathbf{C}^A = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \begin{Vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1r} \\ C_{21} & \ldots & C_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \ldots & C_{rr} \end{Vmatrix} \tag{26.105}$$

— unde $\mathbf{C}^A$ este matricea adjunctă a matricei de rigiditate, avînd ca elemente cofactorii c_{ij}^* ai elementelor c_{ij} din matricea de rigiditate (matricea $\mathbf{C}$ este simetrică) —, conduce la ecuația matriceală

$$\boxed{\mathbf{w} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0}}, \tag{26.106}$$

adică

$$\begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} c_{11}^* & \ldots & c_{1r}^* \\ c_{21}^* & \ldots & c_{2r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1}^* & \ldots & c_{rr}^* \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \vdots \\ \ddot{w}_r \end{Vmatrix} = 0, \tag{26.107}$$

căreia îi corespunde următorul sistem de ecuații concrete:

$$\boxed{w_j + \sum_{i=1}^{r} c_{ji}^* a_{ii} \ddot{w}_i = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, r)} \cdot \tag{26.108}$$

Formele (26.106) și (26.108) ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare sînt numite *forme corespunzătoare principiului suprapunerii efectelor ale ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în*

Scanned with CamScanner

jurul poziției de echilibru ale unui sistem vibrant neexcitat cu amortizare neglijabilă, denumire justificată de faptul că scrise sub formele

$$\mathbf{w} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\ \ddot{\mathbf{w}}, \qquad (26.109)$$

respectiv

$$w_j = -\sum_{i=1}^{r} c_{ij}^{*}\, a_{ii}\, \ddot{w}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, j), \qquad (26.110)$$

cu termenii $(-a_{ii}\ddot{w}_i)$ jucînd rolul de solicitări de inerție — forțe de inerție dacă $\ddot{w}_i$ sînt accelerații liniare și momente ale forțelor de inerție dacă $\ddot{w}_i$ sînt accelerații unghiulare — ele exprimă faptul că deplasările generalizate w_j se obțin prin însumarea unor termeni proporționali cu solicitările de inerție ale elementelor sistemului vibrant — deci proporționali și cu solicitările active conservative aplicate elementelor —, această însumare evidențiind suprapunerea efectelor acțiunilor acestor solicitări active.

În cazul sistemelor vibrante de tipul celui reprezentat în fig. 24.25, formate dintr-un număr oarecare de elemente fixate pe o bară elastică deformată prin încovoiere plană și executînd mișcări vibratorii de translație rectilinii în lungul unor axe normale la axa nedeformată a barei, inversa matricei de rigiditate va reprezenta, așa cum s-a arătat în § 24, matricea de influență a sistemului vibrant ($\mathbf{C}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}$) și ecuațiile (26.106) și (26.108) vor lua formele

$$\boxed{\mathbf{w} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0}}, \qquad (26.111)$$

respectiv

$$\boxed{w_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ji}\, a_{ii}\, \ddot{w}_i = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, r).} \qquad (26.112)$$

Importanța formelor (26.106) și (26.108), respectiv (26.111) și (26.112), a ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant constă, îndeosebi, în ușurința cu care pot fi scrise aceste ecuații pentru o serie de sisteme vibrante mai simple — de regulă, pentru sistemele de tipul celui reprezentat în fig. 24.25 — , ușurință care a și determinat pe unii autori să prezinte acest mod de stabilire a ecuațiilor diferențiale sub denumirea de *metoda coeficienților de influență*.

Scanned with CamScanner

Ecuațiile diferențiale în coordonate principale (normale) ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil. Studiul, sub aspectul dinamic, al vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant poate fi în mod apreciabil ușurat și chiar completat cu noi informații privind mișcarea vibratorie considerată, prin introducerea așa numitelor *coordonate principale* (*normale*), reprezentate printr-un alt număr de r mărimi independente între ele, de regulă fără semnificații fizice concrete, permițînd însă, de asemenea, determinarea univocă a pozițiilor sistemului vibrant și definite printr-o transformare liniară a coordonatelor generalizate inițiale $q_i^* = w_k$, $(k = 1,2,\ldots, r)$.

Considerînd o astfel de transformare liniară, cu coeficienții τ_{ij} ai transformării constanți, se vor putea scrie relațiile

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}\, \xi_j ; \quad \dot{w}_i = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}\, \dot{\xi}_j ; \quad \ddot{w}_i = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} \ddot{\xi}_j, \ (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{26.113}$$

care, prin introducerea matricei pătratice de ordinul r

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1r} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2r} \\ \vdots & & & \\ \tau_{r1} & \tau_{r2} & \cdots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \tag{26.114}$$

și a matricelor coloană

$$\boldsymbol{\xi} = \| \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_r \|^T ; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \| \dot{\xi}_1 \ \dot{\xi}_2 \ \ldots \ \dot{\xi}_r \|^T ;$$

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \| \ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_2 \ldots \ddot{\xi}_r \|^T, \tag{26.115}$$

vor mai putea fi scrise sub forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi} ; \quad \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\xi}} ; \quad \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\, \ddot{\boldsymbol{\xi}}. \tag{26.116}$$

Introducerea ultimelor relații în ecuația matriceală (26.72) va aduce această ecuație la forma

$$\mathbf{IT}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{BT}\, \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{CT}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}.$$

Scanned with CamScanner

iar inmulțirea, la stinga, a acestei din urmă ecuații cu transpusa matricei **T** va conduce la ecuația matriceală

$$\mathbf{T}^T\mathbf{I}\mathbf{T}\ddot{\xi} + \mathbf{T}^T\mathbf{B}\mathbf{T}\dot{\xi} + \mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T}\xi = \mathbf{T}^T\mathbf{S}, \tag{26.117}$$

care, prin introducerea matricelor patratice

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \dots & \varepsilon_{rr} \end{Vmatrix} = \mathbf{T}^T\mathbf{I}\mathbf{T} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{r1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{1r} & \tau_{2r} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{2r} & \dots & a_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1r} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{r1} & \tau_{r2} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix};$$

$$\eta = \begin{Vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1r} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{r1} & \eta_{r2} & \dots & \eta_{rr} \end{Vmatrix} = \mathbf{T}^T\mathbf{B}\mathbf{T} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{r1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{1r} & \tau_{2r} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1r} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{1r} & \tau_{r2} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix};$$

$$\varkappa = \begin{Vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \dots & \varkappa_{1r} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \dots & \varkappa_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varkappa_{r1} & \varkappa_{r2} & \dots & \varkappa_{rr} \end{Vmatrix} = \mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{r1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{1r} & \tau_{2r} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{22} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{r1} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{r1} & \tau_{r2} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \tag{26.118}$$

Scanned with CamScanner

şi a matricei coloană

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{Vmatrix} = \mathbf{T}^T\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{1r} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{1r} & \tau_{2r} & \dots & \tau_{rr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_r(t) \end{Vmatrix}, \tag{26.119}$$

cu elementele acestor matrice determinate prin relațiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_{hk} &= \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, a_{ij}\, \tau_{jk} = \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ik}\, a_{ij}\, \tau_{jh} = \varepsilon_{kh}\,; \\ \eta_{hk} &= \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, b_{ij}\, \tau_{jk} = \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ik}\, b_{ij}\, \tau_{jh} = \eta_{kh}\,; \\ \varkappa_{hk} &= \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, c_{ij}\, \tau_{jh} \quad \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ik}\, c_{ij}\, \tau_{ih} = \varkappa_{kh}\,; \\ \varkappa_{k} &= \sum_{i=1}^{r} \tau_{ik}\, Q_i(t) \qquad (h, k = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \tag{26.120}$$

va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\eta}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}, \tag{26.121}$$

acestei din urmă ecuații corespunzîndu-i următorul sistem de ecuații concrete :

$$\sum_{j=1}^{r} [\varepsilon_{kj}\, \ddot{\xi}_j + \eta_{kj}\, \dot{\xi}_j + \varkappa_{kj}\, \xi_j] = X_k. \tag{26.122}$$

Se va demonstra ulterior că cei r^2 coeficienți $\tau_{hk}(h, k = 1, 2, \dots, r)$ ai transformării (26.114) vor putea fi astfel aleși încit matricele $\boldsymbol{\varepsilon}$ și $\boldsymbol{\varkappa}$ să capete formele de matrice diagonale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r \end{Vmatrix}; \qquad \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\varkappa}_0 = \begin{Vmatrix} \varkappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varkappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \varkappa_r \end{Vmatrix}, \tag{26.123}$$

Scanned with CamScanner

adică elementele acestor matrice să satisfacă relațiile

$$\varepsilon_{hk} \begin{cases} = \varepsilon_k \text{ pentru } h = k; \\ = 0 \text{ pentru } h \neq k; \end{cases} \quad ; \quad \varkappa_{hk} \begin{cases} = \varkappa_k \text{ pentru } h = k; \\ = 0 \text{ pentru } h \neq k. \end{cases} \tag{26.124}$$

În această situație, ecuația matriceală (26.121) va lua forma

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\eta}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\varkappa}_0 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}}, \tag{26.125}$$

ei corespunzîndu-i următorul sistem de ecuații concrete

$$\boxed{\varepsilon_k \ddot{\xi}_k + \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj} \dot{\xi}_j + \varkappa_k \xi_k = X_k.} \tag{26.126}$$

Parametrii ξ_k poartă, în condițiile (26.124) pentru coeficienții transformării (26.113), numele de *coordonate principale* (*normale*) ale sistemului vibrant, iar ecuațiile (26.125) și (26.126) au fost numite *ecuațiile diferențiale în coordonate principale* (*normale*) *ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu rigiditate și amortizare constante.*

Coeficienții transformării (26.113), care satisfac condițiile (26.124), se numesc *coeficienți de distribuție*, iar matricea lor poartă, în această situație, numele de *matrice de transformare în coordonate principale.*

În absența excitațiilor, ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$; $\mathbf{X} = \mathbf{0}$), ecuațiile (26.126), luînd forma particulară

$$\varepsilon_k \ddot{\xi}_k + \sum_{j=1}^{r} \eta_{kj} \dot{\xi}_j + \varkappa_k \xi_k = 0, \tag{26.127}$$

vor admite o soluție generală de forma

$$\xi_j = \xi_j (t, C_1, \ldots, C_{2r}), \tag{26.128}$$

— unde $C_1, C_2, \ldots, C_{2r}$, sînt constante de integrare — , cu fiecare dintre mărimile ξ_j determinînd cîte un element caracteristic al mișcării vibratorii a sistemului vibrant dat, care intră, în baza relațiilor (26.113), în componența tuturor vibrațiilor corespunzătoare celor r grade de libertate ale sistemului considerat : datorită fap-

Scanned with CamScanner

tului că toți coeficienții ecuațiilor diferențiale (26.127) depind numai de parametrii constructivi ai sistemului vibrant, fiind deci proprii unui sistem vibrant dat, fiecare din termenii soluției generale (26.128), care va depinde și el numai de parametrii constructivi ai sistemului vibrant, a primit denumirea de *mod propriu de vibrație*, funcția $\xi_j = \xi_j(t, C_1, \ldots, C_{2r})$ determinînd deci modul propriu de vibrație de ordinul j.

În modul acesta, vibrația corespunzătoare gradului de libertate k, w_k, poate fi considerată, în baza relațiilor (26.113), ca rezultînd din suprapunerea celor r moduri proprii de vibrații, termenul

$$w_{k(j)} = \tau_{kj} \cdot \xi_j \tag{26.129}$$

reprezentînd ***componenta după modul de vibrație j a vibrației corespunzătoare gradului de libertate k***; de asemenea, mișcarea vibratorie, în ansamblul ei, a sistemului vibrant va fi considerată ca rezultînd din suprapunerea celor r moduri proprii de vibrație ale sistemului, totalitatea termenilor de forma (26.129), corespunzători unei aceleiași valori a indicelui j și formînd o matrice de forma

$$\mathbf{w}_{(j)} = \begin{Vmatrix} w_{1(j)} \\ \vdots \\ w_{k(j)} \\ \vdots \\ w_{r(j)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau_{1j}\ \xi_j \\ \vdots \\ \tau_{kj}\ \xi_j \\ \vdots \\ \tau_{rj}\ \xi_j \end{Vmatrix}, \tag{26.130}$$

definind ***mișcarea vibratorie a sistemului vibrant după modul propriu de vibrație de ordinul j***. Introducînd matricele coloană

$$\mathbf{T}_{(j)} = \begin{Vmatrix} \tau_{1j} \\ \vdots \\ \tau_{kj} \\ \vdots \\ \tau_{rj} \end{Vmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{26.131}$$

purtînd numele de ***vectori proprii de ordinul j ai matricei de transformare în coordonate principale***, relațiile matriceale (26.130) mai pot fi scrise sub forma

$$\mathbf{w}_{(j)} = \mathbf{T}_{(j)}\, \xi_j, \tag{26.132}$$

Scanned with CamScanner

iar prima dintre relațiile matriceale (26.116) va mai putea fi scrisă și sub forma

$$\mathbf{w} = \begin{Vmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{r} \tau_{1j}\, \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} \tau_{kj}\, \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} \tau_{rj}\, \xi_j \end{Vmatrix} = \sum_{j=1}^{r} \begin{Vmatrix} \tau_{1j}\, \xi_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_{kj}\, \xi_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_{rj}\, \xi_j \end{Vmatrix} = \sum_{j=1}^{r} \begin{Vmatrix} \tau_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_{kj} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_{rj} \end{Vmatrix} \xi_j,$$

adică

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\,\xi = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{T}_{(j)}\, \xi_j, \tag{26.133}$$

ultima expresie permițînd să se interpreteze mișcarea vibratorie a unui sistem vibrant cu r grade de libertate ca rezultînd din r mișcări vibratorii efectuate după cele r moduri proprii de vibrație ale sistemului.

Condițiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, a_{ij}\, \tau_{jk} = \varepsilon_{hk} = 0 \\ \sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, c_{ij}\, \tau_{jk} = \varkappa_{hk} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ pentru } h \neq k \tag{26.134}$$

transcrise matriceal, în baza notațiilor (26.131), sub formele

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}^{T}_{(h)}\,\mathbf{I}\,\mathbf{T}_{(k)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^{T}_{(h)}\,\mathbf{C}\,\mathbf{T}_{(k)} = \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \text{ pentru } h \neq k, \tag{26.135}$$

se numesc *relații de ortogonalitate a modurilor proprii de vibrație ale sistemului vibrant.*

Este ușor de verificat că transformarea (26.113) face ca, în condițiile (26.133), expresiile energiei cinetice și funcției potențiale să devină forme patratice care conțin numai termenii patratici în variabilele $\dot{\xi}_j$ respectiv ξ_j, nu și pe cei dreptunghiulari. Într-adevăr,

Scanned with CamScanner

în baza relațiilor (26.113) și (26.124), expresiile (26.33) și (24.60) ale funcțiilor E și V iau formele

$$\mathscr{E}(w_1\, \dot{w}) = \mathscr{E}(\dot{w}) = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r} a_{ki}\, \dot{w}_k\, \dot{w}_i = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r} a_{ki}\Big(\sum_{h=1}^{r} \tau_{kh}\, \dot{\xi}_h\Big)\Big(\sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}\dot{\xi}_j\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r}\Big(\sum_{k,i=1}^{r} \tau_{kh}\, a_{ki}\, \tau_{ij}\Big)\dot{\xi}_h\, \dot{\xi}_j = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} \varepsilon_{hj}\, \dot{\xi}_h\, \dot{\xi}_j,$$

respectiv

$$V(w) = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r} c_{ki}\, w_k\, w_i = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{r} c_{ki}\Big(\sum_{h=1}^{r} \tau_{kh}\, \xi_h\Big)\Big(\sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}\, \xi_j\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r}\Big(\sum_{k,i=1}^{r} \tau_{kh}\, c_{ki}\, \tau_{ij}\Big)\xi_h\, \xi_j = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{r} \varkappa_{hj}\, \xi_h\, \xi_j,$$

sau încă, ținind seama și de condițiile (26.124), mai rezultă

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{r} \varepsilon_h\, \dot{\xi}_h^2, \tag{26.136}$$

respectiv

$$V = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{r} \varkappa_h\, \xi_h^2, \tag{26.137}$$

justificîndu-se astfel afirmația făcută cu privire la absența, în noile forme patratice, a termenilor dreptunghiulari în variabilele $\dot{\xi}_j$, respectiv ξ_j.

În funcție de forma matricei η, modurile proprii de vibrație ale unui sistem vibrant pot fi :

α) *Moduri proprii cuplate prin amortizări*, corespunzătoare situației cînd matricea η are forma generală (26.118), nediagonalizată și cînd ecuațiile diferențiale în coordonate principale au formele (26.126), respectiv (26.127) pentru sistemele neexcitate.

β) *Moduri proprii decuplate* (necuplate prin amortizări), în cazul cînd și matricea η devine o matrice diagonală, adică de forma

$$\eta = \eta_0 = \begin{Vmatrix} \eta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \eta_{rr} \end{Vmatrix}, \tag{26.138}$$

Scanned with CamScanner
CamScanner

ceea ce implică satisfacerea condițiilor

$$\sum_{i,j=1}^{r} \tau_{ih}\, b_{ij}\, \tau_{jk} = \eta_{hk} \begin{cases} = \eta_{kk} = \eta_k & \text{pentru } h = k\,; \\ = 0 & \text{pentru } h \neq k, \end{cases} \tag{26.139}$$

respectiv a condițiilor matriceale

$$\mathbf{T}_{(h)}^{T}\mathbf{B}\,\mathbf{T}_{(k)} = \mathbf{0}, \quad \text{pentru}: \quad h \neq k. \tag{26.140}$$

În această situație, sistemele (26.126), respectiv (26.127) de ecuații diferențiale în coordonate principale vor lua formele particulare

$$\boxed{\varepsilon_k \ddot{\xi}_k + \eta_k \dot{\xi}_k + \varkappa_k \xi_k = X_k} \tag{26.141}$$

și

$$\boxed{\varepsilon_k \ddot{\xi}_k + \eta_k \dot{\xi}_k + \varkappa_k \xi_k = 0,} \tag{26.142}$$

respectiv

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\eta}_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\varkappa}_0 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}} \tag{26.143}$$

și

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\eta}_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\varkappa}_0 \boldsymbol{\xi} = 0} \tag{26.144}$$

în transcrierea matriceală, reprezentînd acum, după cum se vede, un ansamblu de r ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți, de ordinul doi, independente între ele.

Mărimile ε_h, η_h și $\varkappa_h$ vor fi numite, respectiv, *coeficienți principali cvasi inerțiali*, *coeficienți principali de amortizare* și *coeficienți principali cvasielastici*.

Unul din cazurile frecvente întîlnite în tehnica vibrațiilor cînd matricea $\boldsymbol{\eta}$ devine diagonală, este acela al *amortizării uniforme*, care se prezintă sub următoarele două forme :

— *amortizarea uniformă a maselor*, rezultînd ca efect al acțiunii rezistențelor opuse de mediu elementelor în mișcare ale sistemului vibrant, cînd se adoptă ipoteza — confirmată în multe situații de experiență — a unei proporționalități între caracteristi-

Scanned with CamScanner

cile dinamice de amortizare și între caracteristicile inerțiale generalizate, adică satisfacerea condițiilor

$$\frac{b_{hj}}{a_{hj}} = 2\,m,\ (h, j = 1, 2, \ldots, r) \tag{26.145}$$

cu consecința

$$\mathbf{B} = 2\,m\,\mathbf{I}, \tag{26.146}$$

care confirmă satisfacerea condițiilor (26.139) în baza primelor serii dintre condițiile (26.134);

— *amortizarea uniformă a rigidității*, rezultînd din proprietățile fie vîscoase, fie histeretice, ale elementelor elastice de legătură activă, cînd se acceptă ipoteza unei similitudini între distribuția caracteristicilor dinamice generalizate de amortizare și de rigiditate, adică existența unor relații de forma

$$\frac{b_{hj}}{c_{hj}} = 2\,n,\ (h, j\ 1, 2, \ldots, r), \tag{26.147}$$

cu consecința

$$\mathbf{B} = 2\,n\,\mathbf{C}, \tag{26.148}$$

care atestă valabilitatea condițiilor (26.139) în cazul satisfacerii celei de-a doua serii dintre condițiile (26.134).

Se va mai observa că modurile proprii de vibrație sînt totdeauna decuplate atunci cînd sistemele vibrante sînt cu amortizare neglijabilă ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$), în această din urmă situație ecuațiile diferențiale în coordonate principale ale vibrațiilor liniare luînd formele particulare

$$\boxed{\varepsilon_h \ddot{\xi}_h + \varkappa_h \xi_h = X_h,\ (h = 1, 2, \ldots, r)}, \tag{26.149}$$

respectiv

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\varkappa}_0\, \boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}} \tag{26.150}$$

în transcrierea matriceală, cu membrul drept luînd valoarea zero dacă sistemele vibrante sînt neexcitate ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$; $\mathbf{X} = \mathbf{0}$).

În legătură cu matricea $\mathbf{X}$, se face mențiunea că cel mai adesea excitațiile $Q_k(t)$ sînt armonice sincrone sinfazice, adică de forma

$$Q_k(t) = Q_k^0 \sin(pt), \tag{26.151}$$

Scanned with CamScanner

deci cu matricea **S** de forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^0 \sin(pt) = \|Q_1^0 \ldots Q_k^0 \ldots Q_r^0\|^T. \tag{26.152}$$

În această situație, termenii X_k din membrul drept al ecuațiilor (26.126) și (26.141) au expresiile

$$X_k = \left(\sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} Q_i^0\right) \sin(pt) = X_k^0 \sin(pt) \tag{26.153}$$

formînd matricea coloană

$$\mathbf{X} = \| X_1 \ldots X_k \ldots X_r\|^T = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}^0 \sin(pt) = \mathbf{X}_0 \sin(pt), \tag{26.154}$$

cu

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{T}^T\mathbf{Q}^0 = \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{r} \tau_{i1} Q_i^0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} Q_i^0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} \tau_{ir} Q_i^0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X_1^0 \\ \vdots \\ X_k^0 \\ \vdots \\ X_r^0 \end{matrix} \right\|. \tag{26.155}$$

În cazul cînd matricea coloană X_0 are toate elementele, cu excepția unuia din ele, de un ordin oarecare k, egale cu zero, adică are forma

$$\mathbf{X}_0 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_k^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} Q_i^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{T}_{(k)}^T \mathbf{Q}^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\|, \tag{26.156}$$

ceea ce implică satisfacerea condițiilor

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_{ih} Q_i^0 = 0, \tag{26,157}$$

respectiv a condițiilor matriceale

$$\mathbf{T}^T_{(h)}\mathbf{Q}^0 = 0, \tag{26.158}$$

iar matricea de amortizare este și ea diagonalizată prin transformarea (26.113), atunci se spune că s-a realizat *un mod principal de excitație de ordinul* j; se înțelege că pentru un sistem vibrant dat vor putea exista un număr de moduri principale de excitație distincte egal cu numărul gradelor sale de libertate, dar pentru fiecare mod de excitație în parte numai termenul corespunzător lui din matricea **X** este diferit de zero.

Cu precizările făcute mai sus, se va putea trece la stabilirea relațiilor care să permită determinarea celor r^2 elemente ale matricei de transformare în coordonate principale.

Întrucît transformarea (26.113) diagonalizează, în general, numai matricele de inerție și de rigiditate, rezultă că ea nu va fi influențată de prezența, sau absența, matricelor de amortizare și de excitație; în consecință, pentru determinarea acestei matrice de transformare va putea fi considerată situația cea mai simplă, a sistemelor vibrante neexcitate și cu amortizare neglijabilă, pentru care ecuațiile diferențiale (26.71) iau formele particulare

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}\ddot{w}_i + c_{ki}w_i) = 0. \tag{26.159}$$

După cum se știe din teoria ecuațiilor diferențiale liniare, soluția generală a unui asemenea sistem este de forma

$$w_i = W_i^0 \sin(kt + \alpha), \tag{26.160}$$

cu W_i^0, k și α constante, pentru moment, necunoscute.

Impunînd condiția ca soluția (26.160) să verifice sistemul (26.159) de ecuații diferențiale, rezultă egalitățile

$$\left[\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k^2 a_{ki}) W_i^0\right] \sin(kt + \alpha) = 0,$$

sau încă, împărțind prin $\sin(kt + \alpha) \neq 0$, se obține sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k^2 a_{ki}) W_i^0 = 0. \tag{26.161}$$

Scanned with CamScanner

Pentru ca un asemenea sistem de r ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele W_i^0, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, să admită o soluție nebanală, este necesar ca determinantul coeficienților necunoscutelor să se anuleze, adică să fie satisfăcută condiția

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2 a_{11} & \ldots & c_{1r} - k^2 a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} - k^2 a_{k1} & & c_{kr} - k^2 a_{kr} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} - k^2 a_{r1} & \ldots & c_{rr} - k^2 a_{rr} \end{vmatrix} = 0, \qquad (26.162)$$

reprezentînd o ecuație algebrică de gradul r în k^2, care, în general, va admite r rădăcini distincte k_j^2, $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Se înțelege că în această situație, pentru fiecare din rădăcinile k_j^2 se va putea forma cîte un set de r ecuații de forma (26.161). determinînd cîte un set corespunzător de valori $W_{ij}^0, (i, j = 1, 2, \ldots, r)$, ale constantelor W_i^0, aceste ecuații avînd deci formele

$$\sum_{i=1}^{r} (C_{ki} - k_j^2 a_{ki}) W_{ij}^0 = 0. \qquad (26.163)$$

Întrucît fiecare dintre rădăcinile k_j^2 satisface condiția (26.162), adică sînt valabile egalitățile

$$\Delta(k_j^2) = \begin{Vmatrix} c_{11} - k_j^2 a_{11} & \ldots & c_{1r} - k_j^2 a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1} - k_j^2 a_{1k} & \ldots & c_{kr} - k_j^2 a_{kr} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} - k_j^2 a_{r1} & \ldots & c_{rr} - k_j^2 a_{rr} \end{Vmatrix} = 0, \qquad (26.164)$$

este evident că în fiecare din sistemele (26.163), corespunzătoare unei anumite valori a indicelui j, numai un număr de $(r - 1)$ ecuații vor fi independente între ele, ceea ce înseamnă că se dispune de r sisteme de ecuații algebrice liniare omogene, fiecare sistem fiind format din cîte $(r - 1)$ ecuații distincte și conținînd cîte r necunoscute.

Scanned with CamScanner

În consecință, soluția generală (26.160) a sistemului (26.159) de ecuații diferențiale liniare va trebui scrisă, în aceste condiții, sub forma

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} W_{ij}^0 \sin (k_j t + \alpha_j). \tag{26.165}$$

Datorită faptului că mărimile

$$k_j = +\sqrt{k_j^2}, \tag{26.166}$$

reprezintă pulsațiile componentelor armonice ale vibrațiilor w_i, ecuația (26.162) a primit numele de *ecuația pulsațiilor proprii neamortizate* a sistemului vibrant considerat.

Pentru ca soluția (26.165) să aibă sens fizic, va trebui demonstrat mai întîi că pulsațiile k_j sînt reale, ceea ce revine la a demonstra că rădăcinile k_j^2 ale ecuației pulsațiilor proprii neamortizate sînt reale și pozitive.

Presupunînd că rădăcinile k_j^2 nu ar fi reale, ci complexe, atunci ele ar trebui să fie două cîte două conjugate; în această situație, și rădăcinile W_{ij}^0 ale sistemelor de ecuații (26.163) ar trebui să fie și ele complexe și conjugate două cîte două, adică, dacă există seturile de valori

$$W_{ij}^{0\prime} = X_{ij} + iY_{ij}, \tag{26.167}$$

atunci vor trebui să existe și seturile

$$W_{ij}^{0\prime\prime} = X_{ij} - iY_{ij}. \tag{26.168}$$

Admițînd această din urmă situație și considerînd sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki})\, W_{ij}^{0\prime} = 0, \tag{26.169}$$

se va multiplica fiecare din aceste ecuații cu factorii $W_{kj}^{0\prime\prime}$, corespunzători numărului k de ordine al ecuației și indicelui j al pulsației, k_j, însumîndu-se apoi, după indicele k, ecuațiile astfel multiplicate; rezultă astfel, pentru fiecare rădăcină k_j^2 a ecuației pulsațiilor egalitatea

$$\sum_{k,i=1}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki})\, W_{ij}^{0\prime} W_{kj}^{0\prime\prime} = 0,$$

sau incă, dacă se mai ține seama și de relațiile (26.167) și (26.168), se mai poate scrie

$$\sum_{k,i=1}^{r} [(c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) (X_{ij} X_{kj} + Y_{ij} Y_{kj})] +$$
$$+ i \sum_{k,i=1}^{r} [(c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) (X_{kj} Y_{ij} - X_{ij} Y_{kj})] = 0. \quad (26.170)$$

Este ușor de observat insă că ultimul grup de termeni din relația precedentă are valoarea zero. Într-adevăr, pentru aceleași valori ale indicilor k și i vor rezulta condițiile

$$X_{kj} Y_{ij} - X_{ij} Y_{kj} = 0, \quad (26.171)$$

iar pentru valori diferite ale acestor indici vor exista totdeauna perechi de termeni de forma

$$E_{ki}^{(j)} = (c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) (X_{kj} Y_{ij} - X_{ij} Y_{kj})$$

și

$$E_{ik}^{(j)} = (c_{ik} - k_j^2 a_{ik}) (X_{ij} Y_{kj} - X_{kj} Y_{ij}) =$$
$$= - (c_{ki} - k_j^2 a_{ki})(X_{kj} Y_{ij} - X_{ij} Y_{kj}) = - E_{ki}^{(j)},$$

cu suma lor egală deci cu zero.

În consecință, relația (26.170) va lua astfel forma

$$\sum_{k,i=1}^{r} [(c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) (X_{ij} X_{kj} + Y_{ij} Y_{kj})] = 0, \quad (26.172)$$

din care se va putea scoate valoarea lui k_j^2:

$$k_j^2 = \frac{\sum_{k,i=1}^{r} c_{ki}(X_{ij} X_{kj} + Y_{ij} Y_{kj}}{\sum_{k,i=1}^{r} a_{ki}(X_{ij} X_{kj} + Y_{ij} Y_{kj})}. \quad (26.173)$$

Relațiile (26.173) arată deci că toate rădăcinile k_j^2 sînt reale, membrul drept conținind numai mărimi reale; in această situație, și rădăcinile sistemelor (23.174) de ecuații algebrice liniare omogene

Scanned with CamScanner

în necunoscutele W^0_{ij} for fi, de asemenea, reale, rezultînd astfel condițiile

$$Y_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r) \tag{26.174}$$

și deci

$$W^{0\prime}_{ij} = W^{0\prime\prime}_{ij} = X_{ij} = W^0_{ij}, \tag{26.175}$$

în baza cărora expresiile (26.173) ale pătratelor pulsațiilor proprii neamortizate vor lua formele

$$k_j^2 = \frac{\sum\limits_{k,i=1}^{r} c_{ki} X_{ij} X_{kj}}{\sum\limits_{k,i=1}^{r} a_{ki} X_{ij} X_{kj}} = \frac{\sum\limits_{k,i=1}^{r} c_{ki} W^0_{ij} W^0_{kj}}{\sum\limits_{k,i=1}^{r} a_{ki} W^0_{ij} W^0_{kj}}. \tag{26.176}$$

Rămîne să se mai arate că aceste valori sînt și pozitive, în condițiile unei mișcări vibratorii stabile.

Într-adevăr, din expresia (26.165) a soluției generale a sistemului (26.159) de ecuații diferențiale, rezultă că elongațiile w_i ale vibrațiilor vor putea lua și valorile particulare

$$w_i^{(j)} = W^0_{ij}, \tag{26.177}$$

ceea ce înseamnă că suma dublă de la numărătorul fracției din membrul drept al relației (26.176) va reprezenta chiar dublul funcției potențiale $V^{(j)}$, corespunzătoare poziției determinate prin valorile $w_i^{(j)}$ ale parametrilor lagrangeieni ai sistemului vibrant, această funcție fiind, în condiții de stabilitate, pozitivă, adică se poate scrie condiția

$$\sum_{k,i=1}^{r} c_{ki} W^0_{ij} W^0_{kj} = \sum_{k,i=1}^{r} c_{ki} w_i^{(j)} w_k^{(j)} = 2\, V^{(j)} > 0. \tag{26.178}$$

Pe de altă parte, în mișcarea sistemului vibrant, vitezele generalizate $\dot{w}_i$ ar putea oricînd să ia și valorile

$$\dot{w}_i^{(j)} = W^0_{ij}, \tag{26.179}$$

ceea ce înseamnă că suma dublă de la numitorul fracției din membrul drept al relației (26.176) ar putea reprezenta dublul energiei cinetice $\mathscr{E}^{(j)}$ a sistemului vibrant; cum această energie cinetică este pozitiv definită, rezultă și condiția

$$\sum_{k,i=1}^{r} a_{ki} W^0_{ij} W^0_{kj} = \sum_{k,i=1}^{r} a_{ki} \dot{w}_i^{(j)} \dot{w}_k^{(j)} = 2\mathscr{E}^{(j)} > 0. \tag{26.180}$$

Scanned with CamScanner

Introducind valorile (26.178) și (26.180) in relația (26.176), rezultă concluziile

$$k_j^2 = \frac{V^{(j)}}{\mathscr{E}^{(j)}} > 0 \quad (26.181)$$

Cu aceasta, se poate reveni la problema determinării elementelor matricei de transformare in coordonate principale, considerindu-se din nou sistemele (26.163) de ecuații algebrice in necunoscutele W_{ij}^0, $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$, din care, in fiecare sistem, se vor lua insă numai cele $(r-1)$ ecuații alese ca independente — de exemplu, ultimele $(r-1)$ ecuații — , adică sistemele

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) W_{ij}^0 = 0, \quad (26.182)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, r),$$

fiecare cu cite r necunoscute (pentru fiecare valoare a indicelui j, indicele i ia valorile $1, 2, \ldots, r$); aceasta inseamnă că in fiecare set de ecuații una din necunoscute va rămine nedeterminată, celelalte urmind a fi determinate in funcție de această necunoscută considerată nedeterminată.

Alegind, in fiecare sistem de ecuații pe W_{1j}^0, $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ca necunoscută nedeterminată, impărțind apoi prin W_{1j}^0 ecuațiile (26.182) și introducind notațiile

$$\tau'_{ij} = \frac{W_{ij}^0}{W_{1j}^0}, \quad (26.183)$$

evident, cu

$$\tau'_{1j} = 1, \quad (26,184)$$

se vor retranscrie sistemele (26.182) sub formele

$$\sum_{i=2}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki}) \tau'_{ij} = -(c_{k1} - k_j^2 a_{k1}), \quad (26.185)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, \gamma),$$

pentru fiecare valoare a indicelui j rezultind astfel un sistem de $(r-1)$ ecuații algebrice liniare neomogene in $(r-1)$ necunoscute τ'_{ij}, $(i = 2, 3, \ldots, r)$; intrucit in fiecare sistem determinantul coeficienților necunoscutelor τ'_{ij} va fi acum diferit de zero — acest

Scanned with CamScanner

determinant este acum unul din minorii elementelor primei linii a determinanților (26.164) — , se vor putea rezolva sistemele (26.185) în raport cu necunoscutele τ'_{ij}.

Relațiile (26.183) vor permite apoi să se exprime constantele W^0_{ij} în funcție de coeficienții τ'_{ij} și de necunoscutele W^0_{1j}, adică se vor scrie relațiile

$$W^0_{ij} = \tau'_{ij} W^0_{1j}, \tag{26.186}$$

în baza cărora soluția generală (26.165) a sistemului de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare neamortizate va putea fi retranscrisă sub forma

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} \tau'_{ij} W^0_{1j} \sin (k_j t + \alpha_j). \tag{26.187}$$

Introducînd și notațiile

$$\xi'_j = W^0_{1j} \sin (k_j t + \alpha_j), \tag{26.188}$$

relațiile (26.187) vor putea fi aduse la forma finală

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} \tau'_{ij} \xi'_j \tag{26.189}$$

analoagă, după cum se vede, transformării liniare (26.113).

Pentru a stabili deplina identitate între transformarea liniară (26.113) și transformarea (26.189), va mai trebui să se demonstreze :

— Pe de o parte, că coeficienții τ'_{ij} ai transformării (26.189) satisfac și ei condițiile (26.134), adică diagonalizează matricele de inerție și de rigiditate, respectiv reduc formele patratice în $\dot{\xi}'_j$, respectiv în ξ'_j, prin care se exprimă energia cinetică și funcția potențială corespunzătoare sistemului vibrant considerat, numai la termenii patratici ;

— pe de altă parte, că mărimile ξ'_j, definite prin relațiile (26.188) deoarece soluțiile ecuațiilor diferențiale în coordonate principale ale vibrațiilor liniare neamortizate, ecuații care, în cazul de față ($\mu = 0$), vor avea formele

$$\varepsilon_h \ddot{\xi}_h + \varkappa_h \xi_h = 0, \ (h = 1, 2, \ldots, r), \tag{26.190}$$

cu ε_h și $\varkappa_h$ dați de relațiile (26.120) și (26.124).

Scanned with CamScanner

Pentru a demonstra valabilitatea condițiilor (26.134) și pentru coeficienții τ'_{ij}, se vor considera din nou sistemele de ecuații (26.185), retranscrise acum, prin adăugarea și a ecuației corespunzătoare valorii 1 a indicelui k, precum și prin considerarea și a valorilor $\tau'_{ij} = 1$, sub formele

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki})\, \tau'_{ij} = 0,$$

sau încă

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ki}\tau'_{ij} = k_j^2 \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\tau'_{ij}, \tag{26.191}$$

Înmulțind fiecare din aceste ecuații cu coeficientul τ'_{kh}, cu indicele k corespunzător numărului de ordine al ecuației din sistemele (24.134) și cu indicele h luînd toate valorile posibile și sumînd apoi, după indicele k, ecuațiile astfel multiplicate, se obține, pentru fiecare valoare a indicelui j, următorul șir de egalități

$$\sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} c_{ki} \tau'_{ij} = k_j^2 \sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} a_{ki} \tau'_{ij}, \tag{26.192}$$

sau încă, introducînd notațiile

$$\sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} c_{ki} \tau'_{ij} = \varkappa'_{hj} = \varkappa'_{jh}, \tag{26.193}$$

$$\sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} a_{ki} \tau'_{ij} = \varepsilon'_{hj} = \varepsilon'_{jh},$$

— cu simetriile justificate de sumările efectuate după indicii k și i —, se mai pot scrie egalitățile

$$\varkappa'_{hj} = k_j^2 \varepsilon'_{hj}. \tag{26.194}$$

Pe de altă parte, prin inversarea indicilor k și j, rezultă și relațiile

$$\varkappa'_{jh} = k_h^2 \varepsilon'_{jh},$$

sau încă, ținînd seama și de simetria coeficienților $\varkappa'_{jh}$ și ε'_{jh}, se mai poate scrie

$$\varkappa'_{hj} = k_h^2 \varepsilon'_{hj}, \tag{26.195}$$

Scanned with CamScanner

Relațiile (26.194) și (26.195) coincid, evident, în condițiile de identitate a indicilor h și j $(h = j)$; în schimb, în cazurile $h \neq j$, rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii neamortizate fiind, în general, distincte, adică

$$k_j^2 \neq k_h^2 \text{ pentru } h \neq j, \tag{26.196}$$

ecuațiile (26.194) și (26.195) nu vor putea fi satisfăcute simultan decît în condiț ile

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} c_{ki} \tau'_{ij} = \varkappa'_{hj} = 0 \\ \sum_{k,i=1}^{r} \tau'_{kh} a_{ki} \tau'_{ij} = \varepsilon'_{hj} = 0 \end{aligned}\right\} \text{pentru } h \neq j, \tag{26.197}$$

care arată că și o transformare liniară de forma

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} \tau'_{ij} \xi_j \tag{26.198}$$

diagonalizează matricele de inerție și de rigiditate, la fel ca și transformarea (26.113); se poate considera deci că transformarea (26,198) este chiar transformarea (26.113), adică pot fi scrise relațiile

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} \tag{26.199}$$

cu consecințele

$$\varepsilon'_{hh} = \varepsilon_h;\ \ \varkappa'_{hh} = \varkappa_h,\ (h = 1,2,\ldots,r). \tag{26.200}$$

Pentru a demonstra, în continuare, că mărimile ξ'_i, definite prin relațiile (26.188), sînt chiar soluțiile ecuațiilor diferențiale (26.190), se va remarca că aceste soluții trebuie să fie de forma

$$\xi_h = B_h \sin\ (\omega_h t + \beta_h), \tag{26.201}$$

cu B_h și β_h constante de integrare și cu pulsațiile ω_h determinate impunîndu-se condiția ca fiecare din soluțiile (26.201) să verifice ecuația (26.190) corespunzătoare aceluiași indice de ordine, ceea ce furnizează condițiile

$$(\varkappa_h - \omega_h^2 \varepsilon_h)\, B_h \sin\ (\omega_h t + \beta_h) = 0,$$

sau încă

$$\varkappa_h - \omega_h^2 \varepsilon_h = 0, \tag{26.202}$$

Scanned with CamScanner

din care vor rezulta valorile patratelor pulsațiilor ω_h:

$$\omega_h^2 = \frac{\varkappa_h}{\varepsilon_h}. \tag{26.203}$$

Pe de altă parte, expresiile (26.176) ale patratelor pulsațiilor k_h^2, care figurează în expresiile (26.188) ale variabilelor ξ_h', vor lua, în baza relațiilor (26.186), formele

$$k_h^2 = \frac{\sum\limits_{k,i=1}^{r} c_{ki}\tau_{ih}'\tau_{kh}' W_{1h}^{02}}{\sum\limits_{k,i=1}^{r} a_{ki}\tau_{ih}'\tau_{kh}' W_{1h}^{02}} = \frac{\sum\limits_{k,i=1}^{r} \tau_{kh}c_{ki}\tau_{ih}}{\sum\limits_{k,i=1}^{r} \tau_{kh}a_{ki}\tau_{ih}} = \frac{\varkappa_h}{\varepsilon_h}. \tag{26.204}$$

Compararea relațiilor (26.203) și (26.204) conduce la concluziile

$$\omega_h^2 = k_h^2, \tag{26.205}$$

care, ținînd seama și de faptul că atît B_h și β_h, cît și W_{1h}^0 și α_h, sînt constante de integrare, ceea ce înseamnă că vor putea fi făcute oricînd înlocuirile $B_h = W_{1h}^0$ și $\beta_h = \alpha_h$, vor permite să se scrie și egalitățile

$$\xi_h' = \xi_h. \tag{26.206}$$

Relațiile (26.199) și (26.206) dovedesc, în consecință, deplina identitate a transformărilor liniare (26.113) și (26.189).

Din expunerea precedentă rezultă acum și modul concret de lucru pentru transformarea sistemului (26.71) de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare ale unui sistem vibrant în sistemul de ecuații în coordonate principale, mod care va cuprinde următoarele etape de lucru:

— *Stabilirea și rezolvarea ecuației pulsațiilor proprii fără amortizare ale sistemului vibrant considerat*, adică a ecuației

$$\begin{vmatrix} c_{11} - k^2a_{11} & \dots & c_{1r} - k^2a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} - k^2a_{r1} & \dots & c_{rr} - k^2a_{rr} \end{vmatrix} = 0, \tag{26.207}$$

care, dezvoltată, va mai putea fi scrisă sub forma

$$A_r(k^2)^r + A_{r-1}(k^2)^{r-1} + \dots + A_1k^2 + A_0 = \sum_{i=0}^{r} A_i(k^2)^i = 0, \tag{26.208}$$

cu coeficienții A_i funcții de caracteristicile generalizate inerțiale și de rigiditate ale sistemului vibrant;

— *Determinarea elementelor matricei de transformare în coordonate principale*, prin rezolvarea sistemului (26.185) de ecuații algebrice liniare, scris acum, prin considerarea concluziilor (26.199), sub forma

$$\sum_{i=2}^{r} (c_{ki} - k_j^2 a_{ki})\, \tau_{ij} = -(c_{k1} - k_j^2 a_{k1}),$$

$$(k = 2, 3, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, r), \tag{26.209}$$

precum și prin completarea tabelului de coeficienți τ_{ij}, cu valorile

$$\tau_{1j} = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, r); \tag{26.210}$$

— *Calculul elementelor matricelor* $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\varkappa}_0$ și $\mathbf{X}$, în baza relațiilor

$$\varepsilon_h = \sum_{k,i=1}^{r} \tau_{kh} a_{ki} \tau_{ih} = \mathbf{T}_{(h)}^T \mathbf{I} \mathbf{T}_{(h)}; \tag{26.211}$$

$$\eta_{hj} = \sum_{k,i=1}^{r} \tau_{kh} b_{ki} \tau_{ij} = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T}; \tag{26.212}$$

$$\varkappa_h = \sum_{k,i=1}^{r} \tau_{kh} c_{ki} \tau_{ih} = \mathbf{T}_{(h)}^T \mathbf{C} \mathbf{T}_{(h)} \tag{26.213}$$

și

$$X_h = \sum_{k=1}^{r} \tau_{kh} Q_k(t) = \mathbf{T}_{(h)}^T \mathbf{S}, \tag{26.214}$$

cu

$$\mathbf{T}_{(h)} = \mathbf{I} \tau_{1h} \ldots \tau_{kh} \ldots \tau_{rh} \mathbf{I}^T, \quad (h, j = 1,2, \ldots, r). \tag{26.215}$$

În legătură cu ecuația (26.208) a pulsațiilor proprii fără amortizare trebuie făcută observația că dacă pentru un sistem vibrant cu două grade de libertate rezolvarea unei asemenea ecuații, redusă în acest caz numai la ecuația bipătrată

$$A_2(k^2)^2 + A_1 k^2 + A_0 = 0, \tag{26.216}$$

nu ridică probleme, în schimb, pentru sisteme cu un număr de grade de libertate superior lui doi, calculul rădăcinilor ecuației pulsațiilor

Scanned with CamScanner

proprii fără amortizare devine extrem de complicat, fiind realizabil doar prin metode aproximative.

Dacă toți parametrii constructivi ai sistemului vibrant sînt nominalizați, ceea ce înseamnă că sînt cunoscute valorile numerice concrete ale caracteristicilor inerțiale și ale constantelor elastice, atunci coeficienții C_{ki} și a_{ki}, și deci și coeficienții A_i ai ecuației (26.208) — au și ei valori numerice concrete și rezolvarea ecuației pulsațiilor proprii este mult ușurată prin posibilitatea de a utiliza fie metode grafice expeditive, fie tehnica modernă de calcul (MEC).

Metoda grafică cea mai frecvent folosită constă în reprezentarea grafică a funcției

$$y = F(k^2) = \sum_{i=0}^{r} A_i (k^2)^i, \qquad (26.217)$$

rădăcinile $k_j^2 = k_j^{2\prime}$ căutate fiind reprezentate în acest caz prin abscisele punctelor de intersecție ale graficului cu axa absciselor.

În unele cazuri este mai avantajos să se despartă expresia $F(k^2)$ într-o sumă de două grupuri de termeni, adică se scrie

$$F(k^2) = F_1(k^2) - F_2(k^2). \qquad (26.218)$$

în această nouă situație, rădăcinile ecuației (23.241) fiind reprezentate prin abscisele punctelor de intersecție ale curbelor

$$y_1 = F_1(k^2); \quad y_2 = F_2(k^2). \qquad (26.219)$$

Valorile aproximative $k_j^{2\prime}$ astfel găsite pentru patratele pulsațiilor proprii fără amortizare pot fi corectate, prin considerarea unor noi valori, $k_j^{2\prime\prime}$, foarte apropiate de valorile $k_j^{2\prime}$, prin calcularea apoi a corecțiilor $\delta(k_j^{2\prime})$ cu ajutorul formulei

$$\delta(k_j^{2\prime}) = -F(k_j^{2\prime}) \frac{k_j^{2\prime\prime} - k_j^{2\prime}}{F(k_j^{2\prime\prime}) - F(k_j^{2\prime})} \qquad (26.220)$$

și prin adoptarea valorilor corectate

$$k_j^2 = k_j^{2\prime} + \delta(k_j^{2\prime}). \qquad (26.221)$$

Tehnica modernă de calcul, utilizînd mașinile electronice de calcul, oferă în prezent posibilitatea obținerii imediate a rădăcinilor unei ecuații de forma (26.208), cu o precizie oricît de mare, depășind necesitățile practicii, folosind în acest scop programe adecvate

Scanned with CamScanner

(în limbajele FORTRAN, programul PORAB, bazat pe metoda lui Bairstow, programul PORAN, bazat pe metoda lui Newton ș.a.).

În tehnica vibrațiilor se obișnuiește însă să se studieze și sisteme vibrante cu parametrii constructivi nenominalizați, acest mod de abordare a problemelor permițînd deseori să se tragă concluzii mai generale privind funcționarea sistemului; se înțelege că în aceste cazuri coeficienții c_{ki} și a_{ki} — și deci și coeficienții A_i ai ecuației pulsațiilor proprii — vor conține și factori literali, ceea ce înseamnă că nu se va mai putea apela la una din metodele expeditive, menționate mai sus, pentru determinarea rădăcinilor ecuației, ci va trebui să se recurgă la metode aproximative analitice pentru calculul lor.

Metodele analitice pot fi împărțite la rîndul lor, în două grupe:

— *Metode de iterație* (Metoda Rayleigh, metoda iterației matriceale, metoda Stodola ș.a.), bazate, în principiu, pe adoptarea unei forme inițiale arbitrare pentru modurile proprii pentru care se urmărește să se determine pulsația proprie fără amortizare, obținîndu-se apoi, prin procedee de iterație, valorile acestor pulsații — cel puțin ale unora dintre ele —, cu aproximația dorită. Valabilitatea metodelor de iterație este pe deplin justificată de constatarea că procesele de iterație sînt totdeauna convergente și că conduc la același rezultat, indiferent de forma inițială aleasă, aceasta din urmă influențînd doar asupra numărului de iterații ce vor trebui efectuate pentru obținerea rezultatului.

— *Metode de tip „pas cu pas"* (Metoda Holzer, metoda Hyklestad și Prohl ș.a.), în care, în principiu, se pleacă de la valori inițiale arbitrare ale pulsațiilor proprii fără amortizare ale sistemului vibrant, calculîndu-se apoi abaterea sistemului de la starea de echilibru dinamic și de deformație corespunzătoare valorilor reale ale pulsațiilor proprii, abatere care se exprimă prin funcții de pătratul pulsației proprii; reprezentările grafice ale acestor abateri în funcție de pătratul pulsației proprii furnizează valorile aproximative ale pătratelor pulsațiilor proprii fără amortizare, aceste valori fiind reprezentate prin abscisele punctelor în care graficele ating axa absciselor (punctele în care abaterile devin zero).

În încheierea prezentării diverselor forme ale ecuațiilor diferențiale, în coordonate generalizate, ale dinamicii vibrațiilor sistemelor

Scanned with CamScanner

mecanice, vor mai fi stabilite formele concrete ale acestor ecuații pentru cele trei tipuri particulare de sisteme vibrante frecvent întîlnite în aplicațiile tehnice, pentru care au fost determinate și formele concrete ale matricelor de inerție, de rigiditate și de amortizare, corespunzătoare situației cînd execută vibrații liniare în jurul pozițiilor lor de echilibru stabil.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant constituit din elemente cuplate elastic în serie și executînd translații rectilinii în lungul aceleiași axe. Prin alegerea axei fixe Ox după direcția translațiilor rectilinii ale elementelor, (fig. 26.1), și a coordonatelor generalizate în baza relațiilor (24.17) ($q_i^* = w_i = x_i^* = x_{G_i} - x_{G_{i_{st}}}$; $i = 1, 2, \ldots, r$), ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui asemenea sistem vibrant vor putea fi scrise sub formele

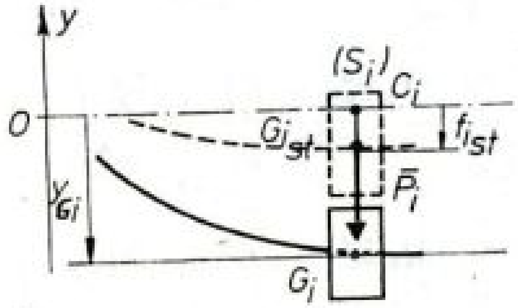


Fig. 26.1

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ki}\ddot{x}_i^* = Q_{cd_k} + Q_{d_k} + Q_{ex_k}. \tag{26.222}$$

Observînd că în baza condițiilor (22.13) grupele de termeni din membrul stîng al ecuațiilor, reprezentînd derivatele în raport cu timpul ale impulsurilor generalizate h_k, au valorile

$$\dot{h}_k = \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\ddot{x}_i^* = M_k\ddot{x}_k^*, \tag{26.223}$$

că forțele generalizate de excitație vor avea, în acest caz, efectiv dimensiuni fizice de forțe

$$Q_{ex_k}(t) = F_k(t) \tag{26.224}$$

și că forțele generalizate conservative și disipative au expresiile (24.112) și (24.288), respectiv expresiile (24.113) și (24.289) pentru ecuația corespunzătoare primului grad de libertate și expresiile

(24.114) și (24.290) pentru ecuația corespunzătoare ultimului grad de libertate, sistemul (26.252) de ecuații diferențiale va putea fi scris sub următoarea formă concretă, corespunzătoare tipului particular de sistem vibrant considerat, cu numărul gradelor de libertate egal cu numărul elementelor $(r = n)$:

$$\begin{aligned}
&M_1\ddot{x}_1^* + (C_{10}^0 + C_{12}^0)\,\dot{x}_1^* - C_{12}^0\dot{x}_2^* + (k_{e_{10}} + k_{e_{12}})\,x_1^* - \\
&\qquad - k_{e_{12}}x_2^* = F_1;\\
&\vdots\\
&M_k\ddot{x}_k^* - C_{k-1,k}^0\dot{x}_{k-1}^* + (C_{k-1,k}^0 + C_{k,k+1}^0)\,\dot{x}_k^* - C_{k,k+1}^0\dot{x}_{k+1}^* - \\
&\qquad - k_{e_{k-1,k}}x_{k-1}^* + (k_{e_{k-1,k}} + k_{e_{k,k+1}})\,x_k^* - k_{e_{k,k+1}}x_{k+1}^* = F_k\\
&\vdots\\
&M_n\ddot{x}_n^* - C_{n-1,n}^0\dot{x}_{n-1}^* + (C_{n-1,n}^0 + C_{n,0}^0)\,\dot{x}_n^* - k_{e_{n-1,n}}x_{n-1}^* + \\
&\qquad + (k_{e_{n-1,n}} + k_{e_{n,0}})\,x_n^* = F_n\\
&\qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)
\end{aligned} \tag{26.225}$$

Matriceal, acest sistem va putea fi retranscris sub forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{K}\mathbf{x}^* = \mathbf{F}, \tag{26.226}$$

cu matricele $\mathbf{M} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{K} \equiv \mathbf{C}$ avînd formele (23.10), (24.190) și (24.150), cu $\mathbf{x}^*$, $\dot{\mathbf{x}}^*$ și $\ddot{\mathbf{x}}^*$ reprezentînd matrice coloane ale deplasărilor elementelor față de pozițiile lor de echilibru stabil, respectiv ale vitezelor și accelerațiilor lor și cu matricea $\mathbf{F}$ reprezentînd matricea coloană a forțelor de excitație aplicate elementelor sistemului vibrant.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant constituit din elemente plasate pe o bară elastică deformabilă prin încovoiere plană și executînd translații rectilinii în lungul normalelor la axa nedeformată a barei. În mod obișnuit, la asemenea sisteme vibrante, al căror număr de grade de libertate coincide și cu numărul elementelor sistemului $(r = n)$, axa nedeformată a barei este orizontală, iar mișcările vibratorii ale

Scanned with CamScanner

elementelor sînt considerate, prin neglijarea micilor abateri, ca efectuindu-se pe verticală; de asemenea, la aceste sisteme vibrante se neglijează, de regulă, amortizările.

În consecință, prin alegerea verticalei ca direcție a axei fixe Oy (fig. 26.2), precum și a parametrilor lagrangeieni ai sistemului în concordanță cu relațiile (24.145), ($q_i^* = w_i = y_i^* = y_{G_i} - y_{G_{i_{st}}}$; $i = 1,2,\ldots, r = n$), ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare ale unui asemenea sistem în jurul poziției sale de echilibru stabil vor putea fi scrise sub forma

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ki}\ddot{y}_i^* = Q_{ed_k} + Q_{ex_k}.$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r). \qquad (26.227)$$

În baza condițiilor (24.16), grupurile de termeni din membrul stîng al ecuațiilor vor căpăta valorile

$$\dot{h}_k = \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\ddot{y}_i^* = M_k\ddot{y}_k^*. \qquad (26.228)$$

Dacă se mai ține seama și de expresiile (24.148) ale forțelor generalizate elastice dinamice, precum și de faptul că forțele generalizate de excitație vor avea și acum dimensiuni fizice de forțe ($Q_{ex_k} = F_k$; $\mathbf{S} = \mathbf{F}$), vor rezulta următoarele forme concrete pentru ecuațiile (26.227):

$$\boxed{M_k\ddot{y}_k^* + \sum_{j=1}^{n} k_{e_{kj}}y_j^* = F_k} \cdot \qquad (26.229)$$

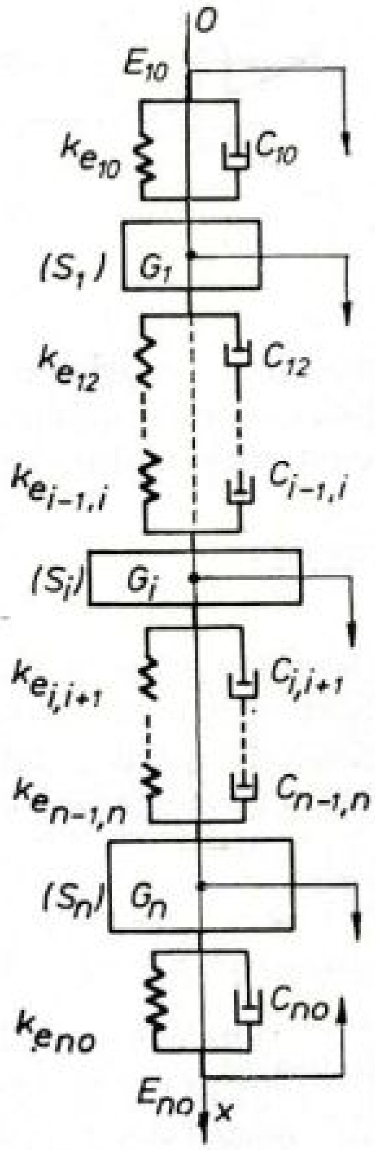


Fig. 26.2.

Sistemul precedent de ecuații poate fi retranscris matriceal sub forma

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}^* + \mathbf{K}\mathbf{y}^* = \mathbf{F}}, \qquad (26.230)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

unde $\mathbf{y}^*$ și $\ddot{\mathbf{y}}^*$ sint matricele coloană ale deplasărilor elementelor raportate la pozițiile lor de echilibru static, respectiv ale accelerațiilor de translație ale lor.

Ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant constituit din elemente cuplate elastic în serie și executînd rotații în jurul aceleiași axe fixe. Alegînd axa de rotație ca axă fixă Oz și ca axe $Q_i z_i'$ invariabil legate de elementele sistemului vibrant (fig. 26.3), precum și parametrii lagrangeieni ai sistemului sub forma definită prin relațiile (24.17) ($q_i^* = w_i = \varphi_i^* = \varphi_i - \varphi_{i_{st}}$; $i = 1, 2, \ldots, r$), ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor liniare

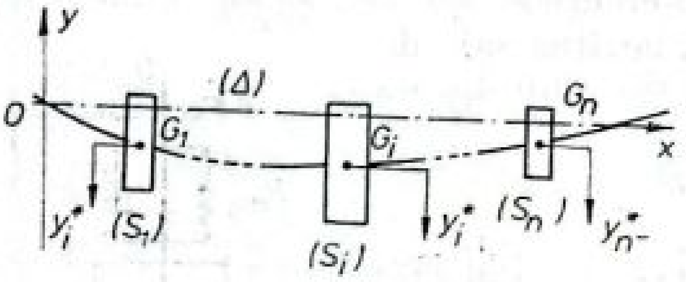


Fig. 26.3.

în jurul poziției de echilibru stabil ale unui asemenea sistem vibrant, cu numărul gradelor de libertate egal și aici cu numărul elementelor lui, ($r = n$), vor putea fi scrise sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\ddot{\varphi}_i^* = Q^*_{ed_k} + Q^*_{d_k} + Q^*_{ex_k}. \tag{26.231}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r = n).$$

În baza condițiilor (24.18), grupurile de termeni din membrul sting al ecuațiilor se vor reduce numai la cite un termen:

$$\dot{h}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\ddot{\varphi}_i^* = J_k\ddot{\varphi}_k^*. \tag{26.232}$$

Dacă se mai ține seama și de expresiile (24.148) și (24.3) ale forțelor generalizate elastice dinamice și ale forțelor generalizate de amortizare — respectiv, de expresiile acestor forțe pentru ecuația corespunzătoare primului grad de libertate și de expresiile lor pentru ecuația corespunzătoare ultimului grad de libertate —, precum și de faptul că forțele generalizate de excitație au, în acest caz, semnificații fizice de momente

Scanned with CamScanner

($Q_{es_k} = \mathscr{M}_k^{(t)}(t)$; $\mathbf{S} = \mathscr{M}$), atunci se obține următoarea formă concretă pentru sistemul de ecuații (26.231):

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1^* + (D_{10}^0 + D_{12}^0)\,\dot{\varphi}_1^* - D_{12}^0\dot{\varphi}_2^* + (k_{t_{10}} + k_{t_{12}})\,\varphi_1^* - k_{t_{12}}\varphi_2^* = \mathscr{M}_1;\\
&\vdots\\
&J_k\ddot{\varphi}_k^* - D_{k,k-1}^0\dot{\varphi}_{k-1}^* + (D_{k,k-1}^0 + D_{k,k+1}^0)\,\dot{\varphi}_k^* - D_{k,k+1}^0\dot{\varphi}_{k+1}^* -\\
&\vdots\qquad - k_{t_{k,k-1}}\varphi_{k-1}^* + (k_{t_{k,k-1}} + k_{t_{k,k+1}})\,\varphi_k^* - k_{t_{k,k+1}}\varphi_{k+1}^* = \mathscr{M}_k;\\
&J_n\ddot{\varphi}_n^* - D_{n,n-1}^0\dot{\varphi}_{n-1}^* + (D_{n,n-1}^0 + D_{n,0}^0)\,\dot{\varphi}_n^* - k_{t_{n,n-1}}\varphi_{n-1}^* +\\
&\qquad + (k_{t_{n,n-1}} + k_{t_{n,0}})\,\varphi_n^* = \mathscr{M}_n.\\
&\qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)
\end{aligned} \tag{26.233}$$

În transcrierea matriceală, sistemul precedent de ecuații va lua forma

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^* + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^* + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}^* = \mathscr{M} \tag{26.234}$$

cu $\boldsymbol{\varphi}^*$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^*$ și $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^*$ reprezentînd coloanele matrice ale unghiurilor de rotație raportate la pozițiile de echilibru static ale elementelor, respectiv ale vitezelor lor unghiulare și ale accelerațiilor lor unghiulare, cu matricea de inerție $\mathbf{I} = \mathbf{J}$, cu matricea de amortizare $\mathbf{B}$ avînd forma (24.184) dar cu elementele determinate prin relațiile (24.187), cu matricea de rigiditate $\mathbf{C} = \mathbf{K}$ avînd forma (24.150), dar cu elementele date de relațiile (24.130) și cu $\mathbf{S} = \mathscr{M}$ reprezentînd matricea coloană a momentelor de excitație aplicate elementelor sistemului vibrant.

Pentru a încheia cu prezentarea ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare ale celor trei tipuri particulare de sisteme vibrante considerate mai sus, se va mai face mențiunea că pentru fiecare din ele se va putea face oricînd trecerea de la sistemele de ecuații stabilite sub forma generală, la celelalte forme de ecuații: la ecuațiile sub forma normală, la ecuațiile sub forma corespunzătoare principiului suprapunerii efectelor și la ecuațiile în coordonate principale.

Scanned with CamScanner

Pentru sistemele vibrante de tipul celor reprezentate în figurile (26.1) și (26.3), se folosește, cel mai adesea, forma normală (26.100) a ecuațiilor diferențiale, adică forma

$$\boxed{\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{D}\mathbf{x}^* = \mathbf{H}} \cdot \tag{26.235}$$

respectiv

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\varphi}}^* + \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^* + \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{H}}, \tag{26.236}$$

cu matricele **G**, **D** și **H** determinate prin relațiile

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\,;\ \mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\,;\ \mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \tag{26.237}$$

în cazul sistemelor vibrante de tipul celui reprezentat în fig. 26.1 și prin relațiile

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}\,;\ \mathbf{D} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}\,;\ \mathbf{H} = \mathbf{J}^{-1}\mathscr{M} \tag{26.238}$$

în cazul sistemelor vibrante de tipul celui reprezentat în fig. 26.3.

Datorită formei diagonale a matricei de inerție în aceste cazuri, adică

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{26.239}$$

cu $a_{ii} = M_i$, sau $a_{ii} = J_i$, $(i = 1, \ 2, \dots n)$, după cum sistemul vibrant este de tipul celui reprezentat în fig. 26.1, sau de tipul celui reprezentat în fig. 26.3, matricele **G**, **D** și **H** se obțin direct din matricele **B**, **C** și **S**, prin împărțirea elementelor din fiecare linie ale acestor din urmă matrice la caracteristica inerțială cu același număr de ordine ca și al liniei considerate.

Într-adevăr, în acest caz sînt valabile condițiile

$$A_{hj} \begin{cases} = 0 & \text{pentru } h \neq j\,; \\ = a_{11}a_{22} \dots a_{j-1,j-1}a_{j+1,j+1} \dots a_{nn} & \text{pentru } h = j, \end{cases} \tag{26.240}$$

Scanned with CamScanner

CS CamScanner

cu consecințele ($\det \mathbf{I} = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$):

$$a^*_{hj} \begin{cases} = 0 \quad \text{pentru } h \neq j; \\ = \dfrac{1}{a_{jj}} \quad \text{pentru } h = j, \end{cases} \tag{26.241}$$

în baza cărora relațiile (26.91), (26.94) și (26.97) vor lua formele particulare

$$\begin{aligned} \gamma_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a^*_{kj} b_{ki} = a^*_{jj} b_{ji} = \frac{b_{ji}}{a_{jj}}; \\ \delta_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a^*_{kj} c_{ki} = a^*_{jj} c_{ji} = \frac{c_{ji}}{a_{jj}}; \\ h_j &= \sum_{k=1}^{n} a^*_{kj} F_k = a^*_{jj} F_j = \frac{F_j}{a_{jj}}, \end{aligned} \tag{26.242}$$

$$(j,\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

rezultînd astfel următoarele forme pentru matricele **G**, **D** și **H**:

$$\mathbf{G} = \left\| \begin{array}{cccccc} \dfrac{b_{11}}{b_{11}} & \dfrac{b_{12}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dfrac{b_{21}}{a_{22}} & \dfrac{b_{22}}{a_{22}} & \dfrac{b_{23}}{a_{22}} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{b_{n,n-1}}{a_{nn}} & \dfrac{b_{nn}}{a_{nn}} \end{array} \right\| . \tag{26.243}$$

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{array}{cccccc} \dfrac{c_{11}}{a_{11}} & \dfrac{c_{12}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dfrac{c_{21}}{a_{22}} & \dfrac{c_{22}}{a_{22}} & \dfrac{c_{23}}{a_{22}} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{c_{n,n-1}}{a_{nn}} & \dfrac{c_{nn}}{a_{nn}} \end{array} \right\| , \tag{26.244}$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\mathbf{H} = \left\| \frac{Q_{ex_1}}{a_{11}} \; \frac{Q_{ex_2}}{a_{22}} \; \ldots \; \frac{Q_{ex_n}}{a_{nn}} \right\|^T, \tag{26.245}$$

cu

$$a_{kk} = M_k; \; Q_{ex_k} = F_k \tag{26.246}$$

$$(k = 1,2,\ldots, n)$$

și cu coeficienții b_{hj} și c_{hj} dați de relațiile (24.200) și (24.31) în cazul sistemelor vibrante de tipul celui reprezentant în fig. 26.1 și cu

$$a_{kk} = J_k; \; Q_{ex_k} = \mathscr{M}_k \tag{26.247}$$

și cu coeficienții b_{hj} și c_{hj} dați de relațiile (24.188) și (24.44) în cazul sistemelor vibrante de tipul celui reprezentat în fig. 26.3.

În ceea ce privește ecuațiile sistemelor vibrante de tipul celui reprezentat în fig. 26.2, trecerea se face obișnuit la forma corespunzătoare principiului suprapunerii efectelor, scriindu-se aceste noi ecuații sub forma

$$\boxed{\begin{gathered} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} M_i \ddot{y}_i^* = W_j \\ (j = 1,2, \ldots, r), \end{gathered}}, \tag{26.248}$$

respectiv sub forma

$$\boxed{\mathbf{y}^* + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}^* = \mathbf{W}} \tag{26.249}$$

în transcrierea matriceală, $\boldsymbol{\alpha}$ reprezentînd matricea coeficienților de influență corespunzător sistemului vibrant considerat, iar matricea $\mathbf{W}$ fiind matricea corespunzătoare excitațiilor, cu elementele date de relațiile

$$W_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} F_k, \; (j = 1,2,\ldots, n). \tag{26.250}$$

Scanned with CamScanner

26.2. Ecuațiile diferențiale, în variabile de stare, ale vibrațiilor sistemelor mecanice, efectuate în jurul pozițiilor lor de echilibru static

Conform expunerii din § 14 al lucrării (Vol. II), sistemul (26.1) de ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi în parametrii lagrangeieni w_k, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ va putea fi înlocuit cu sistemul echivalent de ecuații canonice ale lui Hamilton, avînd în cazul de față forma

$$\dot{w}_k = \frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial h_k}; \; \dot{h}_k = -\frac{\partial \mathscr{H}^*}{\partial w_k} + Q_{d_k} + Q_{ex_k}(t), \qquad (26.251)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

reprezentînd deci un sistem de $2r$ ecuații de ordinul întîi în parametrii lagrangeieni w_k și în impulsurile generalizate

$$h_k = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}_k} = \sum_{i=1}^{r} g_{ki} \dot{w}_i. \qquad (26.252)$$

mărimea

$$\mathscr{H}^* = \sum_{i=1}^{r} h_i \dot{w}_i - (\mathscr{E} - V) = \mathscr{H}(w, \dot{w}, h, t) \qquad (26.253)$$

fiind cunoscuta funcție caracteristică a lui Hamilton corespunzătoare sistemelor vibrante conservative.

Rezolvînd în raport cu necunoscutele $\dot{w}_i$ sistemul (26.252) de ecuații algebrice neomogene în vitezele generalizate, acestea din urmă mărimi vor putea fi exprimate liniar în funcție de impulsurile generalizate prin relații de forma

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}(w, t)\, h_j = \dot{w}_i(w, h, t), \; (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (27.254)$$

astfel că înlocuirea lor în expresia funcției caracteristice a lui Hamilton și în expresile forțelor generalizate va face ca aceste exprsii să capete formele

$$\mathscr{H}^* = \mathscr{H}^*(w, \dot{w}(w, h, t), h, t) = \widetilde{\mathscr{H}}(w, h^*, t), \qquad (26.255)$$

respectiv

$$Q_{d_k} = Q_{d_k}(w, \dot{w}(w, h, t), t) = \widetilde{Q}_{d_k}(w, h, t). \qquad (26.256)$$

Scanned with CamScanner

În consecință, in baza ultimelor relații, sistemul (26.257) de ecuații canonice va putea fi retranscris sub forma

$$\dot{w}_k = \frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial h_k^*}\,;\ \dot{h}_k = -\frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial w_k} + Q_{d_k}(w, h, t) + Q_{ex_k}(t), \qquad (26.257)$$

cu termenii din membrul drept depinzînd deci de cele două serii de variabile canonice și, în cazul cel mai general, și de timp explicit.

Introducerea notațiilor

$$w_k = u_k\,;\ h_k = u_{r+k} \qquad (26.258)$$

și

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial h_k} = \frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial u_{r+k}} = U_k(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}, t)\,;$$
$$-\frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial w_k} + \widetilde{Q}_{d_k} + Q_{ex_k}(t) = U_{r+k}(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}\ t), \qquad (26.259)$$

permite să se retranscrie sistemul (26.286) de ecuații canonice sub forma concentrată de mai jos

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{u}_j = U_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}, t)\\ (j = 1, 2, \ldots, 2r)\end{gathered}}\,. \qquad (26.260)$$

Datorită faptului că mărimile $w_k(t)$ și $\dot{w}_k(t)$, respectiv $w_k(t)$ și $h_k(t)$, determină complet starea sistemului mecanic la momentul t — mărimile $w_k(0)$ i $h_k(0)$ determinînd starea inițială a sistemului —, variabilele u_j au fost numite *variabilele de stare* ale sistemului vibrant considerat, iar ecuațiile diferențiale ale mișcării scrise sub forma (26.259) au primit denumirea de *ecuațiile de stare ale sistemelor vibrante neautonome.*

În cazul sistemelor vibrante autonome timpul nu va mai figura în mod explicit în expresia (26.255) a funcției caracteristice a lui Hamilton și în expresiile (26.256) ale forțelor generalizate disipative, iar în cea de-a doua serie de ecuații canonice (26.255) nu vor mai figura în membrul drept nici forțele de excitație, depinzînd de timp ; în consecință, în aceste cazuri nici funcțiile U_j din membrul drept

Scanned with CamScanner

al ecuațiilor (26.261) nu vor mai conține, în mod explicit, timpul t, adică aceste ecuații vor avea formele particulare

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{u}_j = U_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}) \\ (j = 1,2, \ldots, r)\end{gathered}}\,, \tag{26.261}$$

numite *ecuațiile de stare pentru sistemele vibrante autonome.*

Dacă sistemele vibrante sînt liniare și staționare (caracteristicile dinamice generalizate conservative și disipative sînt constante), expresiile (26.252) ale impulsurilor generalizate iau formele

$$h_k = \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\dot{w}_i, \tag{26.262}$$

cu coeficienții cvasi-inerțiali a_{ij} constanți, iar rezolvarea, în raport cu necunoscutele $\dot{w}_i$, a sistemului (26.261) de ecuații algebrice liniare neomogene în vitezele generalizate va furniza expresiile acestor viteze generalizate ca funcții liniare de impulsurile generalizate:

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}h_j, \tag{26.263}$$

cu coeficienții α_{ij} constanți de astă dată.

De asemenea, în cazul sistemelor vibrante liniare staționare, energia cinetică și funcția potențială a sistemului vor avea expresiile (24.20), respectiv (24.60), adică

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{r} a_{hk}\dot{w}_h\dot{w}_k\,; \quad V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}w_iw_j, \tag{26.264}$$

cu caracteristicile dinamice generalizate conservative c_{ij} constante, ceea ce va face ca expresia (26.253) a funcției hamiltoniene să capete forma concretă de mai jos

$$\mathscr{H}^* = \sum_{i=1}^{r} h_i\dot{w}_i - \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{r} a_{hk}\dot{w}_h\dot{w}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}w_iw_j. \tag{26.265}$$

Scanned with CamScanner

Înlocuirea expresiilor (25.14) ale vitezelor generalizate în relația (25.16) conduce la următoarea expresie a funcției H^*

$$\mathscr{H}^* = \sum_{i=1}^{r} h_i \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} h_j \right) - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{r} a_{hk} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{hi} h_i \right) \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} h_j \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij} w_i w_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \left(2\alpha_{ij} - \sum_{h,k=1}^{r} a_{hk} \alpha_{hi} \alpha_{kj} \right) h_i h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij} w_i w_j,$$

care, prin introducerea notațiilor

$$\gamma_{ij} = 2\alpha_{ij} - \sum_{h,k=1}^{r} a_{hk} \alpha_{hi} \alpha_{kj}, \qquad (26.266)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, r),$$

mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathscr{H}^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} h_i h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij} w_i w_j = \widetilde{\mathscr{H}}(w, h), \qquad (26.267)$$

cu consecințele

$$-\frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial w_k} = -\sum_{i=1}^{r} c_{ki} w_i = -\sum_{i=1}^{r} c_{ki} u_i ;$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{H}}}{\partial h_k} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ki} h_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ki} u_{r+i}. \qquad (26.268)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

În ceea ce privește forțele generalizate disipative, ele vor avea, în cazul sistemelor vibrante liniare staționare, expresiile (24.280), care, ținînd seama și de relațiile (26.264), vor mai putea fi scrise sub forma

$$Q_{d_k} = -\sum_{h=1}^{r} b_{kh} \dot{w}_h = -\sum_{h=1}^{r} b_{kh} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{hi} h_i \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{h=1}^{r} b_{kh} \alpha_{hi} \right) h_i = \widetilde{Q}_{d_k}(h)$$

sau încă, introducînd notațiile

$$\varepsilon_{ki} = \sum_{h=1}^{r} b_{kh} \alpha_{hi}, \qquad (26.269)$$

sub forma finală

$$\widetilde{Q}_{d_k} = -\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{ki} h_i = -\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{ki} u_{r+i}. \qquad (26.270)$$

În fine, în legătură cu excitațiile, se precizează faptul că în cele ce urmează se va considera numai cazul cînd forțele generalizate de excitație se modifică identic în timp, adică sînt de forma

$$Q_{ex_k}(t) = Q_k^0 f(t), \qquad (26.271)$$

cu Q_k^0 constante.

În baza relațiilor (26.269), (26.270) și (26.271), expresiile (26.260) ale funcțiilor U_j vor lua formele particulare

$$U_k = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ki} u_{r+i};$$

$$U_{r+k} = -\sum_{i=1}^{r} c_{ki} u_i - \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{ki} u_{r+i}, \qquad (26.272)$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare staționare.

Introducînd notațiile

$$\left.\begin{aligned} E_{ki} &= 0 \\ E_{k,r+i} &= \gamma_{ki} \\ E_{r+k,i} &= -c_{ki} \\ E_{r+k,r+i} &= -\varepsilon_{ki} \end{aligned}\right\} \text{pentru}: k, i = 1, 2, \ldots, r \qquad (26.273)$$

și

$$I_j \begin{cases} = 0 & \text{pentru } j = 1, 2, \ldots, r; \\ = Q_j^0 & \text{pentru } j = r+1, \ldots, 2r, \end{cases} \qquad (26.274)$$

se verifică cu ușurință că relațiile (26.272) pot fi scrise sub forma concentrată

$$U_j = \sum_{i=1}^{2r} E_{ji} u_i + I_j f(t) \qquad (26.275)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 2r),$$

Scanned with CamScanner

în baza cărora ecuațiile (26.261) vor căpăta forma particulară

$$\boxed{\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{2r} E_{ji} u_i + I_j f(t)} \tag{26.276}$$

purtînd numele de *ecuațiile de stare pentru sisteme vibrante liniare staționare*.

În cazul sistemelor vibrante liniare staționare neexcitate exterior (sisteme autonome), $(f(t) \equiv 0)$, ecuațiile de stare vor lua formele simplificate

$$\boxed{\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{2r} E_{ji} u_i} \, . \tag{26.277}$$

Matricele coloană

$$\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_{2r} \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{I} = \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_j \\ \vdots \\ I_{2r} \end{Vmatrix} \, . \tag{26.278}$$

poartă numele de *vector de stare* al sistemului vibrant, respectiv de *matrice de aplicație a comenzii* corespunzătoare sistemului vibrant considerat, matricea patratică

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} E_{11} & \dots & E_{1i} & \dots & E_{1,2r} \\ E_{21} & \dots & E_{2i} & \dots & E_{2,2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{j1} & \dots & E_{ji} & \dots & E_{j,2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{2r,1} & \dots & E_{2r,i} & \dots & E_{2r,2r} \end{Vmatrix} \, . \tag{26.279}$$

Scanned with CamScanner

a fost numită *matrice de evoluție* a sistemului vibrant, iar mărimea scalară $f(t) = f$, considerată ca un vector de dimensiune unu, a primit denumirea de *vector de intrare* sau de *vector de comandă*.

Cu notațiile introduse, ecuațiile de stare (26.276) și (26.277) pot fi scrise sub formele matriceale de mai jos:

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} + \mathbf{I}f} \tag{26.280}$$

pentru sistemele vibrante liniare neautonome și

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}} \tag{26.281}$$

pentru sistemele vibrante liniare autonome.

§ 27. Răspunsul sistemelor vibrante supuse la excitații deterministe

Apariția, la un moment inițial t_0 — considerat, obișnuit, ca moment zero —, a mișcării vibratorii a unui sistem mecanic aflat, pînă în acel moment, în poziție de echilibru stabil ($q_{st_k} = 0$; $k = 1, 2, \ldots, r$), se poate datora cel puțin unuia din următorii trei factori:

— Variația impulsivă a energiei potențiale a sistemului vibrant prin scoaterea instantanee, la momentul t_0, a sistemului din poziția corespunzătoare stării sale de echilibru stabil și aducerea sistemului într-o poziție învecinată, determinată prin valorile w_k^0 ale variațiilor parametrilor lagrangeieni, adică prin impunerea *condițiilor de poziție*:

$$w_k(t_0) = w_k^0\,; \quad \dot{w}_k(t_0) = 0, \quad (k = 1,2,\ldots, r)\,; \tag{27.1}$$

— variația impulsivă a energiei cinetice a sistemului mecanic, prin imprimarea bruscă, la momentul t_0, a unor valori $\dot{w}_k^0$ ale variațiilor $\dot{w}_k$ ale vitezelor generalizate, adică prin impunerea *condițiilor de viteză*:

$$w_k(t_0) = 0\,; \quad \dot{w}_k(t_0) = \dot{w}_k^0 \quad (k = 1, 2,\ldots, r)\,; \tag{27.2}$$

Scanned with CamScanner

— aplicarea, la momentul t_0, a unor excitații, cu forțele generalizate de excitație $Q_{ex_k} = Q_k(t)$ satisfăcînd condițiile $Q_k(t) \equiv 0$, pentru :

$$t < t_0, \ (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{27.3}$$

Mișcarea sistemului vibrant efectuată în absența oricărei excitații, apărută ca urmare fie a intervenției numai a unuia din primii doi dintre factorii menționați mai sus, fie a intervenției simultane a ambilor factori, în această din urmă situație rezultînd următoarele condiții inițiale generale de poziții și viteze :

$$t = t_0, \ \{w_k(t_0) = w_k^0 ; \ \dot{w}_k(t_0) = \dot{w}_k^0 ; \ k = 1, 2, \ldots, r\}, \tag{27.4}$$

se numește ***mișcare vibratorie proprie***.

Mișcarea sistemului vibrant datorată numai intervenției excitației, efectuată deci în absența primilor doi dintre factorii menționați ($w_k^0 = 0$; $\dot{w}_k^0 = 0$; $k = 1, 2, \ldots, r$), este numită ***mișcare vibratorie forțată***.

Se înțelege că în cazul cel mai general, apariția mișcării vibratorii a unui sistem mecanic se va putea datora intervenției simultane a tuturor celor trei factori amintiți ; în asemenea situații, mișcarea, în ansamblul ei, a sistemului vibrant va rezulta, de cele mai multe ori, prin suprapunerea mișcării vibratorii forțate peste mișcarea vibratorie proprie.

Se numește ***răspuns al unui sistem vibrant excitat***, ansamblul mărimilor care pot caracteriza evoluția sistemului vibrant ulterioară momentului t_0 al aplicării excitației și, în deosebi, al mărimilor care permit să se stabilească dependența elementelor ce caracterizează vibrația forțată — amplitudine, fază, frecvență — de forma excitației ; aceste răspunsuri pot fi prezentate sub una din următoarele forme principale :

— *sub forma ecuațiilor finite ale mișcărilor vibratorii*

$$w_i = w_i(t_1 \, w^0, \, \dot{w}^0), \ (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{27.5}$$

rezultînd prin integrarea exactă — atunci cînd este posibilă —, sau aproximativă, a sistemelor de ecuații diferențiale ale mișcărilor vibratorii și prin determinarea constantelor de integrare cu ajutorul sistemelor corespunzătoare de condiții inițiale ;

Scanned with CamScanner

— *sub forma soluțiilor numerice*

$$w_i^{(j)} = w_i(t_j, w^0, \dot{w}^0), \quad (i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots s), \qquad (27.6)$$

obținute prin integrarea numerică, cu ajutorul MEC, a sistemelor de ecuații diferențiale ale vibrațiilor, s fiind numărul de valori succesive calculate;

— *sub forma curbelor de răspuns*, adică a unor grafice exprimînd variația amplitudinii sau a fazei inițiale a vibrației fie în timp — cînd graficele poartă numele de *spectre ale răspunsului*—, fie în funcție de frecvența excitației — cînd graficele respective se numesc *diagrame amplitudine — frecvență*, sau *diagrame fază— frecvență* dacă sînt construite în planul real și *diagrame polare ale răspunsului* dacă sînt construite în planul complex, în ultima situație fiind posibilă a reprezenta simultan variațiile amplitudinii și a fazei inițiale în funcție de frecvența excitației;

— *sub forma traiectoriilor de fază*, adică a unor curbe determinate prin ecuații de forma

$$w = f(\dot{w}), \qquad (27.7)$$

curbe care permit, pe baza metodelor topologice, să se studieze mișcările posibile ale sistemelor vibrante și să se pună în evidență chiar și anumite proprietăți ale acestor mișcări, fără a putea furniza însă anumite rezultate numerice concrete.

În continuare, vor fi prezentate diverse moduri de determinare a răspunsurilor sistemelor vibrante supuse la excitații deterministe, mai intîi pentru sistemele vibrante liniare și apoi pentru cele neliniare.

27.1. *Studiul răspunsurilor sistemelor vibrante liniare*

Întrucît pentru tipurile de excitații deterministe intîlnite obișnuit în aplicațiile tehnice sistemele de ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil sînt totdeauna integrabile, este firesc ca principala metodă de studiere a răspunsurilor sistemelor mecanice ce execută asemenea vibrații să fie *metoda soluției exacte a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcărilor lor*, scrise, de regulă, fie sub forma generală, în parametrii lagrangeieni obișnuiți, fie sub forma corespunzătoare coordonatelor principale.

Scanned with CamScanner

27.1.1. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale, în coordonate generalizate, ale vibrațiilor liniare ale unui sistem mecanic, efectuate în jurul poziției de echilibru stabil

După cum s-a arătat în paragraful precedent, mișcarea vibratorie în jurul poziției de echilibru stabil a unui sistem vibrant liniar cu r grade de libertate este descrisă prin sistemul de ecuații diferențiale

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}\ddot{w}_i + b_{ki}\dot{w}_i + c_{ki}w_i) = Q_k(t), \tag{27.8}$$

retranscris matriceal sub forma concentrată

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{S}. \tag{27.9}$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare se știe însă că soluția generală a unui asemenea sistem are forma

$$w_i = w_{ip} + w_{if} \tag{27.10}$$

respectiv forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}_f \tag{27.11}$$

în transrcierea matriceală, in care w_{ip} reprezintă soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale omogene

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}\ddot{w}_i + b_{ki}\dot{w}_i + c_{ki}w_i) = 0\,; \tag{27.12}$$

și ea determină mișcarea proprie a sistemului vibrant, iar w_{if} ($i = 1, 2, \ldots, r$) reprezintă o soluție particulară a sistemului (27.8) de ecuații, a cărei formă este determinată de forma excitației și care determină mișcarea forțată a sistemului vibrant.

Căutînd soluții ale sistemului de ecuații (27.12) sub forma

$$w_{ip} = Z_i e^{zt} \tag{27.13}$$

cu constantele Z_i și z determinate prin impunerea condiției ca aceste soluții să verifice sistemul (27.12), rezultă astfel condițiile

$$\left[\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}z^2 + b_{ki}z + c_{ki})\, Z_i\right] e^{zt} = 0, \tag{27.14}$$

Scanned with CamScanner

sau încă, simplificînd prin e^{zt}, condițiile

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}z^2 + b_{ki}z + c_{ki}) Z_i = 0, \tag{27.15}$$

ultimele reprezentînd un sistem de r ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele Z_i.

Pentru ca sistemul (27.15) ecuații algebrice să adimtă o soluție nebanală, este necesar ca determinantul coeficienților necunoscutelor Z_i să fie egal cu zero, rezultînd astfel condiția

$$\begin{vmatrix} a_{11}z^2 + b_{11}z + c_{11} & \dots & a_{1r}z^2 + b_{1r}z + c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}z^2 + b_{r1}z + c_{r1} & \dots & a_{rr}z^2 + b_{rr}z + c_{rr} \end{vmatrix} = 0, \tag{27.16}$$

reprezentînd o ecuație algebrică de gradul $2r$ în Z, de forma

$$\sum_{i=0}^{2r} B_i z^i = B_{2r}z^{2r} + B_{2r-1}z^{2r-1} + \dots B_2 z^2 + B_1 z + B_0 = 0, \tag{27.17}$$

numită *ecuația caracteristică a sistemului vibrant.*

Întrucît coeficienții ecuației (27.17) sînt toți reali, rădăcinile ecuației vor fi sau reale, sau complexe, în ultima situație fiind conjugate două cîte două; în primul caz, mișcarea proprie a sistemului vibrant nu va avea caracter oscilatoriu, în timp ce în cel de-al doilea caz ea va fi, așa cum se va arăta în continuare, vibratorie.

Considerînd, în cele ce urmează, numai cazul rădăcinilor complexe conjugate două cîte două și distincte, caz care prezintă cel mai mare interes pentru tehnica vibrațiilor, se face mențiunea că se poate demonstra matematic, pe baza unor criterii datorate lui Hurwitz și Routh, că pentru sistemele vibrante întîlnite obișnuit în aplicațiile tehnice partea reală a rădăcinilor ecuației caracteristice este negativă, iar partea imaginară este pozitivă, adică faptul că aceste rădăcini, care pot fi determinate cu ajutorul MEC pe baza acelorași programe PORAB sau PORAN, folosite și la rezolvarea ecuației pulsațiilor proprii fără amortizare, sînt de forma

$$z'_j = -\mu_j + ik_j^*; \quad z''_j = -\mu_j - ik_j^*, \tag{27.18}$$

cu

$$\mu_j > 0; \ k_j^* > 0. \tag{27.19}$$

Scanned with CamScanner

Se va arăta acum că partea reală a acestor rădăcini se datorează exclusiv amortizărilor, devenind egale cu zero în cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă.

În adevăr, în absența amortizărilor ($b_{ki} = 0$; $k, i = 1, 2, \dots, r$), condiția (27.16) va lua forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}z^2 + c_{11} & \dots & a_{1r}z^2 + c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}z^2 + c_{r1} & \dots & a_{rr}z^2 + c_{rr} \end{vmatrix} = 0 \qquad (27.20)$$

și coincide întru totul cu ecuația pulsațiilor proprii fără amortizare dacă se pune

$$z^2 = -k^2. \qquad (27.21)$$

Întrucît s-a demonstrat că rădăcinile k_j^2, cărora le vor corespunde valorile

$$z_j^2 = -k_j^2 \qquad (27.22)$$

ale necunoscutei z^2, sînt reale și pozitive, vor rezulta următoarele valori pentru rădăcinile z_j' și z_j'', corespunzătoare acestei situații

$$z_j' = k_j i; \quad z_j'' = -k_j i \qquad (27.23)$$

cu

$$i = \sqrt{-1}; \quad k_j = +\sqrt{k^2}.$$

Compararea relațiilor (27.73) și (27.18) confirmă deci afirmația făcută mai sus privind dependența exclusiv de amortizări a părților reale ale rădăcinilor ecuației caracteristice (27.17); mai mult, ea permite să se tragă concluzia că discuțiile în legătură cu caracterul mișcării vibratorii a sistemului vibrant în prezența armortizărilor vor putea fi particularizate și la cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă, efectuînd în soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale ce definesc mișcările proprii și forțate înlocuirile

$$\mu_j = 0; \quad k_j^* = k_j, \qquad (27.24)$$

k_j^2 fiind rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii fără amortizare.

Revenind la rădăcinile (27.18) ale ecuației caracteristice, la care părțile reale se vor numi acum *coeficienți de amortizare*, iar părțile imaginare vor purta , din motive ușor de înțeles din cea de-a

Scanned with CamScanner

doua serie dintre relațiile (27.24), numele de *pulsații proprii cu amortizare*, se va observa că întrucît fiecare din ele verifică ecuația caracteristică, adică sînt valabile condițiile

$$\begin{vmatrix} a_{11}z_j'^2 + b_{11}z_j' + c_{11} \dots a_{1r}z_j'^2 + b_{1r}z_j' + c_{1r} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}z_j'^2 + b_{r1}z_j' + c_{r1} \dots a_{rr}z_j'^2 + b_{rr}z_j' + c_{rr} \end{vmatrix} = 0 \tag{27.25}$$

și

$$\begin{vmatrix} a_{11}z_j''^2 + b_{11}z_j'' + c_{11} \dots a_{1r}z_j''^2 + b_{1r}z_j'' + c_{1r} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}z_j''^2 + b_{r1}z_j'' + c_{r1} \dots a_{rr}z_j''^2 + b_{rr}z_j'' + c_{rr} \end{vmatrix} = 0, \tag{27.26}$$

fiecărei rădăcini cu indicele de un ordin oarecare j, din seturile (27.18) îi va corespunde cîte un set de valori ale constantelor Z_i — valorile Z'_{ij} pentru rădăcinile z'_{ij}, și valorile Z''_{ij} pentru rădăcinile z''_{ij}, $(i = 1, 2, \dots, r)$ — , care vor fi și ele complexe și două cîte două conjugate, adică de forma

$$Z'_{ij} = X_{ij} + iY_{ij};\ Z''_{ij} = X_{ij} - iY_{ij}, \tag{27.27}$$

aceste valori reprezentînd soluțiile unor sisteme de ecuații algebrice de forma (27.15), adică ale sistemelor

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}z_j'^2 + b_{ki}z_j' + c_{ki})\, Z'_{ij} = 0, \tag{27.28}$$

respectiv

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}z_j''^2 + b_{ki}z_j'' + c_{ki})\, Z''_{ij} = 0. \tag{27.29}$$

Datorită condițiilor (27.25) și (27.26), în fiecare din cele două sisteme de ecuații corespunzătoare unei anumite valori a indicelui j una din ecuații va fi o consecință a celorlalte, adică pentru fiecare valoare a indicelui j rezultă două sisteme de cîte $(r-1)$ ecuații distincte, în cîte r necunoscute, reprezentate prin mărimile Z'_{ij}, respectiv Z''_{ij} $(i = 1, 2, \dots, r)$; aceasta înseamnă însă că una din necunoscutele Z'_{ij} și una din necunoscutele Z''_{ij}, corespunzătoare unei valori date a indicelui j, va rămîne nedeterminată, celelalte putînd fi exprimate în funcție de cea considerată nedeterminată, prin rezol-

Scanned with CamScanner

varea sistemelor de ecuații obținute prin considerarea numai a cîte unui număr de $(r-1)$ ecuații din sistemele (27.28) și (27.29).

Considerînd ca necunoscute nedeterminate pe $Z'_{1j} \neq 0$ și $Z''_{1j} \neq 0$, împărțind sistemul (27.28) de ecuații la Z'_{1j} și sistemul (27.29) de ecuații la Z''_{1j} și introducînd notațiile

$$\frac{Z'_{ij}}{Z'_{1j}} = \lambda'_{ij}; \ \frac{Z''_{ij}}{Z''_{1j}} = \lambda''_{ij} \tag{27.30}$$

evident, cu

$$\lambda'_{1j} = \lambda''_{1j} = 1, \tag{27.31}$$

vor rezulta, luînd ultimele $(r-1)$ ecuații din sistemele (27.28) și (27.29), următoarele două sisteme de ecuații algebrice liniare neomogene în necunoscutele λ'_{ij} și λ''_{ij} pentru fiecare valoare a indicelui j:

$$\sum_{i=2}^{r} (a_{ki}z_j'^2 + b_{ki}z'_j + c_{ki})\,\lambda'_{ij} = -(a_{k1}z_j'^2 + b_{k1}z'_j + c_{k1}) \tag{27.32}$$

respectiv

$$\sum_{i=2}^{r} (a_{ki}z_j''^2 + b_{ki}z''_j + c_{ki})\,\lambda''_{ij} = -(a_{k1}z_j''^2 + b_{k1}z''_j + c_{k1}). \tag{27.33}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Prin rezolvarea sistemelor precedente — posibilă, întrucît determinanții coeficienților necunoscutelor vor fi acum diferiți de zero —, vor rezulta valorile necunoscutelor λ'_{ij} și λ''_{ij}, care vor fi, de asemenea, complexe și conjugate două cîte două, adică de forma

$$\lambda'_{ij} = \tau^*_{ij} + i\sigma_{ij}; \quad \lambda''_{ij} = \tau^*_{ij} - i\sigma_{ij}, \tag{27.34}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r),$$

cu λ'_{1j} și λ''_{1j} avînd valorile (27.31).

Odată găsite aceste valori, se vor putea exprima, în continuare, constantele complexe Z'_{ij} și Z''_{ij} în funcție de coeficienții λ'_{ij} și λ''_{ij} și de constantele complexe Z'_{1j}, respectiv Z''_{1j}, rezultînd astfel, în baza relațiilor (27.30), valorile

$$Z'_{ij} = \lambda'_{ij}Z'_{1j}; \quad Z''_{ij} = \lambda''_{ij}Z''_{1j}. \tag{27.35}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Scanned with CamScanner

Introducind notațiile

$$\operatorname{tg} \psi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\tau_{ij}^*}; \quad \operatorname{tg} \theta_j = \frac{y_{1j}}{X_{1j}} \tag{27.36}$$

cu

$$\frac{1}{\cos \psi_{ij}} = \frac{1}{\tau_{ij}^*} \sqrt{\tau_{ij}^{*2} + \sigma_{ij}^2}; \quad \frac{1}{\cos \theta_j} = \frac{1}{X_{1j}} \sqrt{X_{1j}^2 + Y_{1j}^2} \tag{27.37}$$

și

$$\sqrt{\tau_{ij}^{*2} + \sigma_{ij}^2} = \lambda_{ij}; \quad \sqrt{X_{1j}^2 + Y_{1j}^2} = \frac{1}{2} W_{1j}^0 \tag{27.38}$$

și exprimind mărimile complexe λ'_{ij}, λ''_{ij}, Z'_{1j}, și Z''_{1j} sub forma exponențială, adică scriind

$$\lambda'_{ij} = \tau_{ij}^* \left(1 + i \frac{\sigma_{ij}}{\tau_{ij}^*}\right) = \frac{\tau_{ij}^*}{\cos \psi_{ij}} (\cos \psi_{ij} + i \sin \psi_{ij}) = \lambda_{ij} e^{i\psi_{ij}};$$

$$\lambda''_{ij} = \tau_{ij}^* \left(1 - i \frac{\sigma_{ij}}{\tau_{ij}^*}\right) = \frac{\tau_{ij}^*}{\cos \psi_{ij}} (\cos \psi_{ij} - i \sin \psi_{ij}) = \lambda_{ij} e^{-i\psi_{ij}};$$

$$Z'_{1j} = X_{1j} \left(1 + i \frac{Y_{1j}}{X_{1j}}\right) = \frac{X_{1j}}{\cos \alpha_j} (\cos \theta_j + i \sin \theta_j) = \frac{1}{2} W_{1j}^0 e^{i\theta_j};$$

$$Z''_{1j} = X_{1j} \left(1 - i \frac{Y_{1j}}{X_{1j}}\right) = \frac{X_{1j}}{\cos \alpha_j} (\cos \theta_j - i \sin \theta_j) = \frac{1}{2} W_{1j}^0 e^{-i\theta_j}, \tag{27.39}$$

expresiile (27.35) ale constantelor Z'_{ij} și Z''_{ij} vor mai putea fi scrise sub formele

$$Z'_{ij} = \frac{1}{2} \lambda_{ij} W_{1j}^0 e^{i(\psi_{ij} + \theta_j)}; \quad Z''_{ij} = \frac{1}{2} \lambda_{ij} W_{1j}^0 e^{-i(\psi_{ij} + \theta_j)}. \tag{27.40}$$

Existind două serii de cite r valori pentru constantele Z, soluția generală a sistemului (27.12) de ecuații diferențiale, adoptată inițial sub forma (27.13), va trebui scrisă în realitate sub forma

$$w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} Z'_{ij} e^{z'_j t} + \sum_{j=1}^{r} Z''_{ij} e^{z''_j t}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

sau încă, ținînd seama de expresiile (27.18) ale rădăcinilor ecuației pulsațiilor fără amortizare și de expresiile (27.44) ale mărimilor complexe Z'_{ij} și Z''_{ij}, mai rezultă

$$w_{ip} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}W^0_{1j}[e^{i(k^*_j t+\psi_{ij}+\theta_j)} + e^{-i(k^*_j t+\psi_{ij}+\theta_j)}]. \quad (27.41)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Aplicînd, în fine, cunoscutele formule de transformare ale lui Euler ($\epsilon^{ix} = \cos x \pm i \sin x$), se va mai putea scrie următoarea formă finală pentru soluția generală a sistemului (27.12) de ecuații diferențiale, care determină mișcarea proprie a sistemului vibrant:

$$\boxed{w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}W^0_{1j}\cos(k^*_j t + \psi_{ij} + \theta_j)} \quad (27.42)$$

cu W^0_{1j} și θ_j, ($j = 1, 2, \ldots r$), constante de integrare, care vor putea fi determinate ulterior, prin impunerea condițiilor inițiale (27.4) în soluția generală (27.10) și în sistemul de relații obținute prin derivarea în raport cu timpul a soluției generale (27.10).

Forma (27.42) a soluției generale a sistemului de ecuații diferențiale (27.12) permite să se tragă concluzia că mișcarea proprie cu amortizare a unui sistem vibrant, corespunzătoare fiecărui grad de libertate, rezultă din suprapunerea unui număr, egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului, de mișcări componente vibratorii cvasi-armonice cu modulație exponențial descrescătoare în amplitudine, nesincrone și defazate între ele.

De asemenea, forma (27.42) a soluției generale mai scoate în evidență faptul că după trecerea unui interval anumit de timp, a cărui durată va depinde de valorile coeficienților de amortizare μ_j, factorii de amortizare $e^{-\mu_j t}$ vor face amplitudinile mișcărilor componente — și deci și ale vibrațiilor w_{i_p} — să tindă spre zero, evidențiind astfel *amortizarea mișcării proprii a sistemului vibrant*.

După cum s-a precizat cu prilejul discuției rădăcinilor ecuației caracteristice, soluția generală (27.42) va putea fi particularizată și la cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă, prin considerarea, pe de o parte, a condițiilor (27.24), care reduc factorii de amortizare la valori egale cu unitatea și, pe de altă parte, prin constatarea că în condițiile neglijării amortizării ($\mu_j = 0$; $k^*_j = k_j$; $z_j'^2 = z_j''^2 = -k_j^2$; $j = 1, 2, \ldots, r$), sistemele de ecuații (27.32) și

Scanned with CamScanner

(27.33) vor coincide ($\lambda'_{ij} = \lambda''_{ij}$), cu necunoscutele λ'_{ij} reale de astă dată și coincizînd chiar cu coeficienții de distribuție din matricea de transformare în coordonate principale ($\sigma_{ij} = 0$; $\tau^*_{ij} = \tau_{ij}$); în consecință, asociind la condițiile (27.24) și condițiile

$$\psi_{ij} = 0\,; \quad \lambda_{ij} = \tau_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r), \tag{27.43}$$

rezultă din relațiile (27.36) și (27.38) în baza constatărilor precedente, soluția generală (27.42) va lua următoarea formă particulară

$$w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} W^0_{1j} \cos(k_j t + \theta_j),$$

sau încă, înlocuind constantele θ_j cu alte constante α_j, definite prin relațiile

$$\theta_j = \alpha_j - \frac{\pi}{2}, \tag{27.44}$$

se mai poate scrie soluția generală a ecuațiilor diferențiale ale mișcării proprii neamortizate sub următoarea formă finală:

$$\boxed{w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} W^0_{1j} \sin(k_j t + \alpha_j)} \tag{27.45}$$

identică, după cum se vede cu forma (26.187), (cu $\tau'_{ij} = \tau_{ij}$), găsită cu prilejul prezentării ecuațiilor diferențiale în coordonate principale.

Forma (27.45) a soluției generale a ecuațiilor diferențiale ale mișcării proprii neamortizate arată că această mișcare rezultă, pentru fiecare grad de libertate al sistemului vibrant, din suprapunerea celor r moduri proprii de vibrație neamortizate.

Trecînd la determinarea soluției particulare w_{if}, a sistemului complet (27.8) de ecuații diferențiale ale mișcării, care va determina mișcarea forțată a sistemului vibrant, se face precizarea că, în funcție de forma excitației deterministe, vor trebui luate în considerație următoarele situații distincte:

a) *Mișcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații neperiodice.* Dacă funcțiile $Q_k(t)$, reprezentînd forțele generalizate de excitație, sînt integrabile — și numai aceasta va fi situația considerată în continuare —, atunci metoda generală de determinare a soluției generale a sistemului (27.8) — soluție care va include, evident, și soluția particulară w_{if} — este *metoda lui Lagrange*, care constă, după

Scanned with CamScanner

cum se știe, în considerarea mărimilor W_{1j}^0 și θ_j, din soluția generală (27.42) a sistemului de ecuații diferențiale corespunzătoare mișcării proprii a sistemului vibrant, ca funcțiuni de timp, care vor trebui să satisfacă următoarele două serii de condiții :

1°. Derivatele în raport cu timpul ale parametrilor lagrangeieni w_{ip} dați de relațiile (27.42), cu mărimile W_{1j}^0 și θ_j considerate funcțiuni de timp să coincidă cu derivatele în raport cu timpul ale acelorași parametri, dar cu mărimile W_{1j}^0 și θ_j considerate efectiv constante;

2°. Soluția w_{ip}, cu mărimile W_{1j}^0 și θ_j considerate funcțiuni de timp, să satisfacă sistemul de ecuații (27.8).

Pentru a ușura calculele, soluția generală (27.42) va fi scrisă sub forma

$$w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}[(W_{1j}^0 \cos\theta_j)\cos(k_j^* t + \psi_{ij}) - \\ - (W_{1j}^0 \sin\theta_j)\sin(k_j^* t + \psi_{ij})]$$

sau încă, înlocuind necunoscutele W_{1j}^0 și θ_j cu altă serie de necunoscute, A_j și B_j, definite prin relațiile

$$W_{1j}^0 \cos\theta_j = A_j ; \quad W_{1j}^0 \sin\theta_j = B_j, \tag{27.46}$$

se mai poate scrie

$$w_{ip} = \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}[A_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) - B_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij})]. \tag{27.47}$$

Notînd cu $w_{ip}^{(c)}$ soluția (27.42) cu mărimile A_j și B_j considerate constante, este evident că ea va satisface sistemul de ecuații (27.12), adică vor rezulta condițiile

$$\sum_{i=1}^{r} [a_{ki}\ddot{w}_{ip}^{(c)} + b_{ki}\dot{w}_{ip}^{(c)} + c_{ki}w_{ip}^{(c)}] = 0. \tag{27.48}$$

Pe de altă parte, notînd cu $w_{ip}^{(v)} = w_{ip}^{(c)}$ soluția generală (27.47) cu mărimile A_j și B_j considerate funcțiuni de timp, este ușor de observat că între derivatele de ordinul întîi și doi în raport cu timpul ale acestor două forme de soluții generale pot fi scrise relațiile

$$\dot{w}_{ip}^{(v)} = \dot{w}_{ip}^{(c)} + \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}[\dot{A}_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) - \dot{B}_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij})], \tag{27.49}$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\ddot{w}_{ip}^{(v)} = \ddot{w}_{ip}^{(c)} - \sum_{j=1}^{r} \mu_j e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} [\dot{A}_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) - \dot{B}_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij})] -$$

$$- \sum_{j=1}^{r} k_j^* e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} [\dot{A}_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij}) + B_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij})]. \quad (27.50)$$

Prima dintre condițiile metodei lui Lagrange, exprimată prin egalitățile

$$\dot{w}_{ip}^{(v)} = \dot{w}_{ip}^{(c)} \quad (27.51)$$

conduce la o primă serie de r ecuații algebrice liniare în necunoscutele $\dot{A}_j$ și $\dot{B}_j$:

$$\sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} [\dot{A}_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) - \dot{B}_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij})] = 0. \quad (27.52)$$

De asemenea, cea de-a doua dintre condițiile amintite ale metodei lui Lagrange, exprimată prin egalitățile

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki} \ddot{w}_{ip}^{(v)} + b_{ki} \dot{w}_{ip}^{(v)} + c_{ki} w_{ip}^{(v)}) \equiv Q_k(t), \quad (27.53)$$

care, ținînd seama de relațiile (27.50) și (27.51), vor mai lua formele

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} (a_{ki} \ddot{w}_{ip}^{(c)} + b_{ki} \dot{w}_{ip}^{(c)} + c_{ki} w_{ip}^{(c)})}_{0} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{r} a_{ki} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} \{\dot{A}_j [\mu_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) + k_j^* \sin(k_j^* t + \psi_{ij})] -$$

$$- \dot{B}_j [\mu_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij}) - k_j^* \cos(k_j^* t + \psi_{ij})]\} \equiv Q_k(t), \quad (27.54)$$

va conduce, în baza condițiilor (27.48), la cel de-al doilea sistem de r ecuații algebrice liniare în necunoscutele $\dot{A}_j$ și $\dot{B}_j$:

$$- \sum_{i,j=1}^{r} a_{ki} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} \{\dot{A}_j [\mu_j \cos(k_j^* t + \psi_{ij}) + k_j^* \cdot \sin(k_j^* t + \psi_{ij})] -$$

$$- \dot{B}_j [\mu_j \sin(k_j^* t + \psi_{ij}) - k_j^* \cos(k_j^* t + \psi_{ij})]\} = Q_k(t). \quad (27.55)$$

Sistemele de ecuații algebrice (27.52) și (27.55), scrise acum sub formele

$$\sum_{j=1}^{r}\{[\lambda_{kj}e^{-\mu_j t}\cos(k_j^* t+\psi_{kj})]\dot{A}_j-[\lambda_{kj}e^{-\mu_j t}\sin(k_j^* t+\psi_{kj})]\dot{B}_j\}=0;$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{\left[e^{-\mu_j t}\sum_{i=1}^{r}a_{ki}\lambda_{ij}[\mu_j\cos(k_j^* t+\psi_{ij})+k_j^*\sin(k_j^* t+\psi_{ij})]\right]\dot{A}_j-\right.$$

$$\left.-\left[e^{-\mu_j t}\sum_{i=1}^{r}a_{ki}\lambda_{ij}[\mu_j\sin(k_j^* t+\psi_{ij})-k_j^*\cos(k_j^* t+\psi_{ij})]\right]\dot{B}_j\right\}=-Q_k(t),$$

(27.56)

vor permite, prin rezolvare în raport cu necunoscutele $\dot{A}_j$ și $\dot{B}_j (j = 1, 2, \ldots, r)$, să se exprime aceste mărimi sub formele

$$\dot{A}_j=a_j(t);\quad \dot{B}_j=b_j(t), \tag{27.57}$$

$a_j(t)$ și $b_j(t)$ fiind funcții cunoscute de timp prin intermediul mărimilor $e^{-\mu_j t}$, $\cos(k_j^* t+\psi_{ij})$, $\sin(k_j^* t+\psi_{ij})$ și $Q_k(t)$.

Prin integrarea relațiilor (27.57), se obțin următoarele expresii pentru mărimile A_j și B_j:

$$A_j=A_j^0+\int a_j(t)\,dt;\quad B_j=B_j^0+\int b_j(t)\,dt, \tag{27.58}$$

cu A_j^0 și B_j^0 reprezentînd efectiv constante de integrare.

Introducerea primelor valori ale acestor expresii — constantele A_j^0 și B_j^0 — în soluția (27.47) va permite să se regăsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale (27.12), ce determină mișcarea proprie a sistemului vibrant, adică

$$w_{ip}=\sum_{j=1}^{r}e^{-\mu_j t}\lambda_{ij}[A_j^0\cos(k_j^* t+\psi_{ij})-B_j^0\sin(k_j^* t+\psi_{ij})], \tag{27.59}$$

iar introducerea valorilor variabile în funcție de timp ale expresiilor (27.58) în soluția (27.47) va furniza și soluția particulară a siste-

Scanned with CamScanner

mului de ecuații (27.8), care determină mișcarea forțată a sistemului vibrant, adică

$$w_{it} = \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} \left[\left(\int a_j(t)\, dt \right) \cos (k_j^* t + \psi_{ij}) - \right.$$
$$\left. - \left(\int b_j(t)\, dt \right) \sin (k_j^* t + \psi_{ij}) \right]. \qquad (27.60)$$

Mișcarea vibratorie rezultantă a sistemului vibrant va fi determinată deci prin ecuațiile finite

$$\boxed{\begin{aligned} w_i = & \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} [A_j^0 \cos (k_j^* t + \psi_{ij}) - B_j^0 \sin (k_j^* t + \psi_{ij})] + \\ & + \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t} \lambda_{ij} \left[\left(\int a_j(t)\, dt \right) \cos (k_j^* t + \psi_{ij}) - \right. \\ & \left. - \left(\int b_j(t)\, dt \right) \sin (k_j^* t + \psi_{ij}) \right] \end{aligned}} \qquad (27.61)$$

cu constantele de integrare A_j^0 și B_j^0 determinate impunîndu-se condițiile inițiale (27.4) în soluția (27.61) și în relațiile obținute prin derivarea în raport cu timpul a acestei soluții.

În condițiile neglijării amortizării ($\mu_j = 0$; $k_j^* = k_j$; $\lambda_{ij} = \tau_{ij}$; $\psi_{ij} = 0$; $a_j(t) = \alpha_j(t)$; $b_j(t) = \beta_j(t) - \alpha_j(t)$ și $\beta_j(t)$ fiind funcțiile $a_j(t)$ și $b_j(t)$ în aceste noi condițiuni —), soluția generală (27.61) va lua forma particulară

$$\boxed{\begin{aligned} w_i = & \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} [A_j^0 \cos (k_j t) - B_j^0 \sin (k_j t)] + \\ & + \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} \left[\left(\int \alpha_j(t)\, dt \right) \cos (k_j t) - \left(\int \beta_j(t)\, dt \right) \sin (k_j t) \right] \end{aligned}} \qquad (27.62)$$

primul grup de termeni, corespunzător mișcării proprii, putînd fi oricînd retranscris sub forma (27.45) prin introducerea notațiilor:

$$\frac{A_j^0}{B_j^0} = -\operatorname{tg} \alpha_j; \quad \sqrt{A_j^{02} + B_j^{02}} = W_{1j}^0;$$

Scanned with CamScanner

b) *Mișcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații periodice.* În cele ce urmează, se va considera numai cazul care interesează în cea mai mare măsură tehnica vibrațiilor, al excitațiilor periodice cu forțele generalizate funcții periodice impare, toate de aceeași perioadă

$$T_{ex} = \frac{2\pi}{p}, \tag{27.63}$$

p fiind pulsația fundamentală, cu dezvoltările în serii Fourier aproximabile prin polinoame trigonometrice de anumite ordine l_k ; după cum s-a arătat în § 21, polinoamele trigonometrice vor conține în aceste cazuri numai termenii în sinus, ceea ce înseamnă că forțele generalizate de excitație vor fi poliarmonice sincrone sinfazice, adică de forma

$$Q_{ex_k}(t) = Q_k(t) = \sum_{\lambda=1}^{l_k} Q^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt). \tag{27.64}$$

Se înțelege că toate calculele ce vor fi efectuate în continuare vor putea fi repetate întocmai și pentru cazul mai general, cînd funcțiile $Q_k(t)$ ar fi periodice fără a prezenta proprietăți de paritate sau imparitate.

Notînd cu l cea mai mare dintre valorile l_k, este evident că relațiile (24.68) vor mai putea fi retranscrise sub forma

$$Q_k(t) = \sum_{\lambda=1}^{l} Q^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt), \tag{27.65}$$

cu condiția de a considera unele dintre constantele $Q^0_{k\lambda}$ egale cu zero ; în aceste condițiuni, sistemul (27.8) de ecuații diferențiale ale mișcării va lua forma

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}\ddot{w}_i + b_{ki}\dot{w}_i + c_{ki}w_i) = \sum_{\lambda=1}^{l} Q^0_{k\lambda} \sin(\lambda pt) \tag{27.66}$$

și va admite o soluție particulară de forma

$$w_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} [M_{i\lambda} \cos(\lambda pt) + N_{i\lambda} \sin(\lambda pt)], \tag{27.67}$$

Scanned with CamScanner

cu $M_{i\lambda}$ și $N_{i\lambda}$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l)$ constante, ce vor putea fi determinate impunîndu-se condiția ca această soluție să verifice sistemul (27.66), adică să fie satisfăcut sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^{r} (a_{ki}\ddot{w}_{if} + b_{ki}\dot{w}_{if} + c_{ki}w_{if}) \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} Q_{k\lambda}^{0} \sin(\lambda pt). \qquad (27.68)$$

Introducînd în acest sistem expresiile (27.67), precum și cele obținute din ele prin derivarea succesivă în raport cu timpul, adică

$$\dot{w}_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \lambda p[-M_{i\lambda} \sin(\lambda pt) + N_{i\lambda} \cos(\lambda pt)]$$

și

$$\ddot{w}_{if} = -\sum_{\lambda=1} (\lambda p)^2 [M_{i\lambda} \cos(\lambda pt) + N_{i\lambda} \sin(\lambda pt)],$$

rezultă, după scoaterea în factori comuni a funcțiilor trigonometrice, următorul sistem de identități:

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \left\{ \sum_{i=1}^{r} [(c_{ki} - \lambda^2 p^2 a_{ki}) M_{i\lambda} + \lambda p b_{ki} N_{i\lambda}] + \cos(\lambda pt) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} [-\lambda p b_{ki} M_{i\lambda} + (c_{ki} - \lambda^2 p^2 a_{ki}) N_{i\lambda}] \sin(\lambda pt) \right\} \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} Q_{k\lambda}^{0} \sin(\lambda pt),$$

și deci, după identificarea coeficienților funcțiilor trigonometrice din cei doi membri, următoarele sisteme de ecuații algebrice liniare neomogene în necunoscutele $M_{i\lambda}$ și $N_{i\lambda}$:

$$\sum_{i=1}^{r} [(c_{ki} - \lambda^2 p^2 a_{ki}) M_{i\lambda} + \lambda p b_{ki} N_{i\lambda}] = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{r} [-\lambda p b_{ki} M_{i\lambda} + (c_{ki} - \lambda^2 p^2 a_{ki}) N_{i\lambda}] = Q_{k\lambda}^{0}, \qquad (27.69)$$

adică, cîte un sistem de $2r$ ecuații, cu cîte $2r$ necunoscute pentru fiecare valoare a indicelui l.

În condițiile cînd determinanții coeficienților din fiecare din aceste sisteme sînt diferiți de zero — aceasta fiind situația întîlnită de regulă în aplicațiile tehnice concrete —, sistemele vor admite soluții determinate de forma

Scanned with CamScanner

$$M_{i\lambda} = M_{i\lambda}(Q_{ki};\ b_{ki};\ c_{ki};\ p_{\lambda};\ Q^0_{k\lambda});$$

$$N_{i\lambda} = N_{i\lambda}(a_{ki};\ b_{ki};\ c_{ki};\ p_{\lambda};\ Q^0_{k\lambda}), \tag{27.70}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots, r;\ \lambda = 1,\ 2, \ldots, l),$$

cu

$$p_{\lambda} = \lambda p,\ (\lambda = 1,\ 2. \ldots, l), \tag{27.71}$$

reprezentind pulsațiile armonicilor de ordinul λ ale excitației.

Pentru un sistem vibrant dat (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}, i, $k = 1, \ldots, r$ dați), constantele $M_{i\lambda}$ și $N_{i\lambda}$ vor fi funcțiuni numai de amplitudinile și de pulsațiile excitațiilor, adică de forma

$$M_{i\lambda} = M_{i\lambda}(p_{\lambda}, Q^0_{k\lambda});\quad N_{i\lambda} = N_{i\lambda}(p_{\lambda}, Q^0_{k\lambda}). \tag{27.72}$$

Odată determinate, aceste constante vor putea fi introduse în soluția particulară (27.67), care, prin scoaterea forțată în factori a coeficienților $N_{i\lambda}$ și prin introducerea notațiilor

$$\frac{M_{i\lambda}}{N_{i\lambda}} = \operatorname{tg} \beta_{i\lambda};\quad \frac{N_{i\lambda}}{\cos \beta_{i\lambda}} = \sqrt{M^2_{i\lambda} + N^2_{i\lambda}} = \mathscr{A}_{i\lambda}, \tag{27.73}$$

cu

$$\mathscr{A}_{i\lambda} = \mathscr{A}_{i\lambda}(p_{\lambda}, Q^0_{k\lambda});\ \beta_{i\lambda} = \beta_{i\lambda}(p_{\lambda}, Q^0_{k\lambda}), \tag{27.74}$$

va mai putea fi scrisă sub următoarea formă finală:

$$\boxed{w_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \mathscr{A}_{i\lambda} \sin (\lambda p t + \beta_{i\lambda})}, \tag{27.75}$$

care arată că mișcarea forțată a sistemului vibrant corespunzătoare fiecărui grad de libertate rezultă din suprapunerea unui număr de l vibrații componente armonice, cu pulsațiile egale cu cele ale excitațiilor, dar defazate față de excitații și defazate și între ele.

Pentru un sistem vibrant dat și pentru valori date ale amplitudinilor $Q^0_{k\lambda}$ ale excitației poliarmonice sincrone sinfazice, amplitudinile $\mathscr{A}_{i\lambda}$ și fazele inițiale $\beta_{i\lambda}$ ale componentelor vibrațiilor forțate depind numai de valorile pulsațiilor p_{λ} ale armonicelor respective ale excitațiilor, adică sînt de forma

$$\mathscr{A}_{i\lambda} = \mathscr{A}_{i\lambda}(p_{\lambda});\ \beta_{i\lambda} = \beta_{i\lambda}(p_{\lambda}). \tag{27.76}$$

Scanned with CamScanner

Reprezentările grafice ale funcțiilor (24.83) în planele reale $\mathscr{A}_{i\lambda}O_\lambda p_\lambda$, respectiv $\beta_{i\lambda}\Omega_\lambda p_\lambda$, vor reprezenta *curbele de răspuns amplitudine-pulsație*, respectiv, *curbele de răspuns fază-pulsație*, care pot furniza indicații prețioase privind variația mărimilor $\mathscr{A}_{i\lambda}$ și $\beta_{i\lambda}$ la modificarea pulsației fundamentale a excitației și, îndeosebi, apariția unor valori maxime ale amplitudinilor $\mathscr{A}_{in}$ pentru anumite valori critice p_{ncr} ale pulsației armonicii de ordinul n, fenomen cunoscut în tehnica vibrațiilor sub numele de *rezonanță de ordinul n*; datorită faptului că în aceste reprezentări pe axa absciselor pot fi luate în locul pulsațiilor p_λ, frecvențele corespunzătoare

$$\nu_\lambda = \frac{p_\lambda}{2\pi} = \frac{1}{T_\lambda}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l). \tag{27.77}$$

Graficele menționate mai sus se mai numesc *curbe de răspuns amplitudine-frecvență*, respectiv *curbe de răspuns fază-frecvență*.

Ținînd seama de forma (27.42) a ecuațiilor mișcării proprii și de forma (27.75) a ecuațiilor mișcării forțate a sistemului vibrant, se poate scrie acum și soluția generală a ecuațiilor diferențiale ale mișcării vibratorii rezultante a sistemului vibrant excitat periodic, aceasta avînd forma

$$\boxed{\begin{aligned} w_i = \sum_{j=1}^{r} e^{-\mu_j t}\lambda_{ij} W_{1j}^0 \cos(k_j^* t + \psi_{ij} + \theta_j) + \\ + \sum_{\lambda=1}^{l} A_{i\lambda} \sin(\lambda p t + \beta_{i\lambda}) \end{aligned}} \tag{27.78}$$

pentru mișcarea în regim tranzitoriu și forma

$$\boxed{w_i = \sum_{\lambda=1}^{l} A_{i\lambda} \sin(\lambda p t + \beta_{i\lambda})} \tag{27.79}$$

pentru mișcarea în regim permanent ($e^{-\mu_j t} \to 0$; $j = 1, 2, \ldots, r$).

În cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă, ($b_{ki} = 0$; $k, i = 1, 2, \ldots, r$), sistemele (27.69) de ecuații algebrice liniare în necunoscutele $M_{i\lambda}$ și $N_{i\lambda}$ iau formele particulare

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - p_\lambda^2 a_{ki})\, M_{i\lambda} = 0;$$

Scanned with CamScanner

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - p_\lambda^2 a_{ki})\, N_{i\lambda} = Q_{k\lambda}^0. \tag{27.80}$$

Dacă niciuna dintre pulsațiile p_λ ale armonicelor excitației nu coincide cu vreuna dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant ($p_\lambda \neq k_j$; $j = 1, 2, \ldots, r$), atunci determinanții necunoscutelor din sistemele precedente de ecuații algebrice liniare sînt diferiți de zero, adică sînt valabile condițiile

$$\Delta(p_\lambda^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - p_\lambda^2 a_{11} & \ldots & c_{1r} - p_\lambda^2 a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} - p_\lambda^2 a_{r1} & \ldots & c_{rr} - p_\lambda^2 a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{27.81}$$

și primele dintre sistemele (27.80) conduc la soluția banală

$$M_{i\lambda} = 0, \tag{27.82}$$

cu consecințele directe

$$\beta_{i\lambda} = 0, \tag{27.83}$$

iar cea de-a doua serie dintre sistemele (27.80) furnizează soluțiile

$$N_{i\lambda} = \frac{\Delta_i(p_\lambda^2)}{\Delta(p_\lambda^2)}, \tag{27.84}$$

unde prin $\Delta_i(p_\lambda^2)$ au fost notați determinanții

$$\Delta_i(p_\lambda^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - p_\lambda^2 a_{11} \ldots c_{1,i-1} - p_\lambda^2 a_{1,i-1} & Q_{1\lambda}^p & c_{1,i+1} - p_\lambda^2 a_{1,i-1} \ldots c_{1r} - p_\lambda^2 a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} - p_\lambda^2 a_{r1} \ldots c_{r,i-1} - p_\lambda^2 a_{r,i-1} & Q_{r\lambda}^0 & c_{r,i+1} - p_\lambda^2 a_{r,i+1} \ldots c_{rr} - p_\lambda^2 a_{rr} \end{vmatrix} \tag{27.85}$$

care, dezvoltați, mai pot fi scriși sub forma

$$\Delta_i(p_\lambda^2) = \sum_{j=1}^{r} Q_{j\lambda}^0 \Phi_{ji}^{(\lambda)} \tag{27.86}$$

$\Phi_{ji}^{(\lambda)} = \Phi_{ji}^{(\lambda)}(p_\lambda^2)$ fiind complemenții algebrici ai elementelor din determinantul (27.81), situate la intersecția liniei j cu coloana i.

Scanned with CamScanner

În baza notațiilor (27.86), expresiile (27.84) ale constantelor $N_{i\lambda}$ vor lua formele

$$N_{i\lambda} = \sum_{j=1}^{r} Q_{j\lambda}^{0} \frac{\Phi_{ji}^{(\lambda)}}{\Delta(p_{\lambda}^{2})} = \sum_{j=1}^{r} Q_{j\lambda}^{0} U_{ji}^{(\lambda)}, \tag{27.87}$$

cu mărimile

$$U_{ji}^{(\lambda)} = \frac{\Phi_{ji}^{(\lambda)}}{\Delta(p_{\lambda}^{2})} = U_{ji}^{(\lambda)}(p_{\lambda}^{2}) \tag{27.88}$$

purtînd numele de *caracteristici-amplitudine ale vibrațiilor forțate.*

Cu notațiile de mai sus, soluția particulară (27.75) a sistemului de ecuații diferențiale ale vibrațiilor forțate va lua următoarea formă corespunzătoare vibrațiilor forțate ale sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă :

$$\boxed{w_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} Q_{j\lambda}^{0} U_{ji}^{(\lambda)} \sin(\lambda pt)}, \tag{27.89}$$

iar soluția generală (27.78) va lua și ea forma particulară

$$\boxed{w_{i} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij} W_{1j}^{0} \cos(k_{j}t + \theta_{j}) + \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{j=1}^{r} Q_{j\lambda}^{0} U_{ji}^{(\lambda)} \sin(\lambda pt)} \tag{27.90}$$

corespunzătoare acestei situații ; se remarcă caracterul permanent, în acest caz, al mișcării rezultante, fără etapă de regim transitoriu din care motiv a mai și fost numită *mișcare întreținută.*

Dacă una dintre pulsațiile p_{λ} ale excitației, de exemplu pulsația $p_{n} = np$, coincide cu una dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant, atunci determinantul $\Delta(p_{n}^{2})$ devine egal cu zero și amplitudinile N_{in} capătă valori infinite ; se spune, în aceste cazuri, că s-a produs *fenomenul de rezonanță de ordinul n.*

Unul din cazurile care interesează în cea mai mare măsură tehnica vibrațiilor — îndeosebi, tehnica măsurării vibrațiilor — este acela al excitației armonice sincrone sinfazice, adică cu forțele generalizate de forma

$$Q_{ex_{k}}(t) = Q_{k}(t) = Q_{k}^{0} \sin(pt). \tag{27.91}$$

Scanned with CamScanner

Este ușor de înțeles că soluția particulară corespunzătoare vibrațiilor forțate efectuate în aceste condițiuni va putea fi obținută direct, prin particularizarea soluției (27.75), corespunzător condiției $\lambda = 1$, rezultînd astfel ecuațiile

$$\boxed{w_{if} = \mathcal{A}_i \sin(pt + \beta_i)} \tag{27.92}$$

cu amplitudinile și fazele inițiale de forma

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(p^2), \tag{27.93}$$

respectiv

$$\beta_i = \beta_i(p^2). \tag{27.94}$$

În cele ce urmează, va fi determinată din nou această soluție, dar plecîndu-se de la ecuația diferențială matriceală a vibrațiilor liniare forțate, avînd, în cazul de față, forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{Q}\sin(pt), \tag{27.95}$$

pe de o parte, pentru a se exemplifica posibilitatea de determinare a răspunsului și prin procedeele calcului matriceal, care permit folosirea MEC și, pe de altă parte, datorită faptului că prin acest mod de stabilire a răspunsului pot fi puse în evidență noi aspecte ale mișcărilor vibratorii efectuate în condițiile menționate de excitație.

Pentru tipul (27.95) de ecuație diferențială matriceală sînt curent folosite următoarele două metode de rezolvare :

— *Metoda matricelor reale*

Soluția (27.67) a ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare forțate, avînd, în condițiile excitației (27.91), forma particulară

$$w_{if} = M_i \cos(pt) + N_i \sin(pt), \tag{27.96}$$

va putea fi retranscrisă matriceal sub forma

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{M}\cos(pt) + \mathbf{N}\sin(pt), \tag{27.97}$$

cu

$$\dot{\mathbf{w}} = p[-\mathbf{M}\sin(pt) + \mathbf{N}\cos(pt)];$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = p^2[\mathbf{M}\cos(pt) + \mathbf{N}\sin(pt)],$$

Scanned with CamScanner

cu matricele coloană

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_r \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{N} = \begin{Vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{Vmatrix} \tag{27.98}$$

urmind a fi determinate impunindu-se condiția ca soluția (27.97) să verifice ecuația (27.95); rezultă astfel identitatea

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{M} + p\mathbf{BN}]\cos(pt) +$$
$$+ [-p\mathbf{BM} + (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{N}]\sin(pt) \equiv \mathbf{Q}\sin(pt),$$

din care, după identificarea coeficienților matriceali ai funcțiilor trigonometrice din cei doi membri ai identității, vor rezulta ecuațiile

$$(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{M} + p\mathbf{BN} = 0; \tag{27.98}$$
$$-p\mathbf{BM} + (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{N} = \mathbf{Q}.$$

Multiplicînd, la stînga, prima ecuație cu matricea $(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})$ și pe cea de-a doua cu matricea $(-p\mathbf{B})$ și însumînd apoi ecuațiile astfel multiplicate, rezultă egalitatea

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})^2 + p^2\mathbf{B}^2]\,\mathbf{M} = -p\mathbf{BQ}. \tag{27.99}$$

De asemenea, multiplicînd la stînga prima dintre ecuațiile (27.98) cu matricea $p\mathbf{B}$ și pe cea de-a doua cu matricea $(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})$ și însumînd din nou ecuațiile multiplicate, rezultă și egalitatea

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})^2 + p^2\mathbf{B}^2]\,\mathbf{N} = (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{Q}. \tag{27.100}$$

Dacă pulsația p a excitației este diferită de oricare dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant, ($p \neq k_j$; $j = 1, 2, \ldots, r$), atunci matricea

$$\mathbf{s} = (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})^2 + p^2\mathbf{B}^2 \tag{27.101}$$

este nesingulară chiar în condițiile neglijării amortizării, adică

$$\det \mathbf{s} \neq 0 \tag{27.102}$$

și admite, pentru orice valoare a lui $p \neq k_j$, ($j = 1, 2, \ldots, r$), o matrice inversă $\mathbf{s}^{-1}$.

Scanned with CamScanner

În consecință, prin inmulțirea, la stînga, a relațiilor (27.99) și (27.100) cu matricea $\mathbf{s}^{-1}$, se obțin următoarele expresii ale matricelor **M** și **N** :

$$\mathbf{M} = -p\,\mathbf{s}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}; \qquad (27.103)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{Q},$$

în baza cărora, soluția particulară (27.96) va lua forma determinată :

$$\boxed{\mathbf{w}_f = -p\mathbf{s}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}\cos(pt) + \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{Q}\sin(pt)}\,. \qquad (27.104)$$

Notînd cu s^*_{hj} elementele matricei $\mathbf{s}^{-1}$, ele reprezentînd complemenții algebrici normați ai elementelor s_{hj} din matricea simetrică **s**, adică

$$s^*_{hj} = \frac{S_{hj}}{\det \mathbf{s}},$$

unde S_{hj} sînt complemenții algebrici obișnuiți ai acelorași elemente, ecuația matriceală (27.104) va mai putea fi retranscrisă sub următoarea formă dezvoltată

$$\begin{Vmatrix} w_{1f} \\ \vdots \\ w_{rf} \end{Vmatrix} = -p \begin{Vmatrix} \sum\limits_{j,k=1}^{r} s^*_{1j}\, b_{jk}\, Q^0_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{j,k=1}^{r} s^*_{rj}\, b_{jk}\, Q^0_k \end{Vmatrix} \cos(pt) + \begin{Vmatrix} \sum\limits_{j,k=1}^{r} s^*_{1j}(c_{jk} - p^2 a_{jk})Q^0_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{j,k=1}^{r} s^*_{rj}(c_{jk} - p^2 a_{jk})Q^0_k \end{Vmatrix} \sin(pt), \qquad (27.105)$$

care permite să se scrie următoarele expresii concrete pentru vibrațiile forțate w_{if} :

$$\boxed{w_{if} = \left(-p \sum_{j,k=1}^{r} s^*_{ij}\, b_{jk}\, Q^0_k\right)\cos(pt) + \left(\sum_{j,k=1}^{r} s^*_{ij}(c_{jk} - p^2 a_{jk} Q^0_k)\right)\sin(pt)}\,. \qquad (27.106)$$

Introducind notațiile

$$-p\frac{\sum_{j,k=1}^{r} s_{ij}^{*} b_{jk} Q_k^0}{\sum_{j,k=1}^{r} s_{ij}^{*}(c_{ik}-p^2 a_{jk}) Q_k^0}=\text{tg}\beta_i;$$

$$\frac{\sum_{j,k=1}^{r} s_{ij}^{*}(c_{jk}-p^2 a_{jk}) Q_k^0}{\cos\beta_i}=\frac{\sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{r} s_{ij}^{*}(c_{jk}-p^2 a_{jk}) Q_k^0\right.}{\cos\beta_i}=\sum_{k=1}^{r} U_{ik} Q_k^0=\mathscr{A}_i \tag{27.107}$$

$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

ecuațiile (27.106) mai pot fi scrise sub formele

$$\boxed{w_{if}=\mathscr{A}_i \sin(pt+\beta_i)=\left(\sum_{k=1}^{r} Q_k^0 U_{ik}\right)\sin(pt+\beta_i)}, \tag{27.108}$$

identice deci cu cele date de relațiile (27.75), respectiv (27.89) pentru valoarea $\lambda=1$.

O problemă importantă care poate fi rezolvată prin metoda matricelor reale în cazul sistemelor vibrante liniare supuse la excitații armonice sincrone sinfazice este aceea de a se stabili condițiile pe care trebuie să le satisfacă matricea amplitudinilor excitației pentru a se realiza un *mod de distorsiune*, adică o mișcare forțată în care vibrațiile corespunzătoare tuturor celor r grade de libertate ale sistemului vibrant să fie în fază, fiind satisfăcute deci condițiile

$$\beta_i=\beta. \tag{27.109}$$

După cum se poate vedea din prima serie dintre relațiile (27.107), fazele inițiale β_i depind, pentru un sistem vibrant dat (a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} și deci s_{jk}^{*} dați; $j=1, 2, \ldots, r$), numai de amplitudinile Q_k^0 ale excitației armonice sincrone sinfazice, ceea ce înseamnă că există posibilitatea alegerii convenabile a acestor amplitudini astfel incit să fie satisfăcute condițiile (27.109).

Considerind deci din nou ecuația matriceală (27.95), a cărei soluție particulară se știe deja că este de forma (27.108), se va putea pleca, pentru determinarea ei, și direct de la această ultimă formă, urmind să se determine constantele $\mathscr{A}_i$ și β_i impunîndu-se condiția

Scanned with CamScanner

ca această soluție să verifice ecuația (27.95); observînd însă că in condițiile (27.109) această soluție poate fi scrisă matriceal sub forma

$$\mathbf{w}_f = \mathscr{A} \sin (pt + \beta), \tag{27.110}$$

unde $\mathscr{A}$ este matricea coloană a amplitudinilor excitației, condiția de satisfacere a ecuației (27.95) conduce la identitatea

$$(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathscr{A} \sin (pt + \beta) + p\mathbf{B}\mathscr{A} \cos (pt + \beta) \equiv \mathbf{Q} \sin (pt),$$

care, prin dezvoltarea funcțiilor trigonometrice ale sumelor de argumente și prin scoaterea în factori comuni a funcțiilor trigonometrice $\sin (pt)$ și $\cos (pt)$, mai poate fi scrisă sub forma

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathscr{A} \cos \beta - p\mathbf{B}\mathscr{A} \sin \beta] \sin (pt) +$$
$$+ [(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathscr{A} \sin \beta + p\mathbf{B}\mathscr{A} \cos \beta] \cos (pt) \equiv Q \sin (pt). \tag{27.111}$$

Prin identificarea coeficienților matriceali ai funcțiilor trigonometrice variabile in timp, rezultă sistemele de ecuații matriceale

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \cos \beta - p\mathbf{B} \sin \beta]\mathscr{A} = \mathbf{Q} \tag{27.112}$$

și

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \sin \beta + p\mathbf{B} \cos \beta]\, \mathscr{A} = \mathbf{0} \tag{27.113}$$

Ultima ecuație este echivalentă însă unui sistem de r ecuații algebrice liniare omogene in necunoscutele $\mathscr{A}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, care va admite o soluție nebanală numai in cazul satisfacerii condiției

$$\det\, [(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \sin \beta + p\mathbf{B} \cos \beta] = 0, \tag{27.114}$$

sau, concret:

$$\begin{Vmatrix} (c_{11} - p^2a_{11}) \sin \beta + pb_{11} \cos \beta & \ldots & (c_{1r} - p^2a_{1r}) \sin \beta + pb_{1r} \cos \beta \\ \vdots & & \vdots \\ (c_{r1} - p^2a_{r1}) \sin \beta + pb_{r1} \cos \beta & \ldots & (c_{rr} - p^2a_{rr}) \sin \beta + pb_{rr} \cos \beta \end{Vmatrix} = 0. \tag{27.115}$$

Dezvoltind acest determinant după puterile lui $\sin \beta$ și $\cos \beta$, se obține o ecuație de forma

$$\sum_{i=0}^{r} C_i \sin^i\beta \cos^{(r-i)}\beta = C_0 \cos^r\beta + C_1 \cos^{(r-1)}\beta \sin\beta + \ldots + C_r \sin^r \beta = 0, \tag{27.116}$$

cu coeficienții extremi C_0 și C_r avînd valorile

$$C_0 = p^r \det \mathbf{B}\,;\; C_r = \det\,(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}). \tag{27.117}$$

Pentru discutarea, în continuare, a problemei, se vor deosebi următoarele două situații distincte:

— *Pulsația excitației nu coincide cu nici una dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant*, adică

$$p \neq k_j,\; (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, r). \tag{27.118}$$

În această situație, exprimînd în ecuația (27.116) pe $\sin\beta$ și $\cos\beta$ în funcție de $\operatorname{tg}\beta$, se obține o ecuație de gradul r în $\operatorname{tg}\beta$, despre care se demonstrează că are toate rădăcinile reale și distincte.

Pentru fiecare rădăcină a acestei ecuații va putea fi scrisă cîte o ecuație de forma (27.113), adică fiecărei rădăcini $\beta^{(h)}$ îi va corespunde cîte un set de valori $A_i^{(h)} (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, r)$, formînd cîte o matrice coloană $\mathcal{A}^{(h)}$, rezultînd astfel sistemul de ecuații matriceale

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \sin\beta^{(h)} + p\mathbf{B} \cos\beta^{(h)}]\, \mathcal{A}^{(h)} = 0. \tag{27.119}$$
$$(h = 1,\, 2,\, \ldots,\, r).$$

Datorită faptului că fiecare din rădăcinile $\beta^{(h)}$ satisface condiția (27.114), adică sînt valabile relațiile

$$\det\,[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \sin\beta^{(h)} + p\mathbf{B} \cos\beta^{(h)}] = 0, \tag{27.120}$$

fiecare dintre ecuațiile matriceale (27.119) va fi echivalentă cu cîte un sistem de r ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele $A_i^{(h)} (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, r)$, dintre care însă numai $(r - 1)$ vor fi distincte; împărțind și aici ecuațiile (27.119) la prima dintre amplitudinile corespunzătoare aceluiași indice h și introducînd matricele

$$\mathbf{V}^{(h)} = \frac{1}{\mathcal{A}_1^{(h)}}\, \mathbf{A}^{(h)} = \left\| \begin{matrix} V_1^{(h)} = 1 \\ V_2^{(h)} = \dfrac{\mathcal{A}_2^{(h)}}{\mathcal{A}_1^{(h)}} \\ \vdots \\ V_r^{(h)} = \dfrac{\mathcal{A}_r^{(h)}}{\mathcal{A}_1^{(h)}} \end{matrix} \right\|, \tag{27.121}$$

ecuațiile (27.119) vor mai lua formele

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \sin \beta^{(h)} + p\mathbf{B} \cos \beta^{(h)}]\, \mathbf{V}^{(h)} = 0 \qquad (27.122)$$

și vor permite determinarea matricelor $\mathbf{V}^{(h)}$ și deci exprimarea apoi a matricelor $\mathcal{A}^{(h)}$ în funcție de matricele $\mathbf{V}^{(h)}$ cunoscute și de elementele $\mathcal{A}_r^{(h)}$ necunoscute, adică

$$\mathcal{A}^{(h)} = \mathcal{A}_1^{(h)}\, \mathbf{V}^{(h)}. \qquad (27.123)$$

Pentru o asemenea valoare a matricei $\mathcal{A}^{(h)}$, ecuația matriceală (27.112) va furniza o matrice corespunzătoare pentru amplitudinile excitației armonice sincrone sinfazice, avînd forma

$$\mathbf{Q}^{(h)} = \mathcal{A}_1^{(h)}\, [(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \cos \beta^{(h)} - p\mathbf{B} \sin \beta^{(h)}]\, \mathbf{V}^{(h)} \qquad (27.124)$$

sau încă, observînd că din ecuația (27.122) vor rezulta egalitățile

$$(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)} \sin \beta^{(h)} = -p\mathbf{B}\mathbf{V}^{(h)} \cos \beta^{(h)}, \qquad (27.125)$$

mai rezultă pentru matricele $\mathbf{Q}^{(h)}$ formele

$$\boxed{\mathbf{Q}^{(h)} = \mathcal{A}_1^{(h)} \left\{\frac{1}{\cos \beta^{(h)}} (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\, \mathbf{V}^{(h)}\right\} = -\, \mathcal{A}_1^{(h)} \left\{\frac{1}{\sin \beta^{(h)}}\, p\mathbf{B}\mathbf{V}^{(h)}\right\}}\,, \qquad (27.126)$$

cu elementele lor avînd expresiile concrete

$$\boxed{Q_k^{(h)} = \mathcal{A}_1^{(h)} \left\{\frac{1}{\cos \beta^{(h)}} \sum_{j=1}^{r} (C_{kj} - p^2 a_{kj}) V_j^{(h)}\right\} = -\, \mathcal{A}_1^{(h)} \left\{\frac{1}{\sin \beta^{(h)}}\, p \sum_{j=1}^{r} b_{kj} V_j^{(h)}\right\}} \qquad (27.127)$$

$A_1^{(h)}$ fiind, după cum s-a văzut, constante arbitrare.

Se poate trage deci concluzia că în cazul cînd matricea amplitudinilor excitației armonice sincrone satisface una din condițiile (27.124), corespunzătoare rădăcinii cu un număr de ordine h a ecuației (27.116), iar pulsația excitației satisface condițiile (27.118),

Scanned with CamScanner

atunci soluția (27.110), care determină mișcarea forțată a unui sistem vibrant, ia, în baza relației (27.123), forma

$$\boxed{\mathbf{w}^{(h)} = \mathscr{A}^{(h)} \sin (pt + \beta^{(h)}) = \mathscr{A}_1^{(h)} \mathbf{V}^{(h)} \sin (pt + \beta^{(h)})}, \tag{27.128}$$

cu elementele matricei $\mathbf{w}^{(h)}$ avînd expresiile

$$\boxed{w_i^{(h)} = \mathscr{A}_i^{(h)} \sin (pt + \beta^{(h)}) = \mathscr{A}_1^{(h)} V_i^{(h)} \sin (pt + \beta^{(h)})}, \tag{27.129}$$

realizîndu-se astfel *modul de distorsiune de ordinul h*.

Se va arăta, în continuare, pe baza unor proprietăți de ortogonalitate a matricelor $\mathbf{Q}^{(h)}$ analoage celor întîlnite la modurile proprii de vibrații, că matricea amplitudinilor oricărei excitații armonice sincrone sinfazice poate fi descompusă într-o sumă a produselor matricelor $\mathbf{Q}^{(h)}$ prin factori scalari ρ_h unic determinați, adică se poate scrie

$$\mathbf{Q} = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathbf{Q}^{(h)}. \tag{27.130}$$

Pentru aceasta, se va pleca de la relațiile (27.125), care, prin înmulțire la stînga cu transpusa matricei $\mathbf{V}^{(j)}$, corespunzătoare unui alt indice decît acela pentru care a fost considerată relația, va conduce la egalitatea

$$\mathbf{V}^{(j)\mathrm{T}}(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)} \operatorname{tg} \beta^{(h)} = -p\mathbf{V}^{(j)\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{V}^{(h)}. \tag{27.131}$$

Se înțelege ușor însă că relația precedentă rămîne valabilă și atunci cînd se schimbă între ei indicii j și h, adică poate fi scrisă și egalitatea

$$\mathbf{V}^{(h)\mathrm{T}}(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) \mathbf{V}^{(j)} \operatorname{tg} \beta^{(j)} = -p\, \mathbf{V}^{(h)\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{V}^{(j)},$$

sau încă, efectuînd în ambii membri transpunerea, mai rezultă

$$[\mathbf{V}^{(h)\mathrm{T}}(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(j)}]^{\mathrm{T}} \operatorname{tg} \beta^{(j)} = -p\, [\mathbf{V}^{(h)\mathrm{T}}\, \mathbf{B}\mathbf{V}^{(j)}]^{\mathrm{T}}. \tag{27.132}$$

Observind acum că, datorită simetriei matricelor **C**, **I** și **B**, sint valabile relațiile

$$[\mathbf{V}^{(h)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(j)}]^T = [(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(j)}]^T\,[\mathbf{V}^{(h)T}]^T =$$
$$= \mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})^T\mathbf{V}^{(h)} = \mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)}$$

și

$$[\mathbf{V}^{(h)T}\mathbf{B}\mathbf{V}^{(j)}]^T = [\mathbf{B}\mathbf{V}^{(j)}]^T\,[\mathbf{V}^{(h)T}]^T =$$
$$= \mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{V}^{(h)} = \mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{B}\mathbf{V}^{(h)},$$

egalitatea (27.132) va mai putea fi scrisă sub forma

$$[\mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)}]\,\mathrm{tg}\,\beta^{(j)} = -p[\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{B}\mathbf{V}^{(h)}] \qquad (27.133)$$

și compararea ei cu relația (27.131) conduce la concluzia

$$[\mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)}]\,\mathrm{tg}\,\beta^{(h)} = [\mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)}]\,\mathrm{tg}\,\beta^{(j)}$$

sau încă

$$[\mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)}]\,(\mathrm{tg}\,\beta^{(h)} - \mathrm{tg}\,\beta^{(j)}) = 0, \qquad (27.134)$$

cu consecința

$$\mathbf{V}^{(j)T}(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(h)} = 0, \qquad (27.135)$$
$$(j \neq h)$$

ca urmare a faptului că rădăcinile $\beta^{(h)}$ și $\beta^{(j)}$ sint distincte.

Scoțind din relația (27.126) expresia matriceală

$$(\mathbf{C}-p^2\mathbf{I})\,\mathbf{V}^{(h)} = \frac{\cos\beta^{(h)}}{\mathscr{A}_1^{(h)}}\,\mathbf{Q}^{(h)} \qquad (27.136)$$

și introducind-o în relația (24.146), aceasta din urmă va lua forma

$$\frac{\cos\beta^{(h)}}{\mathscr{A}_1^{(h)}}\,\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}^{(h)} = 0,\ (j \neq h),$$

conducind la condițiile

$$\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}^{(h)} = 0, \qquad (27.137)$$
$$(j \neq h;\ j,\ h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

care vor reprezenta *relațiile de ortogonalitate a matricelor* $\mathbf{Q}^{(h)}$.

Scanned with CamScanner

Pentru a se demonstra, în continuare, posibilitatea descompunerii (27.130), va fi suficient să se arate că factorii ρ_h sînt unic determinați.

Pentru aceasta, se va înmulți relația (27.130) la stînga cu transpusa matricei $\mathbf{V}^{(j)}$, rezultînd astfel egalitatea

$$\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q} = \sum_{h=1}^{r} \rho_h\,\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}^{(h)},$$

sau încă, ținînd seama și de condițiile (27.137), mai rezultă relațiile

$$\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q} = \rho_j\,\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}^{(j)}, \tag{27.138}$$

care vor furniza valorile factorului ρ_j:

$$\rho_j = \frac{\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}}{\mathbf{V}^{(j)T}\,\mathbf{Q}^{(j)}}, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{27.139}$$

Se va mai demonstra, în continuare, că în condițiile descompunerii (27.130) a matricei amplitudinilor excitației și în condițiile (27.118) pentru pulsația excitației, mișcarea vibratorie forțată a unui sistem vibrant liniar rezultă din suprapunerea celor r moduri de distorsiune posibile ($h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$).

Într-adevăr, în condițiile precizate ecuația diferențială matriceală (27.95) a mișcării vibratorii forțate a sistemului vibrant va lua forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h\,\mathbf{Q}^{(h)}\right)\sin\,(pt), \tag{27.140}$$

iar soluția $\mathbf{w}_f$ particulară a ei va trebui să satisfacă condiția

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}}_f + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}}_f + \mathbf{C}\mathbf{w}_f \equiv \left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h\,\mathbf{Q}^{(h)}\right)\sin\,(pt). \tag{27.141}$$

Pe de altă parte, în cazul cînd matricea amplitudinilor excitației s-ar reduce numai la unul din termenii sumei din membrul drept al relației (27.130), adică ar fi de forma

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}^{(h)}$$

și deci ecuația diferențială matriceală a mișcării forțate ar avea, în această situație, forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{Q}^{(h)}\sin\,(pt),$$

Scanned with CamScanner

soluția ei ar fi de forma (27.128) și ar verifica ecuația precedentă, adică ar fi satisfăcută condiția

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}}_f^{(h)} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}}_f^{(h)} + \mathbf{C}\mathbf{w}_f^{(h)} \equiv \mathbf{Q}^{(h)} \sin(pt).$$

Înmulțind aceste din urmă ecuații, scrise pentru toate cele r valori ale indicelui h, cu coeficienții ρ_h dați de relațiile (27.139) și însumînd apoi aceste ecuații astfel înmulțite, rezultă relația

$$\mathbf{I}\left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h \ddot{\mathbf{w}}_f^{(h)}\right) + \mathbf{B}\left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h \dot{\mathbf{w}}_f^{(h)}\right) + \mathbf{C}\left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathbf{w}_f^{(h)}\right) \equiv \left(\sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathbf{Q}^{(h)}\right) \sin(pt). \tag{27.142}$$

Compararea relațiilor (27.141) și (27.142) conduce la concluzia că soluția particulară a ecuației (27.140) are, în această situație, forma

$$\boxed{\mathbf{w}_f = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathbf{w}_f^{(h)} = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathscr{A}^{(h)} \sin(pt+\beta^{(h)}) = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathscr{A}_1^{(h)} \mathbf{V}^{(h)} \sin(pt+\beta^{(h)})}, \tag{27.143}$$

cu următoarele expresii ale elementelor matricei $\mathbf{w}_f$:

$$\boxed{w_{if} = \sum_{h=1}^{r} \rho_h w_{if}^{(h)} = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathscr{A}_i^{(h)} \sin(pt+\beta^{(h)}) = \sum_{h=1}^{r} \rho_h \mathscr{A}_1^{(h)} V_i^{(h)} \sin(pt+\beta^{(h)})} \tag{27.144}$$

Relațiile precedente permit să se tragă concluzia că mișcarea forțată a sistemului vibrant rezultă, în aceste condiții, din suprapunerea celor r moduri de distorsiune posibile;

— *Pulsația excitației coincide cu una dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant.*

Presupunînd, de exemplu, că pulsația excitației coincide cu pulsația proprie fără amortizare k_j, adică

$$p = k_j, \tag{27.145}$$

expresia (27.117) a coeficientului C_r al ecuației (27.116) va lua, în baza condițiilor (26.164), valoarea particulară

$$C_r = \det [(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})] = \det [(\mathbf{C} - k_j^2\mathbf{I})] = 0, \tag{27.146}$$

iar ecuația (27.116) va lua și ea forma

$$C_0 \cos^r \beta + C_1 \cos^{(r-1)} \beta \sin \beta + \ldots + C_{r-1} \cos \beta \sin^{(r-1)} \beta = 0$$

sau încă

$$\cos \beta \left[\sum_{i=1}^{r-1} C_i \sin^i \beta \cos^{(r-i-1)} \beta \right] = 0, \tag{27.147}$$

cu prima rădăcină avînd valoarea

$$\beta^{(1)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(rad)} \tag{27.148}$$

și cu celelalte $(r-1)$ rădăcini, $\beta^{(h)}$, $(h = 2, 3, \ldots, r)$, reale și distincte.

Pentru aceste din urmă rădăcini, obținerea modurilor de distorsiune corespunzătoare se va realiza și acum în condițiile satisfacerii, de către matricea amplitudinilor excitației armonice sincrone sinfazice, a condițiilor (27.126), iar modurile de distorsiune respective vor avea și acum formele (27.128), respectiv (27.129), cu $h = 2, 3, \ldots, r$.

Pentru obținerea modului de distorsiune corespunzătoare primei rădăcini, condiția pe care va trebui să o satisfacă matricea amplitudinilor va trebui scrisă sub forma (27.124), care, avînd în vedere valoarea (27.148) a rădăcinii $\beta^{(1)}$ ($\cos \beta^{(1)} = 0$; $\sin \beta^{(1)} = 1$), va lua forma particulară

$$\mathbf{Q}^{(1)} = -p\mathscr{A}_1^{(1)}\mathbf{B}\mathbf{V}^{(1)}, \tag{27.149}$$

iar ecuația matriceală (27.122), care va permite determinarea matricei $\mathbf{V}^{(1)}$, va lua și ea forma simplificată

$$(\mathbf{C} - k_j^2\mathbf{I})\mathbf{V}^{(1)} = 0, \tag{27.150}$$

căreia îi corespunde următorul sistem de ecuații algebrice liniare în necunoscutele $V_i^{(1)}$:

$$\sum_{i=1}^{r} (c_{ki} - k_i^2 a_{ki}) V_i^{(1)} = 0, \tag{27.151}$$

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

în care însă, datorită condiției (27.146), numai $(r - 1)$ ecuații vor fi distincte.

Avînd în vedere forma (27.121) a matricei $\mathbf{V}^{(1)}$, $(V_1^{(1)} = 1)$ și considerînd numai ultimele $(r - 1)$ ecuații din sistemul (27.151), acesta din urmă va mai lua forma

$$\sum_{i=2}^{r} (c_{ki} - k_j^2\, a_{ki})\, V_i^{(1)} = -(c_{k1} - k_j^2\, a_{k1}), \tag{27.152}$$

identică, după cum se vede, cu sistemul (26.209) de ecuații pentru valoarea $j = 1$, care furnizează elementele matricei de transformare în coordonate principale.

Compararea ecuațiilor (27.152) și (26.209) conduce la concluzia că matricea coloană $\mathbf{V}^{(1)}$ coincide în acest caz cu vectorul propriu de ordinul unu al matricei de transformare, adică

$$\mathbf{V}^{(1)} \equiv \mathbf{T}_{(1)}, \tag{27.153}$$

respectiv

$$V_i^{(1)} \equiv \tau_{i1}, \ (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{27.154}$$

În aceste condiții, particularizarea relațiilor (27.128), respectiv (27.129), la determinarea primului mod de distorsiune conduce la relațiile

$$\boxed{\mathbf{w}_j^{(1)} = \mathscr{A}_1^{(1)}\, \mathbf{T}_{(1)} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{T}_{(1)}\left[\mathscr{A}_1^{(1)} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right)\right]}, \tag{27.155}$$

respectiv

$$\boxed{w_{ij}^{(1)} = \mathscr{A}_1^{(1)}\, \tau_{i1} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right) = \tau_{i1}\left[\mathscr{A}_1^{(1)} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right)\right]}. \tag{27.156}$$

Compararea termenilor din paranteza pătrată din membrul drept al ultimelor relații cu expresiile din membrul drept al relației (26.201) corespunzătoare valorii $h = 1$ și cu considerarea și a condi-

Scanned with CamScanner

ției (26.205), permite să se mai scrie relațiile (27.155) și (27.156) sub formele

$$\mathbf{w}_j^{(1)} = \mathbf{T}_{(1)}\, \xi_1, \tag{27.157}$$

respectiv

$$w_{ij}^{(1)} = \tau_{i1}\, \xi_1,\ (i = [1, 2, \ldots, r), \tag{27.158}$$

— unde ξ_1 este primul mod propriu de vibrație fără amortizare —, rezultînd de aici că în condițiile precizate mai sus, primul mod de distorsiune coincide chiar cu primul mod propriu de vibrație fără amortizare a sistemului vibrant.

Pe baza expunerii precedente, se pot trage următoarele concluzii generale privind realizarea modurilor de distorsiune:

— în condițiile (27.118) pentru pulsația excitației armonice sincrone sinfazice și în una singură dintre condițiile (27.126) privind matricea amplitudinilor excitației, mișcarea forțată a sistemului vibrant corespunde unui mod de distorsiune, toate vibrațiile forțate avînd aceeași fază inițială, egală cu rădăcina ecuației (27.116) pentru care a fost considerată matricea amplitudinilor;

— în condițiile (27.118) pentru pulsația excitației armonice sincrone sinfazice și în condițiile (27.130) pentru matricea amplitudinilor ei, cu matricele $\mathbf{Q}^{(h)}$ satisfăcînd condițiile (27.126) și cu factorii ρ_h dați de relațiile (27.139), mișcarea forțată a sistemului vibrant rezultă din suprapunerea tuturor celor r moduri de distorsiune ale sistemului vibrant;

— în condițiile coincidenței pulsației excitației armonice sincrone sinfazice cu una dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant, cu matricea amplitudinilor satisfăcînd una din relațiile (27.126) corespunzătoare rădăcinilor $\beta^{(h)}$ diferite de valoarea $\frac{\pi}{2}$ (rad), mișcarea forțată a sistemului vibrant corespunde, de asemenea, unui mod de distorsiune și anume aceluia pentru care a fost considerată rădăcina $\beta^{(h)}$;

— în condițiile coincidenței pulsației excitației armonice sincrone sinfazice cu una dintre pulsațiile proprii fără amortizare, și cu matricea amplitudinilor excitației corespunzătoare rădăcinii $\beta = \frac{\pi}{2}$ (rad) îndeplinind condițiile (27.149), modul de distorsiune al siste-

Scanned with CamScanner

mului vibrant corespunzător acestei rădăcini coincide cu un mod propriu fără amortizare de vibrație

— *Metoda matricelor complexe.*

Ecuației matriceale inițiale (27.95) i se asociază o a doua ecuație matriceală, descriind mișcarea aceluiași sistem vibrant in condițiile unei excitații de forma

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q}\cos(pt).$$

Notind cu $\mathbf{w}^*$ matricea coloană a parametrilor lagrangeieni corespunzători mișcării vibratorii efectuate în condițiile noii excitații, ecuația diferențială matriceală descriind această nouă mișcare va avea forma

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{w}}^* + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}}^* + \mathbf{C}\mathbf{w}^* = \mathbf{Q}\cos(pt). \tag{27.159}$$

Înmulțind ecuația matriceală inițială (27.95) cu $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ și adunîndu-o cu ecuația (27.159), se obține o nouă ecuație, de forma

$$\mathbf{I}(\ddot{\mathbf{w}}^* + \mathrm{i}\ddot{\mathbf{w}}) + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{w}}^* + \mathrm{i}\dot{\mathbf{w}}) + \mathbf{C}(\mathbf{w}^* + \mathrm{i}\mathbf{w}) =$$
$$= \mathbf{Q}[\cos(pt) + \mathrm{i}\sin(pt)], \tag{27.160}$$

sau incă, introducind variabila complexă

$$\zeta = \mathbf{w}^* + \mathrm{i}\mathbf{w}, \tag{27.161}$$

cu

$$\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{w}}^* + \mathrm{i}\dot{\mathbf{w}} \quad \text{și} \quad \ddot{\zeta} = \ddot{\mathbf{w}}^* + \mathrm{i}\ddot{\mathbf{w}},$$

precum și notația

$$\mathbf{Q}[\cos(pt) + \mathrm{i}\sin(pt)] = \mathbf{Q}e^{ipt} = \Psi, \tag{27.162}$$

ecuația diferențială matriceală (27.160) va mai lua forma

$$\mathbf{I}\ddot{\zeta} + \mathbf{B}\dot{\zeta} + \mathbf{C}\zeta = \Psi. \tag{27.163}$$

Se înțelege că în cazul cînd se va cunoaște soluția particulară complexă ζ_f a acestei din urmă ecuații diferențiale matriceale, atunci se va putea calcula imediat și soluția particulară $\mathbf{w}_f$ a ecuației matriceale (27.95), determinînd mișcarea forțată a sistemului vibrant în baza relației evidente

$$\mathbf{w}_f = \operatorname{Im}\zeta_f. \tag{27.164}$$

Scanned with CamScanner

Soluția particulară a ecuației diferențiale matriceale (27.163) va trebui căutată sub forma

$$\zeta_f = \begin{Vmatrix} \zeta_1 = \mathcal{A}_1 e^{i(pt+\beta_1)} \\ \vdots \\ \zeta_j = \mathcal{A}_j e^{i(pt+\beta_j)} \\ \vdots \\ \zeta_r = \mathcal{A}_r e^{i(pt+\beta_r)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 e^{i\beta_1} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_j e^{i\beta_j} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_r e^{i\beta_r} \end{Vmatrix} e^{ipt} = \zeta^* e^{ipt} \quad (27.165)$$

cu

$$\dot{\zeta}_f = ip \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 e^{i(pt+\beta_1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_j e^{i(pt+\beta_j)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_r e^{i(pt+\beta_r)} \end{Vmatrix} = ip\, \zeta_f$$

și

$$\ddot{\zeta}_f = -\, p^2 \begin{Vmatrix} \mathcal{A}_1 e^{i(pt+\beta_1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_j e^{i(pt+\beta_j)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_r e^{i(pt+\beta_r)} \end{Vmatrix} = -\, p^2 \zeta_f$$

în care constantele $\mathcal{A}_i$ și β_i vor trebui determinate impunîndu-se condiția ca soluția (27.165) să verifice ecuația (27.163); rezultă astfel condiția

$$[(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) + ip\mathbf{B}]\, \zeta_f \equiv \mathbf{\Psi}. \quad (27.166)$$

Matricea complexă

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{C} - p^2\mathbf{I}) + ip\mathbf{B}, \quad (27.167)$$

cu elementele ei avînd expresiile concrete

$$Z_{hj} = (C_{hj} - p^2 a_{hj}) + ipb_{hj}, \quad (27.168)$$

poartă numele de *matricea impedanțelor sistemului vibrant* și pentru orice valoare a pulsației excitației, care nu coincide cu una dintre pulsațiile proprii fără amortizare ale sistemului vibrant, ($p \neq k_j$; $j = 1, 2, \ldots, r$), ea este nesingulară chiar în condițiile neglijării amortizării — cînd se reduce numai la matricea reală $(\mathbf{C} - p^2\mathbf{I})$ —,

Scanned with CamScanner

adică determinantul ei, care este tot o mărime complexă ($\det [\mathbf{Z}] = S + iP$), satisface condiția

$$\det [\mathbf{Z}] \neq 0. \tag{27.169}$$

În acest caz, matricea **Z** admite totdeauna matricea inversă, notată în continuare cu simbolul

$$\begin{Vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1r} \\ \vdots & & \\ r_{r1} & \dots & r_{rr} \end{Vmatrix} = \frac{\begin{Vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1r} \\ \vdots & & \\ Z_{r1} & \dots & Z_{rr} \end{Vmatrix}}{S + iP}, \tag{27.170}$$

unde Z_{hj} sînt complemenții algebrici ai elementelor Z_{hj} din determinantul matricei **Z**, această ultimă matrice, simetrică, purtînd numele de *matricea receptanțelor sistemului vibrant.*

Este ușor de înțeles că receptanțele individuale r_{hj} vor fi, de asemenea, complexe, adică de forma

$$r_{hj} = d_{hj} + ie_{hj}, \tag{27.171}$$

cu d_{hj} și e_{hj} mărimi reale.

Introducînd notațiile

$$\frac{e_{hj}}{d_{hj}} = \operatorname{tg} \theta_{ij};\ \sqrt{e_{hj}^2 + d_{hj}^2} = R_{rj}\,. \tag{27.172}$$

expresiile (27.171) ale receptanțelor individuale vor mai putea fi scrise sub următoarea formă exponențială

$$r_{hj} = d_{hj}\left(1 + i\frac{e_{hj}}{d_{hj}}\right) = \frac{d_{hj}}{\cos \theta_{hj}}(\cos \theta_{hj} + i \sin \theta_{hj}) = R_{hj}\, e^{i\theta_{hj}}, \tag{27.173}$$

care va permite scrierea matricei receptanțelor și sub forma

$$\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} R_{11} e^{i\theta_{11}} & \dots & R_{1r} e^{i\theta_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{r1} e^{i\theta_{r1}} & \dots & R_{rr} e^{i\theta_{rr}} \end{Vmatrix}. \tag{27.174}$$

Prin introducerea matricei impedanțelor, ecuația matriceală (27.166) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\mathbf{Z}\,\zeta_f = \Psi, \tag{27.175}$$

iar prin înmulțirea ei la stînga cu matricea receptanțelor se obține și soluția

$$\zeta_f = \mathbf{R}\,\Psi, \tag{27.176}$$

din care va rezulta, după considerarea expresiilor (27.165) și (27.162) ale matricelor ξ_f și ψ și după simplificarea prin e^{ipt}, relația

$$\zeta^* = \mathbf{R}\mathbf{Q}, \tag{27.177}$$

cu următoarele expresii concrete ale elementelor matricei ζ^*:

$$\mathscr{A}_j\, e^{i\beta_j} = \sum_{k=1}^{r} r_{jk}\, Q_k^0 = \sum_{k=1}^{r} R_{jk}\, Q_k^0\, e^{i\beta_{jk}}. \tag{27.178}$$

Identificînd părțile reale și cele imaginare din cei doi membri ai relațiilor precedente, rezultă egalitățile

$$\mathscr{A}_j \cos\beta_j = \sum_{k=1}^{r} R_{jk}\, Q_k^0 \cos\theta_{jk}; \tag{27.179}$$

$$\mathscr{A}_j \sin\beta_j = \sum_{k=1}^{r} R_{jk}\, Q_k^0 \sin\theta_{jk}.$$

Prin ridicarea la pătrat a ecuațiilor de mai sus corespunzătoare fiecărei valori a indicelui j, se obțin relațiile

$$\mathscr{A}_j^2 \cos^2\beta_j = \sum_{h,k=1}^{r} R_{jh} R_{jk}\, Q_h^0 Q_k^0 \cos\theta_{jh}\cos\theta_{jk}; \tag{27.180}$$

$$\mathscr{A}_j^2 \sin^2\beta_j = \sum_{h,k=1}^{r} R_{jh} R_{jk}\, Q_h^0 Q_k^0 \sin\theta_{jh}\sin\theta_{jk},$$

care, prin însumare și extragerea rădăcinii pătrate, conduc la valorile amplitudinilor $\mathscr{A}_j$:

$$\boxed{\mathscr{A}_j = \sqrt{\sum_{h,k=1}^{r} R_{jh} R_{jk}\, Q_h^0 Q_k^0 \cos(\theta_{jh} - \theta_{jk})}}\,. \tag{27.181}$$

De asemenea, prin împărțirea, între ele, a relațiilor (27.179) corespunzătoare fiecărei valori a indicelui j, se obțin și valorile fazelor inițiale ale vibrațiilor forțate

$$\boxed{\beta_j = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{k=1}^{r} R_{jk}\, Q_k^0 \sin \theta_{jk}}{\sum_{k=1}^{r} R_{jk}\, Q_k^0 \cos \theta_{jk}},} \tag{27.182}$$

Odată determinate mărimile $\mathscr{A}_j$ și β_j, se va putea reveni la forma (27.165) a soluției ζ_f, care, scrisă încă sub forma echivalentă

$$\zeta_{jf} = \mathscr{A}_j\, e^{i(pt+\beta_j)} = \mathscr{A}_j[\cos (pt + \beta_j) + i \sin (pt + \beta_j)], \tag{27.183}$$

va permite, în baza relației (27.164), să se determine și ecuațiile finite ale vibrațiilor forțate ale sistemului vibrant, acestea avînd formele

$$\boxed{w_{if} = \operatorname{Im} \zeta_{if} = \mathscr{A}_j \sin (pt + \beta_j),} \tag{27.184}$$

identice, după cum se vede, cu ecuațiile (27.108) sau (27.75), dar cu amplitudinile și fazele inițiale calculate cu ajutorul unor formule diferite de cele stabilite în cadrul celorlalte metode de determinare a mișcării forțate a sistemului vibrant considerat.

27.1.2. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale în coordonate principale ale vibrațiilor liniare ale unui sistem mecanic, efectuate în jurul poziției de echilibru stabil

În cazul utilizării ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil în coordonate principale – utilizare care implică rezolvarea, în prealabil, a ecuației (26.208) a pulsațiilor proprii fără amortizare și a sistemului ((26.209) de ecuații algebrice liniare neomogene în cei $(r-1)$ coeficienți de distribuție care intră în componența matricei de transformare în coordonate

principale corespunzătoare sistemului vibrant considerat —, vor trebui luate în considerație următoarele două situații distincte:

a) *Cazul modurilor proprii de vibrație necuplate prin amortizări.* În această situație, corespunzătoare fie condițiilor

$$\eta_{ki} \begin{cases} = \eta_i \text{ pentru } k = i; \\ = 0 \text{ pentru } k \neq i; \end{cases} \tag{27.185}$$

respectiv condiției matriceale

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0, \tag{27.186}$$

cînd matricea de transformare în coordonate principale diagonalizează matricea de amortizare, fie condițiilor

$$\eta_{ki} = 0, \ (k, i = 1, 2, \ldots, r), \tag{27.187}$$

respectiv condiției matriceale

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \tag{27.188}$$

cînd amortizarea sistemului vibrant luat în considerație poate fi neglijată, cele r ecuații diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul pozițiilor de echilibru stabil, scrise în coordonate principale, nu formează un sistem, ci sînt ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți neomogene independente între ele.

Considerînd cazul mai general, al matricei de amortizare $\boldsymbol{\eta}_0$ diferită de matricea zero — el înglobînd, în ultimă instanță, și cazul particular al amortizării neglijabile —, modul propriu de ordinul i de mișcare va fi descris prin ecuația diferențială

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = X_i(t), \tag{27.188}$$

cu soluția generală de forma

$$\xi_i = \xi_{ip} + \xi_{if}, \tag{27.189}$$

unde ξ_{ip} reprezintă soluția generală a ecuației omogene

$$\varepsilon_i \dot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = 0 \tag{27.190}$$

și va determina modul propriu de mișcare liberă cu amortizare de ordinul i al sistemului vibrant, iar ξ_{if} va reprezenta o soluție parti-

culară a ecuației complete (27.188), a cărei formă va depinde de forma excitației și care va determina mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i.

Odată cunoscute funcțiile $\xi_{ip}(t)$ și $\xi_{if}(t)$, se vor putea scrie și ecuațiile mișcărilor vibratorii — proprii și forțate ale — sistemului vibrant, aceste ecuații avînd, în baza relațiilor (26.113), formele

$$w_{jp}=\sum_{i=1}^{r} \tau_{ji}\, \xi_{ip}, \tag{27.191}$$

respectiv

$$w_{ij}=\sum_{i=1}^{r} \tau_{ji}\, \xi_{if} \tag{27.192}$$

și deci și ecuațiile mișcării vibratorii rezultante

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ji}\,(\xi_{ip} + \xi_{if}). \tag{27.193}$$

Căutînd soluția generală a ecuației (27.190) sub forma

$$\xi_{ip} = C_i\, e^{z_i t}, \tag{27.194}$$

se va determina constanta z_i impunîndu-se condiția ca această soluție să verifice ecuația (27.190), rezultînd astfel, după simplificarea lui $C_i\, e^{z_i t}$, cunoscuta ecuație caracteristică a ecuației diferențiale (27.188):

$$\varepsilon_i\, z_i^2 + \eta_i\, z_i + \varkappa_i = 0, \tag{27.195}$$

cu rădăcinile

$$z_{i_{1,2}} = -\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i}\right)^2 - \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}} = -\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i} \pm \sqrt{\frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}}\sqrt{\frac{\eta_i^2}{4\,\varkappa_i\,\varepsilon_i} - 1}\,. \tag{27.196}$$

Mărimea

$$\sqrt{\frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}} = k_i \tag{27.197}$$

va reprezenta, în baza relațiilor (26.203) și (26.205), pulsația proprie fără amortizare de ordinul i a sistemului vibrant, iar valoarea lui

Scanned with CamScanner

η_i care anulează discriminantul rădăcinilor, notată cu simbolul $\eta_{i_{cr}}$, adică

$$\eta_{i_{cr}} = \sqrt{4\, \varkappa_i\, \varepsilon_i}, \qquad (27.198)$$

este numită ***coeficient de amortizare critică.***

Introducînd notațiile

$$\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i'} = \mu_i\ ; \qquad \frac{\eta_i}{\eta_{i_{cr}}} = \zeta_i \geqslant 0, \qquad (27.199)$$

cu mărimea ζ_i purtînd numele de *fracțiune din amortizarea critică* sau de *raport de amortizare*, expresiile (27.196) ale rădăcinilor ecuației caracteristice (27.195) vor mai putea fi scrise sub formele

$$z_{i_{1,2}} = -\mu_i \pm k_i\sqrt{\zeta_i^2 - 1}. \qquad (27.200)$$

Existînd două valori pentru constanta z_i, soluția (27.194) va trebui scrisă sub forma

$$\xi_{ip} = C_{i1}\, e^{z_{i1}t} + C_{i2}\, e^{z_{i2}t} = C_{i1}\, e^{[-\mu_i + k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}]t} + C_{i2}\, e^{[-\mu_i - k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}]t},$$

sau încă, scoțînd pe $e^{-\mu_i t}$ în factor comun, sub forma

$$\xi_{ip} = e^{-\mu_i t}\left[C_{i1}\, e^{k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\, t} + C_{i2}\, e^{-k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\, t}\right]. \qquad (27.201)$$

Caracterul variației coordonatei principale ξ_{ip} în funcție de timp va depinde, evident, de valoarea discriminantului rădăcinilor ecuației caracteristice (27.195), putîndu-se deosebi următoarele trei situații distincte:

α) *Cazul amortizării subcritice*, corespunzător condiției

$$\zeta_i < 1, \qquad (27.202)$$

cînd rădăcinile (27.200) ale ecuației caracteristice (27.195) devin complexe și conjugate, putînd fi scrise sub forma

$$z_{i_{1,2}} = -\mu_i \pm \sqrt{-1}\, k_i\sqrt{1-\zeta_i^2} = -\mu_i \pm i k_{a_i}, \qquad (27.203)$$

unde mărimea

$$k_{a_i} = k_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \qquad (27.204)$$

este numită *pulsație proprie cu amortizare de ordinul i a sistemului vibrant*, iar soluția (27.201) ia o primă formă concretă, corespunzătoare acestui caz de amortizare:

$$\boxed{\xi_{ip} = e^{-\mu_i t}\left[C_{i1}\, e^{ik_{a_i} t} + C_{i2}\, e^{-ik_{a_i} t}\right]}, \qquad (27.205)$$

cu C_{i1} și C_{i2} reprezentînd constante de integrare, complexe și conjugate.

O a doua formă concretă a soluției (27.201) corespunzătoare amortizării subcritice va fi obținută folosind în relația (27.205) cunoscutele formule de transformare ale lui Euler ($e^{\pm ik_{a_i} t} = \cos(k_{a_i} t) \pm i \sin(k_{a_i} t)$) și introducînd notațiile

$$C_{i1} + C_{i2} = A_i;\ i(C_{i1} - C_{i2}) = B_i, \qquad (27.206)$$

rezultă astfel ecuația

$$\boxed{\xi_{ip} = e^{-\mu_i t}\left[A_i \cos(k_{a_i} t) + B_i \sin(k_{a_i} t)\right]}, \qquad (27.207)$$

cu A_i și B_i reprezentînd constante de integrare, de astă dată mărimi reale.

În fine, o a treia formă concretă — de altfel, și cea mai des folosită — pentru soluția (27.201) corespunzătoare amortizării subcritice, poate fi obținută scoțînd, în ecuația (27.207), pe $B_i \neq 0$ forțat în factor și introducînd notațiile

$$\frac{A_i}{B_i} = \operatorname{tg} \alpha_i;\quad \frac{B_i}{\cos \alpha_i} = \mathscr{X}_i, \qquad (27.208)$$

ceea ce conduce la ecuația

$$\boxed{\xi_{ip} = e^{-\mu_i t}\, \mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i)}, \qquad (27.209)$$

cu $\mathscr{X}_i$ și α_i reprezentînd noile constante de integrare, care, ca și celelalte două serii de constante de integrare — constantele C_{i1} și C_{i2} din soluția (27.205) și constantele A_i și B_i din soluția (27.207) —, vor putea fi determinate cu ajutorul condițiilor inițiale

$$t = 0\ \{\xi_{ip}(0) = \xi^0_{ip};\ \dot{\xi}'_{ip}(0) = \dot{\xi}^0_{ip}\}. \qquad (27.210)$$

impuse însă în soluția generală (27.189) și în expresia derivatei ei în raport cu timpul; se face mențiunea că valorile inițiale ξ^0_{ip} și $\dot{\xi}^0_{ip}$ vor rezulta prin rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare neomogene

$$w^0_{jp} = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ji}\, \xi^0_{ip}; \quad \dot{w}^0_{jp} = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ji}\, \dot{\xi}^0_{ip}. \tag{27.211}$$

Reprezentarea grafică, în baza ecuației (27.209), a variației lui ξ_{ip} în funcție de timp, conduce la o curbă de forma unei sinusoide deformată după axa ordonatelor prin amplificare cu factorul $e^{-\mu_i t}$ (curba (Γ_i) în fig. 27.1).

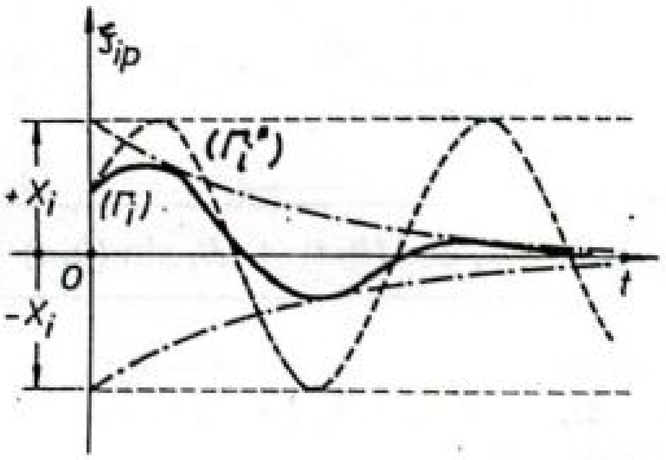


Fig. 27.1.

Se poate trage deci concluzia că în condițiile amortizării subcritice, modul propriu de mișcare de ordinul i este o vibrație cvasiarmonică cu modulație exponențial descrescătoare în amplitudine, de pseudoperioadă

$$T_{p_i} = \frac{2\pi}{k_{a_i}} = \frac{2\pi}{k_i\sqrt{1-\zeta_i^2}}, \tag{27.212}$$

cu decrementul logaritmic (a se vedea relațiile (21.225) și (21.226) avînd valoarea

$$\delta_i = \mu_i\, T_{p_i} = \frac{2\pi\,\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}, \quad (\approx 2\pi\,\zeta_i) \tag{27.213}$$

şi cu constanta de timp dată de relaţia

$$\tau_i = \frac{1}{\mu_i} = \frac{T_{p_i}}{\delta_i}, \tag{27.214}$$

În cazul amortizării neglijabile, care va putea fi considerat ca un caz particular al amortizării subcritice, corespunzător condiţiei

$$\eta_i = 0, \tag{27.215}$$

cu consecinţele

$$\mu_i = 0\,;\ \zeta_i = 0\,;\ k_{a_i} = k_i, \tag{27.216}$$

ecuaţiile (27.205), (27.206) şi (27.209) iau formele particulare

$$\boxed{\xi_{ip} = C_{i1}\, e^{ik_i t} + C_{i2}\, e^{-ik_i t}}, \tag{27.217}$$

respectiv

$$\boxed{\xi_{ip} = A_i \cos(k_i t) + B_i \sin(k_i t)} \tag{27.218}$$

şi

$$\boxed{\xi_{ip} = \mathscr{X}_i \sin(k_i t + \alpha_i)}, \tag{27.219}$$

reprezentarea grafică a ultimei ecuaţii conducînd la sinusoida (Γ_i^*) (fig. 27.1).

Rezultă deci că în condiţiile neglijării amortizării, modul propriu de mişcare de ordinul i considerat este o vibraţie armonică, de perioadă

$$T = \frac{2\pi}{k_i} = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varkappa_i}}. \tag{27.220}$$

β) *Cazul amortizării critice*, caracterizat prin condiţia

$$\zeta_i = 1, \tag{27.221}$$

care face ca rădăcinile (27.200) ale ecuaţiei caracteristice (27.195) să devină reale şi confundate, ele avînd valorile

$$z_{i1} = z_{i2} = z_i = -\mu_i. \tag{27.222}$$

Din teoria ecuațiilor diferențiale se știe că soluția generală a ecuației diferențiale (27.190) are în acest caz forma

$$\boxed{\xi_{ip} = e^{-\mu_i t} [A_i + B_i t]}, \qquad (27.223)$$

cu A_i și B_i reprezentînd constante de integrare.

Reprezentarea grafică a variației lui ξ_{ip} în funcție de timp conduce la o curbă de forma curbei (Γ_0), construite în fig. 27.2, cu

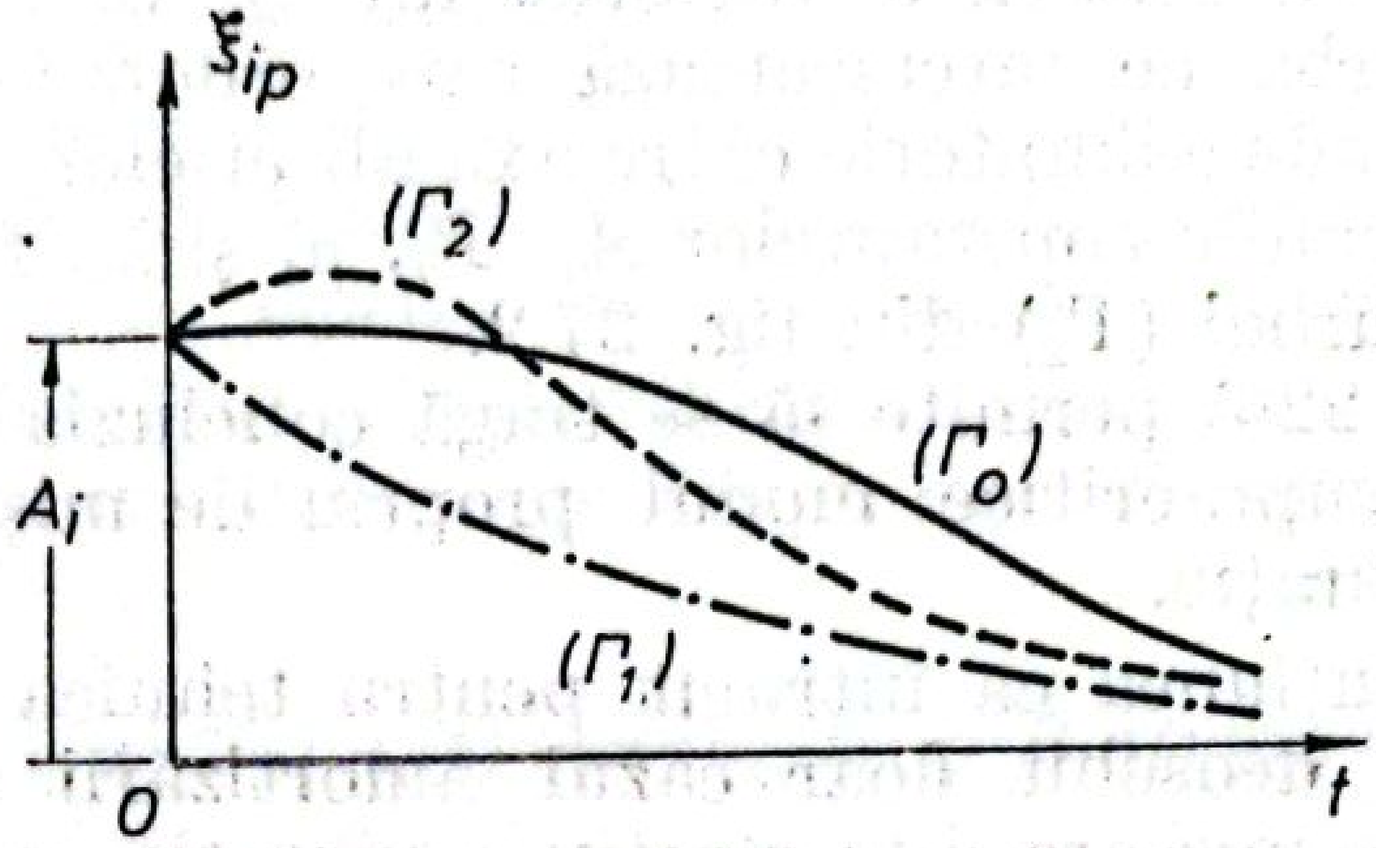


Fig. 27.2.

valoarea maximă a ordonatei depinzînd de valorile constantelor de integrare și de valoarea lui μ_i.

Este evident că în condițiile amortizării critice, modul propriu de mișcare de ordinul i nu este o vibrație.

γ) *Cazul amortizării supracritice*, corespunzător condiției

$$\zeta_i > 1, \qquad (27.224)$$

în baza căreia rădăcinile (27.200) ale ecuației caracteristice (27.195) vor căpăta valori reale și distincte.

Observînd că, în baza relațiilor de definiție a funcțiilor hiperbolice, pot fi făcute, în soluția generală (27.201), înlocuirile

$$e^{k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t} = \mathrm{ch}\,(k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t) + \mathrm{sh}\,(k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t);$$

$$e^{-k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t} = \mathrm{ch}\,(k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t) - \mathrm{sh}\,(k_i\sqrt{\zeta_i^2-1}\,t)$$

și introducînd notațiile

$$C_{i1} + C_{i2} = A_i;\; C_{i1} - C_{i2} = B_i, \qquad (27.225)$$

se va mai putea scrie soluția (27.201), care determină modul propriu de mişcare de ordinul i al sistemului mecanic, sub forma

$$\boxed{\xi_{ip} = e^{-\mu_i t}[A_i \operatorname{ch}(k_i\sqrt{\zeta_i^2 - 1}\,t) + B_i \operatorname{sh}(k_i\sqrt{\zeta_i^2 - 1}\,t)]}, \tag{27.226}$$

A_i şi B_i fiind constante de integrare care vor putea fi determinate abia după stabilirea soluției generale (27.189), corespunzătoare ecuației diferențiale complete.

Reprezentarea grafică a variației lui ξ_{ip} în funcție de timp, conduce la o curbă ce intersectează axa ordonatelor la distanța A_i de origine şi tinde asimptotic către axa absciselor, ea putînd avea, în funcție de mărimile constantelor A_i, B_i, μ_i şi k_i, fie forma curbei (Γ_1), fie cea a curbei (Γ_2) din fig. 27.2.

Relația (27.226) permite să se tragă concluzia că şi în condițiile amortizării supracritice modul propriu de mişcare de ordinul i nu este o vibrație.

Se face mențiunea că întrucît pentru tehnica vibrațiilor prezintă un interes deosebit doar cazul amortizării subcritice, cînd modul propriu de mişcare este efectiv o vibrație, în limbajul obişnuit al teoriei vibrațiilor liniare modul propriu de mişcare a mai fost numit *mod propriu de vibrație.*

Trecînd la determinarea soluției particulare a ecuației diferențiale complete (27.188), descriind mişcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i a sistemului vibrant considerat, se va ține şi aici seama de forma excitației $X_i(t)$, deosebindu-se următoarele situații distincte:

a) Mişcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații neperiodice.

Discutînd despre mişcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații neperiodice, se va observa mai întîi că funcțiile de timp

$$X_i = \sum_{k=1}^{r} \tau_{ik}\, Q_{ix_k}(t) = X_i(t) \tag{27.227}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

vor putea fi neperiodice nu numai în cazurile cînd forțele generalizate $(Q_{ex_k}(t)$ vor fi funcțiuni neperiodice de timp, ci — aşa cum s-a

Scanned with CamScanner

arătat de altfel și în cinematica vibrațiilor — și în cazurile cînd ele ar fi funcțiuni periodice de timp — în particular, chiar armonice —, dar cu pulsațiile fundamentale incomensurabile.

Pentru determinarea soluției particulare ξ_{if} a ecuației diferențiale (27.188) în condițiile excitațiilor $X_i(t)$ neperiodice, sînt folosite curent următoarele două metode generale:

— *Metoda Lagrange.* În ipoteza — adoptată și la studiul mișcării forțate în parametrii lagrangeieni obișnuiți — că funcțiile $X_i(t)$ sînt integrabile și luînd în considerație, în cele ce urmează, numai cazul amortizării subcritice, se va pleca de la forma (27.207) a soluției generale a ecuației diferențiale omogene ce descrie modul propriu de vibrație de ordinul i al sistemului vibrant, considerîndu-se această soluție și ca ecuație ce determină mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i, dar cu mărimile A_i și B_i considerate funcții de timp; această soluție, scrisă acum sub forma

$$\xi_{if} = e^{-\mu_i t} [A_i(t) \cos (k_{a_i} t) + B_i (t) \sin (k_{a_i} t)], \quad (27.228)$$

va trebui să satisfacă următoarele condiții:

— Derivatele de ordinul întîi în raport cu timpul ale funcțiilor ξ_{ip} (cu A_i și B_i constanți) și ξ_{if} (cu A_i și B_i funcții de timp) să coincidă, adică să fie satisfăcută egalitatea

$$\dot{\xi}_{if} = \dot{\xi}_{ip} + e^{-\mu_i t} [\dot{A}_i (t) \cos (k_{a_i} t) + \dot{B}_i(t) \sin (k_{a_i} t)] \equiv \dot{\xi}_{ip},$$

cu consecința

$$e^{-\mu_i t} [\dot{A}_i (t) \cos (k_{a_i} t) + \dot{B}_i (t) \sin (k_{a_i} t)] = 0. \quad (27.229)$$

— Soluția (27.228) să verifice ecuația diferențială completă (27.188), adică să fie satisfăcută condiția

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_{if} + \eta_i \dot{\xi}_{if} + \varkappa_i \xi_{if} = X_i (t), \quad (27.230)$$

cu

$$\xi_{if} = \xi_{ip}; \ \dot{\xi}_{if} = \dot{\xi}_{ip}$$

și

$$\ddot{\xi}_{if} = \ddot{\xi}_{ip} + k_{a_i} e^{-\mu_i t} [-\dot{A}_i (t) \sin (k_{a_i} t) + \dot{B}_i (t) \cos (k_{a_i} t)].$$

Scanned with CamScanner

Rezultă astfel ecuația

$$\underbrace{[\varepsilon_i \ddot{\xi}_{ip} + \eta_i \dot{\xi}_{ip} + \varkappa_i \xi_{ip}]}_{0} + k_{a_i} \varepsilon_i e^{-\mu_i t} [-\dot{A}_i(t) \sin(k_{a_i} t) +$$

$$+ \dot{B}_i(t) \cos(k_{a_i} t)] = X_i(t),$$

sau încă, observînd că primul grup de termeni din membrul sting este egal cu zero ca urmare a faptului că soluția ε_{ip} verifică ecuația (27.190), se mai poate scrie

$$\varepsilon_i k_{a_i} e^{-\mu_i t} [-\dot{A}_i(t) \sin(k_{a_i} t) + \dot{B}_i(t) \cos(k_{a_i} t)] = X_i(t). \tag{27.231}$$

Sistemul format din ecuațiile (27.229) și (27.231), scris încă sub forma

$$\dot{A}_i(t) \cos(k_{a_i} t) + \dot{B}_i(t) \sin(k_{a_i} t) = 0; \tag{27.232}$$

$$-\dot{A}_i(t) \sin(k_{a_i} t) + \dot{B}_i(t) \cos(k_{a_i} t) = \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} e^{\mu_i t} X_i(t),$$

furnizează, prin rezolvare în raport cu necunoscutele $\dot{A}_i(t)$ și $\dot{B}_i(t)$, expresiile acestor funcțiuni de timp:

$$\dot{A}_i(t) = -\frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} e^{\mu_i t} X_i(t) \sin(k_{a_i} t); \tag{27.233}$$

$$\dot{B}_i(t) = \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} e^{\mu_i t} X_i(t) \cos(k_{a_i} t),$$

iar prin integrarea lor, rezultă și funcțiile $A_i(t)$ și $B_i(t)$:

$$A_i(t) = A_i^0 - \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int e^{\mu_i t} X_i(t) \sin(k_{a_i} t)\, dt;$$

$$B_i(t) = B_i^0 + \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int e^{\mu_i t} X_i(t) \cos(k_{a_i} t)\, dt. \tag{27.234}$$

Scanned with CamScanner

Introducerea valorilor constante A_i^0 și B_i^0 în ecuația (27.228) permite să se regăsească soluția (27.207), ce determină modul propriu de vibrație de ordinul i:

$$\xi_{ip} = e^{-\mu_i t} [A_i^0 \cos (k_{a_i} t) + B_i^0 \sin (k_{a_i} t)] = \\ = e^{-\mu_i t} \mathscr{X}_i \sin (k_{a_i} t + \alpha_i), \tag{27.235}$$

iar introducerea, în aceeași ecuație (27.228), a termenilor variabili din expresiile (27.234), conduce și la soluția care determină mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i:

$$\xi_{if} = e^{-\mu_i t} \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \left[- \left(\int e^{\mu_i t} X_i(t) \sin (k_{a_i} t) \mathrm{d}t \right) \cos (k_{a_i} t) + \right. \\ \left. + \left(\int e^{\mu_i t} X_i(t) \cos (k_{a_i} t) \, \mathrm{d}t \right) \sin (k_{a_i} t) \right]. \tag{27.236}$$

Ultima soluție poate fi scrisă sub formă mai concentrată, transformîndu-se integralele nedefinite din membrul drept în integrale definite cu limitele 0 și t ale acelorași funcții, dar cu variabila t înlocuită cu o nouă variabilă τ, în baza relațiilor:

$$\int e^{\mu_i t} X_i(t) \sin (k_{a_i} t) \, \mathrm{d}t = \int_0^t e^{\mu_i \tau} X_i(\tau) \sin (k_{a_i} \tau) \mathrm{d}\tau + C_i';$$

$$\int e^{\mu_i t} X_i(t) \cos (k_{a_i} t) \, \mathrm{d}t = \int_0^t e^{\mu_i \tau} X_i(\tau) \cos (k_{a_i} \tau) \mathrm{d}\tau + C_i'', \tag{27.237}$$

în care constantele C_i' și C_i'' vor putea fi considerate ca fiind înglobate în constantele A_i^0 și B_i^0; în modul acesta, funcțiile $e^{-\mu_i t} \times \sin (k_{a_i} t)$ și $e^{-\mu_i t} \cos (k_{a_i} t)$ vor putea fi introduse sub semnele de integrare, astfel că soluția (27.236) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\xi_{if} = \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int_0^t X_i(\tau) \, e^{-\mu_i (t-\tau)} \sin [k_{a_i} (t - \tau)] \, \mathrm{d}\tau, \tag{27.238}$$

integrala din membrul drept reprezentînd o formă particulară a unei integrale mai generale

$$\mathscr{D} = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau, \tag{27.239}$$

numită *integrala lui Duhamel*.

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

Forma (24.261) a soluției particulare ξ_{if} are avantajul de a putea fi folosită și în condițiile cînd funcțiile $X_i(t)$ prezintă o discontinuitate în punctul $t = 0$ — ca în cazul excitației în trepte —, cînd nu se mai pot folosi metodele obișnuite de determinare a soluției ξ_{if}.

Soluția generală a ecuației diferențiale complete (27.188), determinînd mișcarea transitorie a sistemului vibrant corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i va avea deci forma

$$\boxed{\xi_i = \xi_{ip} + \xi_{if} = e^{-\mu_i t}\,\mathscr{X} \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + + \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int_0^t X_i(\tau)\, e^{-\mu_i(t-\tau)} \sin[k_{a_i}(t-\tau)]\, d\tau}, \qquad (27.240)$$

iar mișcarea în regim permanent a sistemului vibrant corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i ($e^{-\mu_i t} \to 0$) va fi determinată prin ecuația

$$\boxed{\xi_i = \xi_{if} = \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int_0^t X_i(\tau)\, e^{-\mu_i t(t-\tau)} \sin[k_{a_i}(t-\tau)] d\tau}. \qquad (27.241)$$

În condițiile neglijării amortizării ($\eta_i = 0$; $\mu_i = 0$; $k_{a_i} = k_i$), se obține *mișcarea întreținută a sistemului vibrant*, determinată prin ecuația

$$\boxed{\xi_i = \mathscr{X}_i \sin(k_i t + \alpha_i) + \frac{1}{\varepsilon_i k_i} \int_0^t X_i(\tau) \sin[k_i(t-\tau)]\, d\tau,}, \qquad (27.242)$$

Atît în ecuația (27.240), cît și în ecuația (27.242), $\mathscr{X}_i$ și α_i sînt constante de integrare, care vor putea fi determinate abea acum, prin impunerea condițiilor inițiale (27.210) în soluția generală (27.240) — respectiv (27.242) —, precum și în relația obținută prin derivarea în raport cu timpul a soluției generale considerate.

— *Metoda transformării Laplace.*

O altă metodă generală de determinare a soluției particulare ξ_{if}, aplicabilă la o gamă destul de largă de forme concrete ale funcției $X_i(t)$, este *metoda transformării Laplace*, extinsă la cazul ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru stabil pe baza observației că problemele mecanicii — și deci

Scanned with CamScanner

ale mecanicii vibrațiilor — fac parte din așa numita categorie a „problemelor matematice cu valori inițiale", lucrind cu funcții de timp — funcțiile w_i, $\dot{\omega}_i$, $\ddot{\omega}_i$ și Q_{ex}, respectiv ξ_i, $\dot{\xi}_i$, $\ddot{\xi}_i$ și X_i — care iau valori numai pentru $t \geqslant 0$ incepind de la un moment inițial $t = 0$; această metodă prezintă, în condițiile în care poate fi folosită, următoarele avantaje importante:

— Evită efectuarea directă a integralelor care dau soluția ξ_{if} corespunzătoare mișcării forțate după modul propriu de ordinul i, prin transformarea mai întii a ecuației diferențiale a mișcării intr-o ecuație algebrică și prin utilizarea apoi a rezultatelor din tabelele speciale de transformate Lalpace (anexele VI și VII din lucrarea [2], tabelele de corespondențe în cazul transformării Laplace din lucrarea [17] ș.a.);

— permite determinarea soluției ξ_{if} chiar și în cazurile cînd funcțiile $X_i(t)$ sînt discontinue în punctul $t = 0$ — cum se întîmplă, de exemplu, în cazul excitației în treaptă —, prin transformarea acestor funcții continue și în acest punct.

Dacă $f(t)$ este o funcție cunoscută de timp, care ia valori numai pentru $t \geqslant 0$ și care poate fi descompusă într-o sumă de termeni de forma celor conținuți în tabelele de transformate Laplace, atunci funcției $f(t)$, care mai este numită și *funcție original*, i se poate asocia totdeauna funcția

$$F(s) = \mathscr{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{27.243}$$

unde s este un număr, în general complex, cu partea reală suficient de mare încît integrala (27.243) să fie convergentă, această nouă funcție purtînd numele de *funcție imagine* a funcției original, sau încă cel de *transformata Laplace a funcției* $f(t)$*.

A aplica transformata Laplace unei funcții $f(t)$ înseamnă deci a înmulți, mai întii, funcția cu factorul e^{-st} și a integra apoi, produsul astfel obținut, între limitele 0 și ∞.

În cazul cînd funcția $f(t)$ este discontinuă în punctul $t = 0$ — cazul funcțiilor care capătă valori în momentul inițial prin impulsuri —, transformarea Laplace va fi definită prin una din următoarele relații:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0_-}^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{27.244}$$

---

*) În numeroase lucrări numărul complex s este notat cu litera p.

Scanned with CamScanner

sau

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{+\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_{0+}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad (27.245)$$

prima fiind preferată de cei mai mulți dintre specialiștii care folosesc metoda transformării Laplace.

Transformarea Laplace este un operator liniar, fiind valabile relațiile

$$\mathscr{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathscr{L}[f_1(t)] + \mathscr{L}[f_2(t)]; \quad (27.246)$$
$$\mathscr{L}[hf(t)] = h\mathscr{L}[f(t)],$$

care mai pot fi scrise sub formele

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s), \text{ pentru}: f(t) = f_1(t) + f_2(t);$$
$$F(s) = h\, F_1(s), \text{ pentru}: f(t) = h\, f_1(t), \quad (27.247)$$

h fiind o constantă.

Tabelele amintite cu transformate Laplace, care prezintă, pe două coloane alăturate, corespondențele între funcțiile $f(t)$ și $F(s)$, permit să se rezolve următoarele două probleme:

— *Problema directă a transformării Laplace*, care poate fi formulată astfel: cunoscîndu-se funcția original $f(t)$, să cere să se determine funcția imagine $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$;

— *Problema inversă a transformării Laplace*, căreia i se dă următoarea formulare: cunoscîndu-se funcția imagine $F(s)$, se cere să se determine funcția original $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

Se demonstrează că ambele soluții sînt unice.

Practica aplicării transformării Laplace se bazează, în deosebi, pe următoarele patru teoreme principale, prezentate în continuare fără demonstrații:

— *Teorema I*: Dacă $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ este transformata Lalpace a unei funcții $f(t)$, atunci transformata Laplace a funcției

$$f_1(t) = e^{-zt} f(t), \quad (27.248)$$

unde z este, în general, un număr complex și în particular un număr real, este dată de relația

$$F_1(s_1) = F(s + z), \quad (27.249)$$

adică se obține prin înlocuirea, în transformata $F(s)$, a lui s cu valoarea $s_1 = s + z$.

— *Teorema a II-a*: Dacă transformata Laplace a unei funcții $f(t)$ se prezintă ca un raport de două polinoame în s, adică

$$F(s) = \frac{g(s)}{h(s)}, \tag{27.250}$$

cu polinomul de la numitor de grad superior celui de la numărător și posibil de descompus sub forma

$$h(s) = (s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_l), \tag{27.251}$$

unde a_i $(i = 1, 2, \dots, l)$ sînt rădăcinile, considerate distincte, ale ecuației $h(s) = 0$, numite încă și *zero-urile polinomului* $h(s)$, sau *polii transformatei* $F(s)$, atunci transformata Laplace a funcției $f(t)$ poate fi descompusă în suma

$$F(s) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{s - a_j} \frac{g(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_l)}, \tag{27.252}$$

iar funcția original a unei asemenea transformate se scrie sub forma

$$f(t) = \sum_{j=1}^{l} \frac{g(a_j)\, e^{a_j t}}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_l)}. \tag{27.253}$$

— *Teorema a III-a*: Dacă $F(s)$ este transformata Laplace a unei funcții $f(t)$, continuă și de k ori derivabilă în raport cu timpul pentru $t \geqslant 0$, satisfăcînd sistemul de condiții inițiale

$$f(t)_{t \to 0} = f^0; \quad \left(\frac{d^k f}{dt^k}\right)_{t \to 0} = \overset{(k)}{f^0}, \tag{27.254}$$

$$(k = 1, 2, \dots,)$$

atunci transformata Laplace a derivatei de ordinul k a funcției $f(t)$ satisface relația

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = s^k F(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j \overset{(k-1-j)}{f^0} \tag{27.255}$$

cu $\overset{(0)}{f^0} = f^0$.

Pentru transformatele Laplace ale derivatelor de ordinul unu și doi ale unei funcții $f(t)$ vor rezulta valorile particulare

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f^{\circ}, \tag{27.256}$$

respectiv

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}\right] = s^2F(s) - sf^{\circ} - f_0^{(1)}. \tag{27.257}$$

— *Teorema a IV-a:*

Dacă $F(s) = \mathrm{L}[f(t)]$ este transformata Laplace a unei funcții $f(t)$, atunci transformata Laplace a funcției

$$f_1(t) = f(kt) \tag{27.258}$$

unde k este o constantă pozitivă, are forma

$$\mathscr{L}[f_1(t)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right), \tag{27.259}$$

adică se obține din transformata funcției $f(t)$ prin impărțire la constanta k și prin inlocuirea lui s cu valoarea $s_1 = \frac{s}{k}$.

Cu aceste precizări, se va putea trece la prezentarea, în continuare, a modului de aplicare a transformării Laplace pentru obținerea soluției particulare a ecuației diferențiale

$$\varepsilon_i\ddot{\xi}_i + \eta_i\dot{\xi}_i + \varkappa_i\xi_i = X_i(t). \tag{27.260}$$

Aplicînd, în consecință, transformarea Laplace ambilor membrii ai ecuației, rezultă, în baza proprietăților (27.247), egalitatea

$$\varepsilon_i\mathscr{L}[\ddot{\xi}_i] + \eta_i\mathscr{L}[\dot{\xi}_i] + \varkappa_i\mathscr{L}[\xi_i] = \mathscr{L}[X_i(t)],$$

sau încă, observînd că în baza relațiilor (27.256) și (27.257) pot fi făcute inlocuirile

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}[\xi_i] = \mathscr{X}_i(s)\\ &\mathscr{L}[\dot{\xi}_i] = s\mathscr{L}(\xi_i) - \xi_0^i = s\,\mathscr{X}_i(s) - \xi_i^0;\\ &\mathscr{L}[\ddot{\xi}_i] = s^2\mathscr{L}[\xi_i] - s\xi_i^0 - \dot{\xi}_i^0 = s^2\mathscr{X}_i(s) - s\xi_i^0 - \dot{\xi}_i^0,\end{aligned} \tag{27.258}$$

Scanned with CamScanner

cu $\xi_i^0 = \xi_i(0)$ și $\dot{\xi}_i^0 = \dot{\xi}_i(0)$ reprezentînd valorile inițiale ale funcțiilor $\xi_i(t)$ și $\dot{\xi}_i(t)$, mai rezultă egalitatea

$$\mathscr{X}_i(s)\,[\varepsilon_i s^2 + \eta_i s + \varkappa_i] = \mathscr{L}[X_i(t)] + \varepsilon_i \xi_i^0 s + (\eta_i \xi_i^0 + \varepsilon_i \dot{\xi}_i^0). \tag{27.259}$$

Cu ajutorul tabelelor de transformate Laplace se va putea stabili expresia concretă a transformatei Laplace corespunzătoare funcției $X_i(t)$:

$$\mathscr{L}[X_i(t)] = \Phi_i(s), \tag{27.260}$$

astfel că introducind notația

$$\Phi_i(s) + \varepsilon_i \xi_i^0 s + (\eta_i \xi_i^0 + \varepsilon_i \dot{\xi}_i^0) = f_i(s), \tag{27.261}$$

relația (27.259) va conduce la următoarea expresie pentru transformata $\mathscr{X}_i(s)$:

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{f_i(s)}{\varepsilon_i s^2 + \eta_i s + \varkappa_i} = \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{f_i(s)}{s^2 + \frac{\eta_i}{\varepsilon_i} s + \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}}. \tag{27.262}$$

Revenind la tabelele de transformate Laplace, se va căuta în coloana funcțiilor imagine expresia din membrul drept al relației (27.262); odată găsită această expresie, se va citi în coloana funcțiilor original funcția $\xi_{if}(t)$ corespunzătoare funcției imagine $\mathscr{X}_i(s)$, care va reprezenta soluția căutată, adică

$$\xi_{if} = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_i(s)]. \tag{27.263}$$

În legătură cu modul de determinare, cu ajutorul tabelelor de transformate Laplace, a funcției original, mai trebuie făcută mențiunea că uneori vor trebui efectuate unele trasnformări algebrice prealabile ale funcției imagine, fie pentru a o aduce la o formă care să se găsească în tabele, fie pentru a o descompune într-o sumă determinată de funcții imagine de forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, \mathscr{X}_{ij}(s_j), \tag{27.264}$$

Scanned with CamScanner

cu C_{ij} constante și cu funcțiile imagine $\mathscr{X}_{ij}(s_j)$, unde s_j sînt transformări de forma

$$s_j = s + b_j \qquad (27.265)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

ale variabilei s, figurînd în tabele, în această ultimă situație funcția original corespunzătoare funcției imagine $\mathscr{X}_i(s)$ fiind dată de relația

$$\xi_{if} = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_i(s)] = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\,\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{ij}(s_j)]. \qquad (27.266)$$

Astfel, dacă funcția (27.261) a funcției imagine este un polinom de gradul întîi în s, adică

$$f(s) = as + b, \qquad (27.267)$$

cu a și b constante, atunci prin adăugarea și scăderea termenului $\frac{1}{4}\frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}$ la numitorul fracției din membrul drept al relației (27.262) și a termenului $\frac{1}{2}a\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}$ la numărătorul aceleiași fracții, funcția imagine va mai putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{a}{\varepsilon_i}\left[\frac{s + \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}}{\left(s + \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{4}\frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}\right)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right)\frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{4}\frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}\right)}\right]. \qquad (27.268)$$

Este suficient acum să se introducă notațiile

$$\frac{a}{\varepsilon_i} = C_{i1};\ \frac{a}{\varepsilon_i}\left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right) = C_{i2}$$

Scanned with CamScanner

și

$$s + \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i} = s_1\ ; \quad \sqrt{\left|\frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{4}\frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}\right|} = a_1,$$

pentru ca funcția $\mathscr{X}_i(s)$ să fie adusă la forma

$$\mathscr{X}_i(s) = C_{i1}\frac{s_1}{s_1^2 \pm a_1^2} + C_{i2}\frac{1}{s_1^2 \pm a_1^2} = C_{i1}\,\mathscr{X}_{i1}(s_1) + C_{i2}\,\mathscr{X}_{i2}(s_1), \tag{27.269}$$

cu funcțiile $\mathscr{X}_{i1}(s_1)$ și $\mathscr{X}_{i2}(s_1)$ figurînd în tabelele de transformate Laplace, lor corespunzîndu-le funcțiile original

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i1}(s_1)] = \cos(a_1 t)\ ;\ \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i2}(s_1)] = \frac{1}{a_1}\sin(a_1 t), \tag{27.270}$$

pentru semnul (+) în fața lui a_1^2, respectiv

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i1}(s_1)] = \operatorname{ch}(a_1 t) :\ \mathscr{L}^{-1}\,\mathscr{X}_{i2}(s_1)] = \frac{1}{a_1}\operatorname{sh}(a_1 t) \tag{27.271}$$

pentru semnul (–) în fața lui a_1^2 în expresiile (27.269).

De asemenea, în cazurile cînd funcția imagine $\mathscr{X}_i(s)$ are forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{g_i(s)}{h_i(s)} \tag{27.272}$$

cu $g_i(s)$ și $h_i(s)$ polinoame în s, ultimul de grad n superior gradului primului, atunci ea se descompune într-o sumă de fracții de forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{A_1 + A_2 s}{(s - a_1)(s - a_2)} + \frac{A_3 + A_4 s}{(s - a_3)(s - a_4)} + \ldots + \frac{A_{n-1} + A_n s}{(s - a_{n-1})(s - a_n)} \tag{27.273}$$

dacă n este par și de forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{A_1 + A_2 s}{(s - a_1)(s - a_2)} + \frac{A_3 + A_4 s}{(s - a_3)(s - a_4)} + \ldots + \frac{A_{n-2} + A_{n-1} s + A_n s^2}{(s - a_{n-2})(s - a_{n-1})(s - a_n)}, \tag{27.274}$$

Scanned with CamScanner

dacă n este impar, cu a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ reprezentînd zero-urile polinomului $h_i(s)$-rădăcinile, presupuse distincte, ale ecuaţiei $h_i(s) = 0$ — şi cu coeficienţii A_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, determinaţi impunîndu-se condiţia ca polinomul ce rezultă la numărător după aducerea fracţiilor din membrul drept al relaţiei (27.273), sau (27.274), la acelaşi numitor şi după însumarea lor, adică polinomul

$$g_i^*(s) = (A_1 + A_2 s)(s - a_3)(s - a_4)(s - a_5) \ldots (s - a_{n-1})(s - a_n) + \\ + (A_3 + A_4 s)(s - a_1)(s - a_2)(s - a_5) \ldots (s - a_{n-1})(s - a_n) + \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\ + (A_{n-1} + A_n s)(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3) \ldots (s - a_{n-3})(s - a_{n-2}),$$

scris încă, prin ordonarea termenilor după puterile lui s, sub forma

$$g_i^*(s) = B_{n-1} s^{n-1} + B_{n-2} s^{n-2} + \ldots + B_1 s + B_0 = \sum_{j=0}^{n-1} B_j s^j, \quad (27.275)$$

cu coeficienţii B_j funcţii liniare de coeficienţii A_i —, să fie identic cu polinomul $g_i(s)$; identificarea coeficienţilor puterilor s^j, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, în cei doi membri ai identităţii

$$g_i(s) \equiv g_i^*(s) = \sum_{j=0}^{n-1} B_j s^j \quad (27.276)$$

conduce la un sistem de n ecuaţii algebrice liniare neomogene în necunoscutele A_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, care, rezolvat, va furniza valorile acestor coeficienţi, valori ce vor putea fi introduse apoi în una din relaţiile (27.273) sau (27.274).

Odată efectuată descompunerea în fracţii a funcţiei imagine $\mathscr{X}_i(s)$, funcţia original corespunzătoare ei va fi dată de relaţia

$$\xi_{il} = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_i(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_1 + A_2 s}{(s - a_1)(s - a_2)}\right] + \ldots + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_{n-1} + A_n s}{(s - a_{n-1})(s - a_n)}\right] \quad (27.277)$$

pentru n par şi de relaţia

$$\xi_{il} = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_i(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_1 + A_2 s}{(s - a_1)(s - a_2)}\right] + \\ + \ldots + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_{n-2} + A_{n-1} s + A_n s^2}{(s - a_{n-2})(s - a_{n-1})(s - a_n)}\right] \quad (27.278)$$

Scanned with CamScanner

pentru n impar, cu funcțiile imagine ale termenilor din membrul drept figurind toate în tabelele de transformate Laplace.

În continuare, vor fi folosite cele două metode principale, prezentate mai sus, de determinare a soluției particulare a ecuației diferențiale corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i, la stabilirea ecuației mișcării forțate respective în cazul următoarelor două tipuri de excitații deterministe neperiodice întîlnite destul de des în aplicațiile tehnice:

— *Excitația în treaptă*, caracterizată prin următoarele condiții privind funcția $X_i(t)$:

$$X_i(t) = \begin{cases} X_i^0 = \text{const pentru } t \geqslant 0; \\ 0 \qquad\qquad\quad \text{pentru } t \leqslant 0, \end{cases} \tag{27.279}$$

cu graficul reprezentat în fig. 27.3.

Ecuația diferențială a mișcării corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i va lua în acest caz forma

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = X_i^0 \tag{27.280}$$

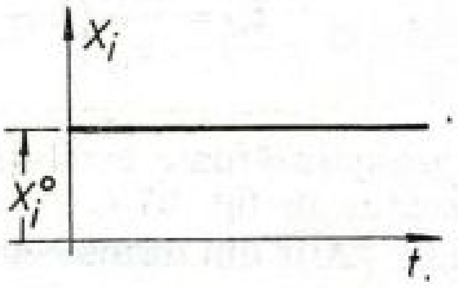


Fig. 27.3.

și, datorită discontinuității excitației în punctul $t=0$, pentru determinarea soluției particulare ξ_{if} nu va putea fi folosit procedeul clasic de stabilire a acestei soluții, care ar fi condus la ecuația

$$\xi_{if} = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}, \tag{27.281}$$

neconcordantă, așa cum se va vedea ulterior, cu realitatea, cel puțin în primele momente ale mișcării.

Într-adevăr, dacă se folosește integrala de tip Duhamel (27.238) pentru determinarea acestei soluții, atunci ea va lua, în condițiile (27.279), forma

$$\xi_{if} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} \int_0^t e^{-\mu_i (t-\tau)} \sin [k_{a_i} (t-\tau)] \, d\tau, \tag{27.282}$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

în care pentru integrala

$$I = \int_0^t e^{-\mu_i(t-\tau)} \sin [k_{a_i} (t - \tau)] \, d\tau, \tag{27.283}$$

efectuată după τ, va putea fi stabilită, folosind integrarea prin părți și o formulă de recurență, expresia

$$I = \frac{k_{a_i}}{\mu_i^2 + k_{a_i}^2} \left\{1 - e^{-\mu_i t} \left[\cos (k_{a_i} t) + \frac{\mu_i}{k_{a_i}} \sin (k_{a_i} t)\right]\right\}. \tag{27.284}$$

În consecință, ținînd seama și de relațiile (27.198), (27.199) și (27.204), care permit să se scrie egalitatea

$$\mu_i^2 + k_{a_i}^2 = \frac{\eta_i^2}{4\varepsilon_i^2} + k_i^2 (1 - \zeta_i^2) = \frac{\eta_i^2}{4\varepsilon_i^2} + \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}\left(1 - \frac{\eta_i^2}{4\varkappa_i \varepsilon_i}\right) = \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i},$$

rezultă următoarea expresie concretă pentru funcția $\xi_{if}(t)$:

$$\boxed{\xi_{if} = \frac{X_i^0}{\varkappa_i} \left\{1 - e^{-\mu_i t}\left[\cos (k_{a_i} t) + \frac{\mu_i}{k_{a_i}} \sin (k_{a_i} t)\right]\right\}}, \tag{27.285}$$

corespunzătoare excitației în treaptă, cu spectrul răspunsului reprezentat în fig. 27.4.

Atît din forma ecuației (27.285), cît și din graficul răspunsului se observă că abia pentru $t \to \infty$ — practic, pentru un moment t_1 suficient de mare (fig. 27.4) — rezultă valoarea

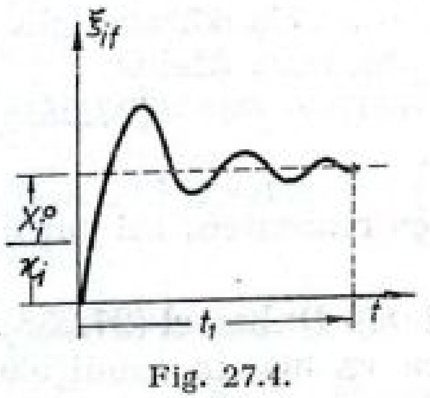


Fig. 27.4.

$$\xi_{if}(t)_{t\to\infty} = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}, \tag{27.286}$$

egală cu valoarea (27.281), care ar fi fost obținută prin aplicarea procedeului clasic de determinare a soluției particulare ξ_{if}.

Soluția (27.285) putea fi obținută și prin metoda transformării Laplace corespunzătoare condițiilor inițiale

$$\xi_i(0) = 0; \; \dot{\xi}_i(0) = 0, \tag{27.287}$$

introducîndu-se, pentru a evidenția caracterul discontinuu al funcției $X_i(t)$ în punctul $t = 0$, *funcția unitate a lui Heaviside*, definită sub forma

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t < 0; \\ 1 & \text{pentru} \quad t > 0, \end{cases} \tag{27.288}$$

a cărei transformată Laplace are expresia

$$\mathscr{L}[h(t)] = \frac{1}{s}, \tag{27.289}$$

adică scriind ecuația (27.280) sub forma

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_{ii} \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = X_i^0 h(t). \tag{27.290}$$

Aplicînd, în condițiile (27.287), transformata Laplace ambilor membri ai ecuației precedente, rezultă egalitatea

$$\mathscr{X}_i(s) \left[\varepsilon_i s^2 + \eta_{ii} s + \varkappa_i \right] = X_i^0 \cdot \frac{1}{s}, \tag{27.291}$$

din care va rezulta funcția imagine $\mathscr{X}_i(s)$:

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i} \frac{1}{s\left(s^2 + \dfrac{\eta_{ii}}{\varepsilon_i} s + \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}\right)}. \tag{27.292}$$

Descompunînd fracția din membrul drept într-o sumă de două fracții, de forma

$$\frac{1}{s\left(s^2 + \dfrac{\eta_{ii}}{\varepsilon_i} s + \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}\right)} \equiv \frac{A_1}{s} + \frac{A_2 + A_3 s}{s^2 + \dfrac{\eta_{ii}}{\varepsilon_i} s + \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_3) s^2 + \left(A_2 + A_1 \dfrac{\eta_{ii}}{\varepsilon_i}\right) s + A_1 \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}}{s\left(s^2 + \dfrac{\eta_{ii}}{\varepsilon_i} s + \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}\right)}, \tag{27.293}$$

rezultă, prin identificarea coeficienților lui s^j, $(j = 0, 1, 2)$, ecuațiile

$$A_1 + A_3 = 0\,;\; A_1 \frac{\eta_i}{\varepsilon_i} + A_2 = 0\,;\; A_1 \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} = 1,$$

cu rădăcinile

$$A_1 = \frac{\varepsilon_i}{\varkappa_i}\,;\; A_2 = -\frac{\eta_i}{\varkappa_i}\,;\; A_3 = -\frac{\varepsilon_i}{\varkappa_i},$$

care, introduse în relația (27.293), vor permite să se mai scrie expresia funcției imagine $\mathscr{X}_i(s)$ sub forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\left[\frac{\varepsilon_i}{\varkappa_i}\frac{1}{s} - \frac{\dfrac{\eta_i}{\varkappa_i} + \dfrac{\varepsilon_i}{\varkappa_i}s}{s^2 + \dfrac{\eta_i}{\varepsilon_i}s + \dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}}\right],$$

sau încă, scoțînd forțat în factor pe $\dfrac{\varepsilon_i}{\varkappa_i}$ și adunînd și scăzînd la numitorul celei de-a doua fracții termenul $\dfrac{1}{4}\dfrac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}$, se mai poate scrie

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}\left[\frac{1}{s} - \frac{\left(s + \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta_i}{\varepsilon_i}}{\left(s + \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta_i}{\varepsilon_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2}\right)}\right]. \quad (27.294)$$

Introducînd, în fine, notațiile

$$a = \frac{1}{2}\frac{\eta_i}{\varepsilon_i}\,;\; b^2 = \frac{\varkappa_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{4}\frac{\eta_i^2}{\varepsilon_i^2} > 0 \qquad (27.295)$$

— ultima inegalitate fiind consecința condiției (27.202) —, expresia (27.294) a funcției imagine $\mathscr{X}_i(s)$ va mai putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{X}_i(s) = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - a\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right] =$$

$$= \frac{X_i^0}{\varkappa_i}\left[\mathscr{X}_{i1}(s) - \mathscr{X}_{i2}(s) - a\,\mathscr{X}_{i3}(s)\right], \qquad (27.296)$$

Scanned with CamScanner

cu toate funcțiile componente $\mathscr{X}_{ij}$, ($j = 1, 2, 3$), figurînd în tabelele de transformate Laplace.

Folosind acum și transformarea Laplace inversă, adică scriind relația

$$\xi_{ij} = \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_i(s)] = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}[\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i1}(s)] - \mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i2}(s)] - a\,\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{i3}(s)], \tag{27.297}$$

se va regăsi, după înlocuirea funcțiilor original $\mathscr{L}^{-1}[\mathscr{X}_{ij}(s)]$, ($j = 1$, $2, 3$), cu expresiile luate din tabele, ecuația (27.285).

Se face mențiunea că luarea în considerație și a altor condiții inițiale decît cele precizate prin relațiile (27.287), ar fi condus la apariția unor termeni analogi celor prezenți în soluția generală (24.220) a ecuației diferențiale omogene (24.209), ei putînd fi considerați înglobați deci în această soluție.

Revenind la ecuația (27.285), se va observa că în condițiile neglijării amortizării ($\mu_i = 0$; $k_{ai} = k_i$), ea va lua forma

$$\boxed{\xi_{ij} = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}[1 - \cos(k_i t)],}\ , \tag{27.298}$$

cu spectrul răspunsului reprezentat în fig. 27.5; după cum se observă, în această situație mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu considerat este o vibrație armonică, de amplitudine $\frac{X_i^0}{\varkappa_i}$ și pulsație k_i, cu elongațiile variind în jurul valorii $\frac{X_i^0}{\varkappa_i}$.

Excitația în undă de șoc. Luînd în discuție acest tip de excitație, se va reaminti faptul că în aceste cazuri răspunsul sistemului vibrant are două faze:

— ***Răspunsul inițial***, reprezentînd mișcarea sistemului vibrant efectuată numai în intervalul de timp cît durează șocul;

— ***răspunsul rezidual***, reprezentînd mișcarea sistemului vibrant efectuată după încetarea excitației în undă de șoc.

Considerînd, în cele ce urmează, numai cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă ($\mu_i = 0$; $k_{a_i} = k_i$) supuse la exci-

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

tații cu unde de șoc în triunghi isoscel, cărora le corespund funcții $X_i(t)$ de forma

$$X_i(t) = \begin{cases} 2X_i^0 \dfrac{t}{\mathcal{T}} & \text{, pentru : } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\mathcal{T}}{2} ; \\ 2X_i^0 \left(1 - \dfrac{t}{\mathcal{T}}\right) & \text{, pentru : } \dfrac{\mathcal{T}}{2} \leqslant t \leqslant \mathcal{T} ; \\ 0 & \text{, pentru : } t \geqslant \mathcal{T}, \end{cases} \tag{27.299}$$

cu graficele reprezentate în fig. 27.6, răspunsul inițial al sistemului vibrant, $\xi_{if_{(m)}}$, va avea, la rîndul său, două faze :

— Faza corespunzătoare primului semiinterval al excitației

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\mathcal{T}}{2},$$

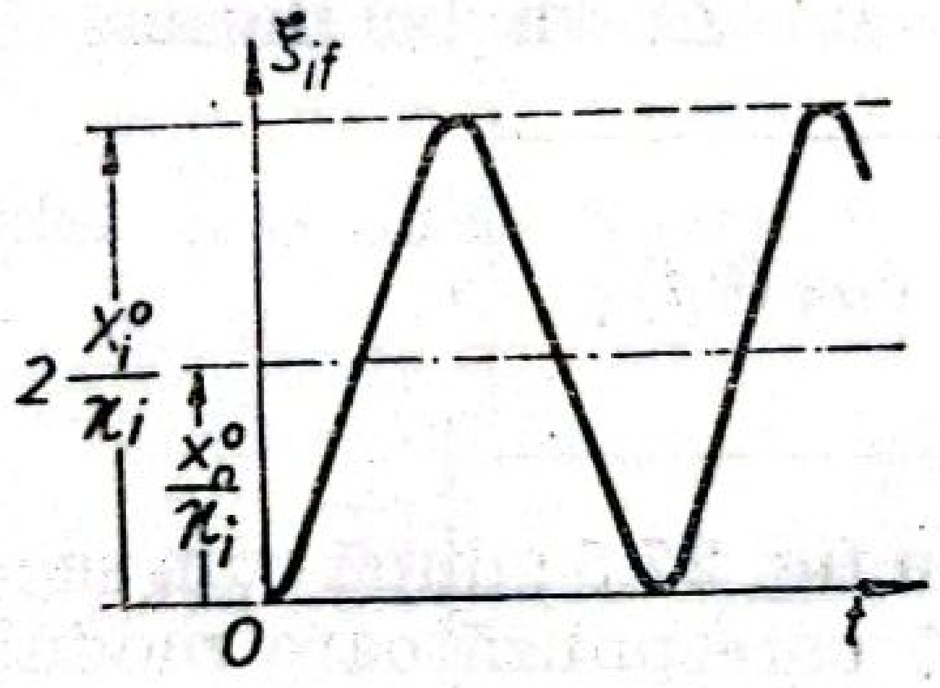


Fig. 27.5.

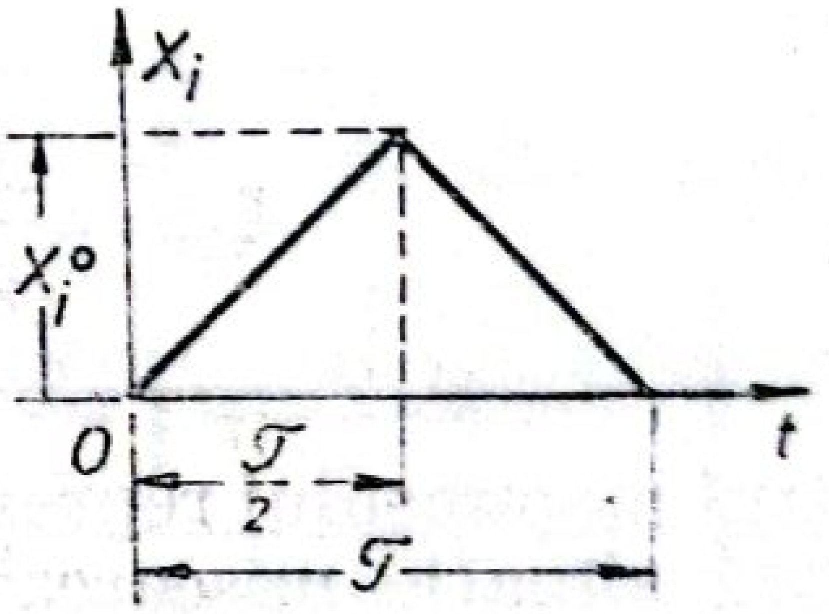


Fig. 27.6.

cînd integrala de tip Duhamel (27.238), aplicabilă și în aceste cazuri, va lua forma particulară ($\mu_i = 0$; $k_{a_i} = k_i$) :

$$\xi_{if_{(in_1)}} = \frac{1}{\varepsilon_i k_i} \int_0^t 2X_i^0 \frac{\tau}{\mathcal{T}} \sin\left[k_i(t - \tau)\right] \mathrm{d}\tau, \tag{27.300}$$

din care va rezulta, prin integrare după variabila τ și reconsiderarea notației (27.197), expresia concretă

$$\boxed{\xi_{if_{(in_1)}} = 2 \frac{X_i^0}{\varkappa_i} \left[\frac{t}{\mathcal{T}} - \frac{1}{k_i \mathcal{T}} \sin(k_i t)\right]} \tag{27.301}$$

Efectuînd, în ultima relație, înlocuirea

$$k_i = \frac{2\pi}{T_i} = 2\pi \frac{\mathcal{T}}{T_i} \cdot \frac{1}{\mathcal{T}}, \tag{27.302}$$

unde T_i este perioada modului propriu de vibrație fără amortizare de ordinul i și introducînd și notația

$$\xi_{i_{st}} = \frac{X_i^0}{\varkappa_i}, \tag{27.303}$$

— $\xi_{i_{st}}$ avînd semnificația fizică de variație statică a coordonatei principale ξ_i la solicitarea X_i^0—, relația (27.301) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\frac{\xi_{if(in_1)}}{\xi_{i_{st}}} = \left[2\frac{t}{\mathcal{T}} - \frac{1}{\pi}\frac{T_i}{\mathcal{T}} \sin\left(2\pi \frac{\mathcal{T}}{T_i} \cdot \frac{t}{\mathcal{T}} \right) \right], \tag{27.304}$$

care va permite reprezentarea grafică a raportului adimensional $\left(\frac{\xi_{if(in_1)}}{\xi_{i_{st}}} \right)$ în funcție de variabila adimensională $\frac{t}{\mathcal{T}}$ sub forma unei porțiuni de curbă OA, plecînd din origine pentru $\frac{t}{\mathcal{T}} = 0$, $(t = 0)$ și trecînd, pentru $\frac{t}{\mathcal{T}} = 0{,}5$, $\left(t = \frac{\mathcal{T}}{2} \right)$, prin punctul A de ordonată

$$\left(\frac{\xi_{if(in_1)}}{\xi_{i_{st}}} \right)_A = 1 - \frac{1}{\pi}\frac{T_i}{\mathcal{T}} \sin\left(\pi \frac{\mathcal{T}}{T_i} \right), \tag{27.305}$$

depinzînd deci de raportul $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$; pentru rapoarte $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$ egale cu un număr întreg, ordonata punctului A va lua valoarea 1, dar forma curbei OA va depinde de valoarea raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, așa cum se observă și în fig. 27.7, în care sînt reprezentate, după lucrarea [6], curbele de răspuns (Γ_{i1}), (Γ_{i2}) și (Γ_{i3}), corespunzătoare valorilor 1, 2 și, respectiv, 5 ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$.

Scanned with CamScanner

— Faza corespunzătoare celui de-al doilea semiinterval al excitației

$$\frac{\mathcal{T}}{2} \leqslant t \leqslant \mathcal{T},$$

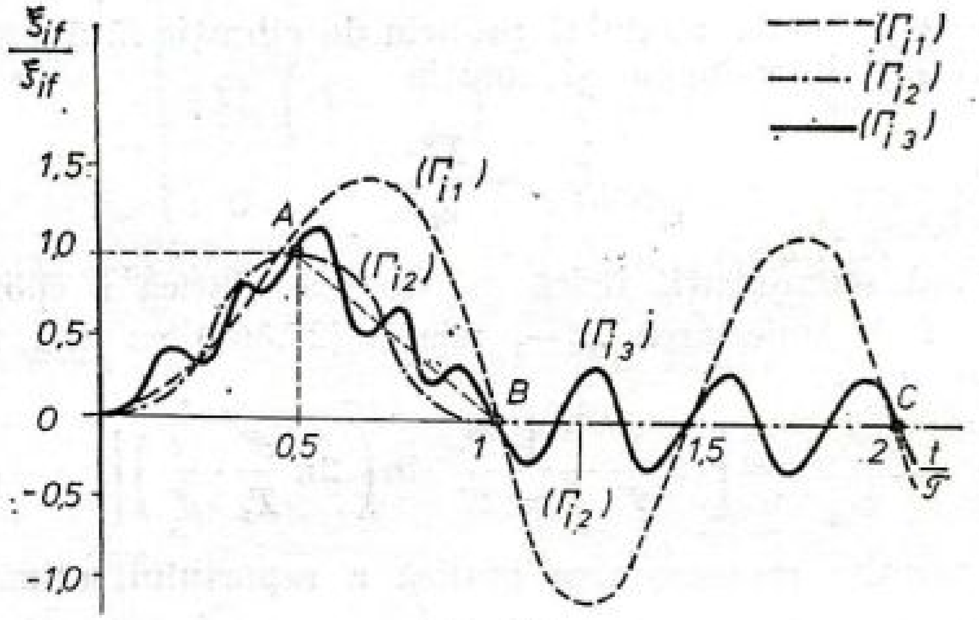


Fig. 27.7.

pentru care soluția $\xi_{if(in_2)}$ va fi dată de o sumă de două integrale de tip Duhamel (27.238) — una pentru primul semi-interval și a doua pentru porțiunea $\left[\frac{\mathcal{T}}{2}, t\right]$ din cel de-al doilea semi-interval — va avea forma

$$\xi_{if(in_2)} = \frac{1}{\varepsilon_i k_i}\left\{\int_0^{\frac{\mathcal{T}}{2}} 2X_i^0 \frac{\tau}{\mathcal{T}} \sin\left[k_i(t-\tau)\right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\mathcal{T}}{2}}^{t} 2X_i^0 \left(1 - \frac{\tau}{\mathcal{T}}\right) \sin\left[k_i(t-\tau)\right] d\tau\right\}, \qquad 27.306)$$

cu următoarea expresie concretă, obținută în urma integrării după variabila τ:

$$\boxed{\xi_{if(in_2)} = \frac{2X_i^0}{k_i \mathcal{T} \varkappa_i}\left[k_i\mathcal{T} - k_i t - \sin(k_i t) + 2\sin\left[k_i\left(t - \frac{\mathcal{T}}{2}\right)\right]\right]}. \qquad (27.307)$$

Folosind și acum relația (27.302) și notația (27.303), ultima relație va mai putea fi adusă la forma

$$\frac{\xi_{if(in_2)}}{\xi_{i_{st}}} = \frac{2}{k_i\mathcal{T}}\left\{k_i\mathcal{T} - k_i\mathcal{T}\frac{t}{\mathcal{T}} - \sin\left(2\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\frac{t}{\mathcal{T}}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\sin\left[2\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\left(\frac{t}{\mathcal{T}} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \quad (27.308)$$

reprezentabilă în planul $\frac{\xi_{if}}{\xi_{i_{st}}}$ 0 $\frac{t}{\mathcal{T}}$ prin o porțiune de curbă AB, plasată în graficele din fig. 27.7 în continuarea porțiunii OA, aceste noi curbe trecînd prin punctul A $\left(0{,}5;\ 1 - \frac{1}{\pi}\frac{T_i}{\mathcal{T}}\sin\left(\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\right)\right)$ pentru $\frac{t}{\mathcal{T}} = 0{,}5$ și prin punctul B, de ordonată

$$\left(\frac{\xi_{if(in_2)}}{\xi_{i_{st}}}\right)_B = \frac{2}{k_i\mathcal{T}}\left[2\sin\left(\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\right) - \sin\left(2\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\right)\right] \quad (27.309)$$

pentru $\frac{t}{\mathcal{T}} = 1$; în cazul valorilor întregi ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, acest ultim punct va fi situat chiar pe axa absciselor.

În ceea ce privește forma porțiunilor de curbe AB, este evident că și aici ea va depinde de valoarea raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, așa cum se observă și din fig. 27.7; examinarea celor trei noi porțiuni de curbe de răspuns permite să se observe că pentru o anumită valoare a raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$ cuprinsă în intervalul $0{,}5 \leqslant \frac{t}{\mathcal{T}} < 1$, raportul $\frac{\xi_{if(in_2)}}{\xi_{i_{st}}}$ prezintă un maxim și că valoarea acestui maxim, ca și cea a abscisei corespunzătoare lui, depinde de raportul $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$.

Reprezentarea grafică a maximului funcției definită prin relația (27.308) în funcție de raportul $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$ conduce la o curbă $(\Gamma_{i_{in}})$,

de forma celei reprezentate prin linie neîntreruptă în fig. 27.8, purtînd numele de *spectrul răspunsului inițial la unda de șoc*, acest spectru prezentînd o succesiune de maxime în apropierea punctelor cu

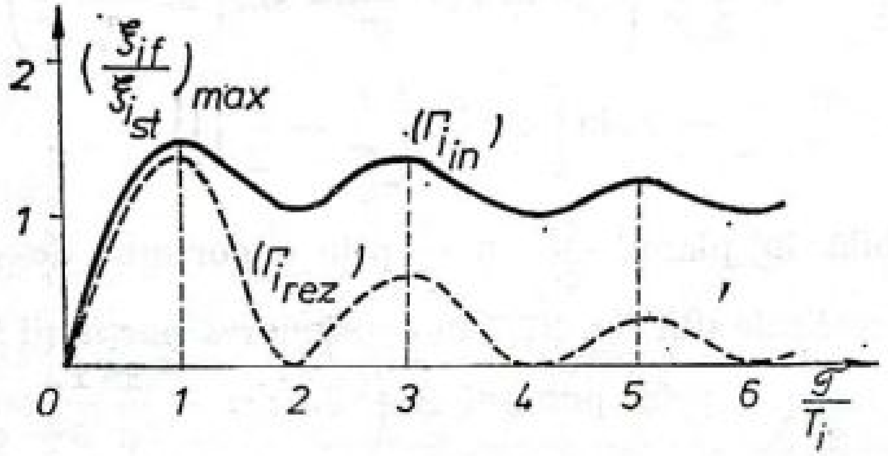


Fig. 27.8.

abscisele egale cu numere întregi impare, cel mai mare dintre ele fiind primul.

Trecînd la stabilirea răspunsului rezidual la excitația în undă de șoc, se precizează că el va fi dat de o sumă de două integrale de tip Duhamel (27.238) — cîte una pentru fiecare semiinterval al excitației —, soluția $\xi_{if_{(rez)}}$ avînd deci forma

$$\xi_{if_{(rez)}} = \frac{1}{\varepsilon_i k_i}\left\{\int_0^{\frac{\mathcal{T}}{2}} 2X_i^0 \frac{\tau}{\mathcal{T}} \sin\,[k_i(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\mathcal{T}}{2}}^{\mathcal{T}} 2X_i^0 \left(1-\frac{\tau}{\mathcal{T}}\right) \sin\,(k_i(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\right\}, \tag{27.310}$$

cu expresia concretă

$$\xi_{if_{(rez)}} = 2\frac{X_i^0}{\varkappa_i}\cdot\frac{1}{k_i\mathcal{T}}\left\{2\sin\left[k_i\left(t-\frac{\mathcal{T}}{2}\right)\right] - \sin\,[k_i(t-\mathcal{T})] - \sin\,(k_i t)\right\}. \tag{27.311}$$

Apelind și de astă dată la inlocuirea (27.302) și la notația (27.303), această expresie va mai putea fi scrisă sub forma

$$\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}} = \frac{1}{\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}} \left\{ 2 \sin\left[2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\left(\frac{t}{\mathscr{T}} - \frac{1}{2}\right)\right] - \sin\left[2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\left(\frac{t}{\mathscr{T}} - 1\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \sin\left[2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i} \frac{t}{\mathscr{T}}\right]\right\}, \qquad (27.312)$$

iar dacă se consideră numai cazul cind raportul $\frac{\mathscr{T}}{T_i}$ este un număr intreg, cind pot fi scrise condițiile

$$\cos\left(2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\right) = 1; \ \sin\left(2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\right) = 0;$$

$$\cos\left(\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\right) = \pm 1; \ \sin\left(\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}\right) = 0$$

— cu semnul superior corespunzind valorilor pare, iar semnul inferior valorilor impare ale raportului $\frac{\mathscr{T}}{T_i}$ — rezultă expresia

$$\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}} = \frac{2}{\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i}} (\pm 1 - 1) \sin\left[2\pi \frac{\mathscr{T}}{T_i} \frac{t}{\mathscr{T}}\right]. \qquad (27.313)$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor $\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}}$ definite prin relațiile (27.312) sau (27.313) va conduce la o porțiune de curbă BC, plasată in continuare a porțiunii AB in graficele din planul $\frac{\xi_i}{\xi_{i_{st}}}\ 0\ \frac{t}{\mathscr{T}}$; pentru valori intregi ale raportului $\frac{\mathscr{T}}{T_i}$, se pot trage următoarele concluzii privind forma acestor curbe, justificate și de graficele din fig. 27.7 :

— Pentru valori intregi pare ale raportului $\frac{\mathscr{T}}{T_i}$ amplitudinile vibrațiilor reziduale devin egale cu zero, adică in aceste cazuri miș-

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

carea sistemului vibrant încetează odată cu excitația: (curba (Γ_{i2}), corespunzătoare valorii $\frac{\mathcal{T}}{T_i} = 2$, în fig. 27.7).

— Pentru valori întregi impare ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, răspunsul rezidual este o vibrație armonică, definită prin ecuația

$$\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}} = -\frac{4}{\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}} \sin\left(2\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}\frac{t}{\mathcal{T}}\right) \tag{27.314}$$

(curbele (Γ_{i1}) și (Γ_{i3}), corespunzătoare valorilor $\frac{\mathcal{T}}{T_i} = 1$, respectiv $\frac{\mathcal{T}}{T_i} = 5$, în fig. 27.7).

Pentru valori oarecari ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, răspunsul rezidual, determinat prin relația (27.312), al sistemului vibrant continuă să fie o vibrație armonică ca urmare a faptului că, așa cum s-a arătat în cinematica vibrațiilor, el rezultă din suprapunerea a trei vibrații armonice sincrone, cu amplitudinea depinzînd de valoarea raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$; reprezentarea grafică a acestei amplitudini în funcție de raportul $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$ conduce la o curbă $(\Gamma_{i_{rez}})$, de forma celei reprezentate prin linie întreruptă în graficul din fig. 27.8, punctele de contact cu axa absciselor ale acestei curbe corespunzînd valorilor întregi pare ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, pentru care nu există răspuns rezidual, iar maximele graficului, avînd valorile

$$\left(\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}}\right)_{max} = \frac{4}{\pi\frac{\mathcal{T}}{T_i}}, \tag{27.315}$$

corespund valorilor întregi impare ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$.

Scanned with CamScanner

Curba $(\Gamma_{i_{rez}})$ care poartă numele de *spectrul răspunsului rezidual la excitația în undă de șoc* al sistemului vibrant, permite să se determine amplitudinea vibrației reziduale la excitația în undă de șoc a unui sistem vibrant dat — deci pentru o valoare T_i dată —, atunci cînd se cunoaște durata $\mathcal{T}$ a șocului, această amplitudine fiind reprezentată prin ordonata punctului de pe curba $(\Gamma_{i_{rez}})$ de abscisă egală cu valoarea raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$, (fig. 27.8).

Relația (27.315) mai permite să se tragă concluzia că pentru valori

$$\frac{\mathcal{T}}{T_i} > 1{,}2$$

ale raportului $\frac{\mathcal{T}}{T_i}$ rezultă condiția

$$\left(\frac{\xi_{if(rez)}}{\xi_{i_{st}}}\right)_{max} < 1,$$

adică amplitudinea vibrației reziduale $\xi_{ij(rez)}$ este inferioară valorii $\xi_{i_{st}}$.

b) Mișcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații periodice.

În majoritatea situațiilor întîlnite în aplicațiile practice, excitațiile periodice sînt excitații poliarmonice sincrone sinfazice, cu forțele generalizate avînd expresiile (25.23), cărora le vor corespunde deci următoarele expresii pentru funcțiile $X_i(t)$:

$$X_i = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ji} \sum_{\lambda=1}^{l} Q^0_{j\lambda} \sin(\lambda p t) = \sum_{\lambda=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{r} \tau_{ji} Q^0_{j\lambda}\right) \sin(\lambda p t),$$

sau încă, introducînd notațiile

$$X^0_{i\lambda} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ji} Q^0_{j\lambda}, \qquad (27.316)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

mai rezultă

$$X_i = \sum_{\lambda=1}^{l} X_{i\lambda}^0 \sin(\lambda p t), \tag{27.317}$$

reeşind de aici că în condiţiile precizate şi excitaţiile $X_i(t)$ sînt tot poliarmonice sincrone sinfazice.

În consecinţă, ecuaţia diferenţială corespunzătoare modului propriu de ordinul i a sistemului vibrant va lua acum forma

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = \sum_{\lambda=1}^{l} X_{i\lambda}^0 \sin(\lambda p t), \tag{27.318}$$

căreia îi va corespunde soluţia particulară

$$\xi_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} [M_{i_\lambda} \cos(\lambda p t) + N_{i_\lambda} \sin(\lambda p t)], \tag{27.319}$$

cu

$$\dot{\xi}_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \lambda p [-M_{i_\lambda} \sin(\lambda p t) + N_{i_\lambda} \cos(\lambda p t)]$$

şi

$$\ddot{\xi}_{if} = -\sum_{\lambda=1}^{l} \lambda^2 p^2 [M_{i_\lambda} \cos(\lambda p t) + N_{i_\lambda} \sin \lambda p t)].$$

Impunînd condiţia ca această soluţie să verifice ecuaţia diferenţială (27. 318), se obţine identitatea

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \Big\{[(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2) M_{i_\lambda} + \eta_i p_\lambda N_{i_\lambda}) \cos(\lambda p t) + [-\eta_i p_\lambda M_{i_\lambda} +$$

$$+ (\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2) N_{i_\lambda}] \sin(\lambda p t) \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} X_{i\lambda}^0 \sin(\lambda p t),$$

unde prin p_λ s-a notat pulsaţia armonicii de ordinul λ a excitaţiei, adică

$$p_\lambda = \lambda p, \tag{27.320}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

Scanned with CamScanner

rezultînd astfel, prin identificarea coeficienților funcțiilor trigonometrice din cei doi membri, sistemele de ecuații

$$(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)\, M_{i_\lambda} + \eta_i p_\lambda N_{i_\lambda} = 0; \qquad (27.321)$$

$$-\eta_i p_\lambda M_{i_\lambda} + (\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)\, N_{i_\lambda} = X_{i\lambda}^0,$$

cu rădăcinile

$$M_{i_\lambda} = -\frac{\eta_i p_\lambda X_{i\lambda}^0}{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2}; \quad N_{i_\lambda} = \frac{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)\, X_{i\lambda}^0}{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2}. \qquad (27.322)$$

Introducînd aceste valori în ecuația (24.352), aceasta din urmă va lua forma determinată

$$\xi_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{X_{i\lambda}^0}{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2} [-\eta_i p_\lambda \cos(\lambda p t) +$$

$$+ (\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2) \sin(\lambda p t)],$$

sau încă, scoțînd pe $(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)$ forțat în factor și introducînd notația

$$\operatorname{tg} \beta_{i\lambda} = \frac{\eta_i p_\lambda}{\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2} \qquad (27.323)$$

cu

$$\frac{\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2}{\cos \beta_{i\lambda}} = \sqrt{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2},$$

mai rezultă

$$\boxed{\xi_{if} = \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{X_{i\lambda}^0}{\sqrt{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2}} \sin(\lambda p t - \beta_{i\lambda}).} \qquad (27.324)$$

Relația precedentă arată că în condițiile precizate pentru excitație, mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i rezultă din suprapunerea unui număr de l vibrații armonice, de pulsații egale cu pulsațiile armonicelor excitației, cu amplitudinile avînd valorile

$$\boxed{\mathscr{A}_{i_\lambda} = \frac{X_{i\lambda}^0}{\sqrt{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)^2 + \eta_i^2 p_\lambda^2}} = \mathscr{A}_{i_\lambda}(p_\lambda)} \qquad (27.325)$$

Scanned with CamScanner

și cu fazele inițiale date de relațiile

$$\boxed{\beta_{i_\lambda} = \text{arc tg}\left[\frac{\eta_i p_\lambda}{\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda}\right] = \beta_{i\lambda}(p_\lambda)} . \tag{27.326}$$

În condițiile neglijării amortizării ($\eta_i = 0$; $\beta_{i_\lambda} = \text{arc tg}\,(0) = 0$), relația (27.324) ia forma simplificată

$$\boxed{\xi_{it} = \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{X_{i\lambda}^0}{(\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2)} \sin(\lambda p t)} , \tag{27.327}$$

evidențiind faptul că în această situație armonicele mișcării forțate sînt în fază cu excitația și că amplitudinile diverselor armonici ale mișcării forțate au acum valorile

$$\boxed{\mathscr{A}_{i_\lambda} = \frac{X_{i\lambda}^0}{\varkappa_i - \varepsilon_i p_\lambda^2} = A_{i_\lambda}(p_\lambda)} . \tag{27.328}$$

Dacă excitațiile $X_i(t)$ sînt chiar armonice sincrone sinfazice ($\lambda = l = 1$; $X_{i\lambda}^0 = X_{i1}^0 = X_i^0$; $\beta_{i_\lambda} = \beta_{i_1} = \beta_i$), adică

$$X_i(t) = X_i^0 \sin(pt), \tag{27.329}$$

atunci soluția (27.324) se reduce la un singur termen

$$\boxed{\xi_{it} = \frac{X_i^0}{\sqrt{(\varkappa_i - \varepsilon_i p^2)^2 + \eta_i^2 p^2}} \sin(pt - \beta_i),} , \tag{27.330}$$

rezultînd de aici că mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i este, în acest caz, o vibrație armonică, de pulsație egală cu pulsația excitației, de amplitudine

$$\boxed{\mathscr{A}_i = \frac{X_i^0}{\sqrt{(\varkappa_i - \varepsilon_i p^2)^2 + \eta_i^2 p^2}} = \mathscr{A}_i(p)} \tag{27.331}$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

și defazată în urmă față de excitație cu faza inițială

$$\beta_i = \text{arc tg}\left(\frac{\eta_i p}{\varkappa_i - \varepsilon_i p^2}\right) = \beta_i(p) \cdot \qquad (27.332)$$

Odată determinate funcțiile $\xi_{ij}(t)$, vor putea fi scrise acum și ecuațiile finite ale mișcării forțate a sistemului vibrant în parametrii lagrangeieni obișnuiți, acestea avînd, în baza relațiilor (27.191), formele

$$w_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ij}\xi_{jj} = \sum_{\substack{j=1 \\ (i=1,2,\dots,r)}}^{r} \sum_{\lambda=1}^{l} \tau_{ji}\mathscr{A}_{j\lambda} \sin(\lambda p t - \beta_{j\lambda}) \qquad (27.333)$$

în cazul excitațiilor poliarmonice sincrone sinfazice și formele

$$w_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ji}\xi_{jj} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{ji}\mathscr{A}_j \sin(pt - \beta_j) \qquad (27.334)$$

în cazul excitațiilor armonice sincrone sinfazice.

Relația (27.334) arată că în condițiile precizate pentru excitație, mișcarea forțată a sistemului vibrant rezultă din suprapunerea unui număr de r moduri de distorsiune.

Dacă excitația corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul j este un mod principal de excitație, adică sînt satisfăcute condițiile

$$X_i \equiv 0 \qquad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, r;$$
$$X_j = X_j^0 \sin(pt), \qquad (27.335)$$

atunci rezultă consecințele

$$\xi_{ij} \equiv 0 \text{ pentru } i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, r;$$
$$\xi_{jj} = \frac{X_j^0}{\sqrt{(\varkappa_j - \varepsilon_j p^2)^2 + \eta_j^2 p^2}} \sin(pt - \beta_j),$$

Scanned with CamScanner

în baza cărora ecuațiile (27.334) vor lua formele

$$\boxed{w_{ij} = \tau_{ji}\xi_{jj} = \tau_{ji}\,\mathscr{A}_j \sin(pt - \beta_j),} \tag{27.336}$$

scoțînd în evidență faptul că în aceste condițiuni mișcarea forțată a sistemului vibrant coincide chiar cu modul propriu de vibrație de ordinul j.

Revenind la expresiile (27.325) și (27.326) ale amplitudinii și fazei inițiale ale armonicii de ordinul λ din mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i, se va observa că prin scoaterea forțată în factor a lui ε_i la numitorii expresiilor și prin reconsiderarea notațiilor (27.197) și (27.199), mărimile $\mathscr{A}_{i\lambda}(p_\lambda)$ și $\beta_{i\lambda}(p_\lambda)$ vor mai putea fi scrise sub forma

$$\mathscr{A}_{i\lambda} = \frac{X^0_{i\lambda}}{\varepsilon_i}\,\frac{1}{\sqrt{(k_i^2 - p_\lambda^2)^2 + 4\mu_i^2 p_\lambda^2}}, \tag{27.337}$$

respectiv

$$\beta_{i\lambda} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\mu_i\,k_\lambda}{(k_i^2 - p_\lambda^2)}\right). \tag{27.338}$$

Scoțînd, în continuare, și pe k_i^2 forțat în factor la numitorii expresiilor precedente și observînd că în baza relațiilor (27.198) și (27.199) pot fi scrise egalitățile

$$\frac{1}{\varepsilon_i k_i^2} = \frac{1}{\varepsilon_i}\cdot\frac{\varepsilon_i}{\varkappa_i} = \frac{1}{\varkappa_i}; \tag{27.339}$$

$$\frac{2\mu_i}{k_i} = \frac{\dfrac{\eta_i}{\varepsilon_i}}{k_i} = 2\,\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i\,k_i} = 2\,\frac{\eta_i}{2\varepsilon_i\sqrt{\dfrac{\varkappa_i}{\varepsilon_i}}} = 2\,\frac{\eta_i}{\sqrt{4\varepsilon_i\,\varkappa_i}} = 2\,\zeta_i,$$

vor mai rezulta următoarele expresii pentru amplitudinile $\mathscr{A}_{i\lambda}$ și fazele inițiale $\beta_{i\lambda}$:

$$\mathscr{A}_{i\lambda} = X^0_{i\lambda}\frac{1}{\varkappa_i}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p_\lambda^2}{k_i^2}\right)^2 + \left(2\zeta_i\dfrac{p_\lambda}{k_i}\right)^2}} = X^0_{i\lambda}\,H_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right), \tag{27.340}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

respectiv

$$\beta_{i\lambda} = \text{arc tg}\left(\frac{2\,\zeta_i \dfrac{p_\lambda}{k_i}}{1 - \dfrac{p_\lambda^2}{k_i^\lambda}}\right) = \beta_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right), \tag{27.341}$$

raportul adimensional $\frac{p_\lambda}{k_i}$ purtînd numele de *pulsație relativă a armonicii de ordinul λ a excitației în raport cu pulsația proprie de ordinul i a sistemului vibrant*, mărimea

$$H_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right) = \frac{1}{\varkappa_i}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p_\lambda^2}{k_i^2}\right)^2 + \left(2\zeta_i\dfrac{p_\lambda}{k_i}\right)^2}} = \frac{1}{\varkappa_i}\cdot\alpha_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right) \tag{27.342}$$

fiind numită *caracteristică amplitudine-pulsație a sistemului vibrant corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i*, iar mărimea $\beta_{i\lambda}$ fiind numită *caracteristică fază— pulsație a sistemului vibrant corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i și armonicii de ordinul λ a excitației.*

Raportul adminesional

$$\alpha_{i\lambda} = H_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)\varkappa_i = \frac{\mathscr{A}_{i\lambda}}{X_{i\lambda}^0}\varkappa_i = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p_\lambda^2}{k_i^2}\right)^2 + \left(2\zeta_i\dfrac{p_\lambda}{k_i}\right)^2}} = \alpha_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right) \tag{27.343}$$

este numit *factor de amplificare a amplitudinii răspunsului corespunzător armonicii de ordinul λ*, el fiind legat de amplitudinea armonicii respective prin relația

$$\mathscr{A}_{i\lambda} = \frac{X_{i\lambda}^0}{\varkappa_i}\alpha_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right). \tag{27.344}$$

După cum se observă, acest factor de amplificare depinde de pulsația relativă $\frac{p_\lambda}{k_i}$, reprezentarea grafică a acestei dependențe conducînd la o curbă $(\Gamma_{\alpha\,\lambda})$, de forma celei reprezentate în fig. 27.9,

Scanned with CamScanner

CamScanner

prezentînd un maxim pentru o anumită valoare a pulsației relative $\frac{p_\lambda}{k_i}$, valoarea $\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}$ fiind numită *pulsație relativă critică a armonicii de ordinul* λ *a excitației*.

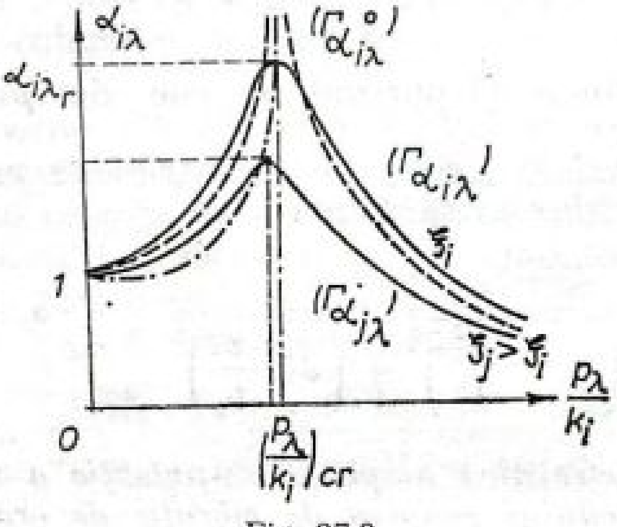


Fig. 27.9

Observînd că acest maxim al funcției $\alpha_{i\lambda}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)$ coincide cu minimul funcției

$$f\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)=\left(1-\frac{p_\lambda^2}{k_i^2}\right)^2+4\,\zeta_i^2\frac{p_\lambda^2}{k_i^2}, \tag{27.345}$$

care figurează sub radicalul din expresia (27.343) a lui $\alpha_{i\lambda}$, se poate trage concluzia că valoarea critică $\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}$ a pulsației relative a armonicii de ordinul λ a excitației va rezulta din ecuația

$$\left(\frac{\mathrm{d}f\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)}\right)_{\frac{p_\lambda}{k_i}=\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}}=0,$$

adică

$$4\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}\left[2\zeta_i^2-1+\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}^2\right]=0, \tag{27.346}$$

Scanned with CamScanner

cu singura rădăcină acceptabilă din punct de vedere fizic avînd valoarea

$$\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr} = \sqrt{1 - 2\,\zeta_i^2}. \qquad (27.347)$$

Pentru această valoare a pulsației relative $\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)$, factorul de amplificare $\alpha_{i\lambda}$ ia valoarea

$$\alpha_{i\lambda_{max}} = \alpha_{i\lambda}\left[\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr}\right] = \frac{1}{2\zeta_i\sqrt{1-\zeta_i^2}}, \qquad (27.348)$$

care, pentru amortizări subritice foarte mici ($\zeta_i << 1$,) poate fi aproximată cu valoarea

$$\alpha_{i\lambda_{max}} \approx \frac{1}{2\zeta_i}. \qquad (27.349)$$

Acest fenomen, în care factorul de amplificare a amplitudinii — și deci și însăși amplitudinea — ia valoarea maximă pentru valoarea critică a pulsației relative a armonicii de ordinul λ a excitației, poartă numele de *rezonanță în amplitudine de ordinul* λ, $\alpha_{i\lambda_{max}} = \alpha_{i\lambda_r}$ purtînd numele de *amplitudine la rezonanță a armonicii de ordinul* λ *a mișcării forțate corespunzătoare modului propriu de ordinul* i, iar raprtul $\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_{cr} = \left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_r$ numindu-se și el-*pulsație relativă de rezonanță în amplitudine de ordinul* λ.

Curba $(\Gamma_{\alpha_{i\lambda}})$ este numită *curbă de răspuns amplitudine-pulsație*, sau încă, datorită proporționalității dintre pulsație și frecvență, *curbă de răspuns amplitudine-frecvență*, amplitudinea fiind, așa cum rezultă din relația (27.344), proporțională cu factorul de amplificare $\alpha_{i\lambda}$.

Ținînd seama de semnificația lui $p_\lambda (p_\lambda = \lambda p)$, rezultă că rezonanța în amplitudine de ordinul λ se va putea produce atunci cînd pulsația fundamentală a excitației va avea valoarea

$$p = \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - 2\,\zeta_i^2}\, k_i, \qquad (27.350)$$

cu λ luînd una din valorile 1, 2, ..., l și cu ζ_i satisfăcînd condițiile

$$0 \leqslant \zeta_i < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707, \tag{27.351}$$

justificate de caracterul de mărime reală pozitivă al pulsației fundamentale.

Relațiile (27.347) și (27.348) permit să se facă următoarele observații în legătură cu fenomentul de rezonanță de un ordin oarecare:

— În condițiile neglijării amortizării ($\zeta_i = 0$), pulsația relativă de rezonanță în amplitudine are valoarea egală cu unitatea, iar factorul de amplificare a amplitudinii la rezonanță a armonicii pentru care s-a realizat rezonanța devine infinit, curba de rezonanță fiind reprezentată prin curba ($\Gamma^0_{\alpha_{i\lambda}}$), trasată prin linii întrerupte în fig. 27.9.

— Cînd amortizarea crește, ζ_i apropiindu-se de valorea $\frac{1}{\sqrt{2}}$, maximul curbei de rezonanță se micșorează sensibil, deplasîndu-se în același timp spre stînga valorii $\frac{p_\lambda}{k_i} = 1$ (curbele ($\Gamma_{\alpha_{i\lambda}}$) și ($\Gamma_{\alpha_{i\lambda}}$), corespunzătoare valorilor ζ_i și $\zeta_j > \zeta_i$, în fig. 27.9).

Trecînd la reprezentarea grafică a dependenței fazei inițiale $\beta_{i\lambda}$ de pulsația relativă $\frac{p_\lambda}{k_i}$, efectuată în baza relației (27.341), se obține o curbă de forma celei din fig. 27.10, remarcîndu-se că pentru toate valorile posibile ale raportului de amortizare $\zeta_i < 1$, curbele, (Γ_{β_i}) corespunzătoare lor vor trece, toate, prin același punct de inflexiune $I\left(1; \frac{1}{2}\pi\right)$, punct care ar corespunde cazului cînd pulsația armonicii de ordinul λ a excitației ar coincide cu pulsația proprie fără amortizare a modului propriu de vibrație considerat ($p_\lambda = \lambda p = k_i$).

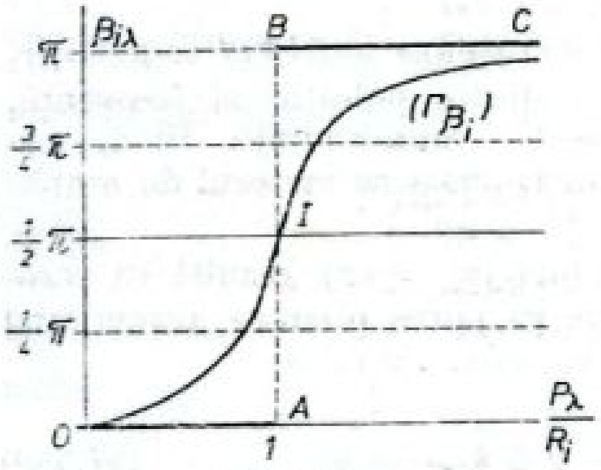


Fig. 27.10.

Valorii $\frac{p\lambda}{k_i} = 1$ îi corespunde următoarea valoare particulară a factorului de amplificare a amplitudinii

$$\alpha_{i\lambda}(1) = \frac{1}{2\zeta_i} = \alpha_{i\lambda_r} \tag{27.352}$$

— egală deci cu valoarea corespunzătoare rezonanței în amplitudine de ordinul λ pentru amortizări slabe — și deci următoarea formă a armonicii de ordinul λ a mișcării forțate pentru modul propriu de vibrație de ordinul i:

$$\zeta_{if(\lambda)} = \frac{X^0_{i\lambda}}{\varkappa_i}\,\alpha_{i\lambda_r} \sin\left(\lambda pt - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{X^0_{i\lambda}}{\varkappa_i}\,\alpha_{i\lambda_r} \sin\left(k_i\, t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{27.353}$$

Ultima relație scoate în evidență faptul că în această situație armonica de ordinul λ a răspunsului ζ_{if} este defazată în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ radiani față de armonica de același ordin a excitației.

Examinarea relației (27.354), prin care se determină faza inițială $\beta_{i\lambda}$, mai permite să se observe că la neglijarea amortizării ($\zeta_i \to 0$; $\beta_{i\lambda} \to 0$ sau $\beta_{i\lambda} \to \pi$), vor rezulta condițiile

$$\zeta_i \to 0: \begin{cases} \beta_{\lambda} \to 0 & \text{pentru} \quad \frac{p\lambda}{k_i} < 1; \\ \beta_{i\lambda} \to \pi & \text{pentru} \quad \frac{p\lambda}{k_i} > 1, \end{cases} \tag{27.354}$$

rezultînd de aici că în această situație curba (Γ_{β_i}) se reduce la segmentele de dreaptă OA pentru $\frac{p\lambda}{k_i} \leqslant 1$ și BC pentru $\frac{p\lambda}{k_i} > 1$, (fig. 27.10).

Acest fenomen, în care pentru valoarea $\frac{p\lambda}{k_i} = 1$ armonica de ordinul λ a răspunsului ζ_{if} se găsește în cuadratură $\left(\text{este defazată de } \frac{\pi}{2} \text{ rad.}\right)$ față de armonica de același ordin a

excitației poliarmonice, este numit *rezonanță în fază de ordinul* λ, iar raportul

$$\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_\beta = 1 \qquad (27.355)$$

poartă numele de *pulsație relativă de rezonanță în fază de ordinul* λ.

Curba (Γ_{β_i}), care scoate în evidență comportarea fazei inițiale în jurul valorii de rezonanță a ei, poartă numele de *curbă de răspuns fază-pulsație*, sau *curbă de răspuns fază-frecvență*, (ca urmare a egalității raportului pulsațiilor cu raportul frecvențelor).

Din relația (27.347) se mai poate trage concluzia că pentru amortizări subcritice foarte mici ($\zeta_i \ll 1$), pulsația relativă de rezonanță in amplitudine ia valoarea

$$\left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_r \approx 1 = \left(\frac{p_\lambda}{k_i}\right)_\beta , \qquad (27.356)$$

adică devine egală cu pulsația relativă de rezonanță în fază, pulsația fundamentală a excitației trebuind să aibă, în acest caz, valoarea

$$p = \frac{1}{\lambda} k_i, \qquad (27.357)$$

Informațiile furnizate de curbele de răspuns amplitudine-frecvență și fază-frecvență pot fi obținute și printr-o reprezentare grafică unică, a cărei construcție se bazează pe folosirea metodei soluției particulare complexe a ecuației diferențiale (27.318), metodă prezentată, sub forma matriceală, la integrarea ecuațiilor diferențiale liniare în coordonate lagrangeiene obișnnite și care va fi aplicată, în continuare, și la o ecuație diferențială unică, descriind un mod propriu de vibrație.

Pentru a simplifica expunerea, excitațiile $X_i(t)$ din ecuațiile (27.318) vor fi considerate pur armonice și în fază, adică de forma

$$X_i(t) = X_i^0 \sin (pt), \qquad (27.358)$$

concluziile putind fi extinse însă, cu ușurință, și la cazul excitațiilor poliarmonice; de asemenea, în scopul simplificării scrierii, se va renunța și la indicele de ordine i al ecuațiilor în coordonate principale, subințelegindu-se însă că ecuația

$$\varepsilon\ddot{\xi} + \eta\dot{\xi} + \varkappa\xi = X^0 \sin (pt) \qquad (27.359)$$

Scanned with CamScanner

va putea reprezenta pe oricare dintre cele r ecuații diferențiale în coordonate principale ale unui sistem vibrant liniar.

Înmulțind ecuația (27.359) cu numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$ și adunînd-o cu ecuația

$$\varepsilon\ddot{\xi}^* + \eta\dot{\xi}^* + \varkappa\xi^* = X^0\cos(pt),$$

care ar modela matematic mișcarea corespunzătoare aceluiași mod propriu de vibrație în condițiile unei excitații defazate de $\frac{\pi}{2}$ radiani față de situația reală și introducînd variabila complexă

$$\zeta = \xi^* + i\xi,$$

cu

$$\dot{\zeta} = \dot{\xi}^* + i\dot{\xi}\,;\ \ddot{\zeta} = \ddot{\xi}^* + i\ddot{\xi},$$

rezultă ecuația diferențială

$$\varepsilon\ddot{\zeta} + \eta\dot{\zeta} + \varkappa\zeta = X^0\,e^{ipt}, \tag{27.359}$$

avînd soluția particulară de forma

$$\zeta_f = \bar{A}\,e^{ipt},$$

cu

$$\dot{\zeta}_f = ip\bar{A}e^{ipt}\ ;\ \ddot{\zeta}_f = -p^2\bar{A}e^{ipt}, \tag{27.360}$$

unde $\bar{A}$ este o constantă complexă, ce va putea fi determinată impunîndu-se condiția ca soluția (27.360) să verifice ecuația (27.359).

Rezultă astfel identitatea

$$[(\varkappa - \varepsilon p^2) + ip\eta]\,\bar{A}e^{ipt} \equiv X^0 e^{ipt},$$

avînd drept consecință ecuația

$$[(\varkappa - \varepsilon p^2) + ip\eta]\,\bar{A} = X^0,$$

cu rădăcina

$$\bar{A} = \frac{X^0}{(\varkappa - \varepsilon p^2) + i\eta p} = X^0\,\frac{\varkappa - \varepsilon p^2}{(\varkappa - \varepsilon p^2) + \eta^2 p^2}\left[1 - i\,\frac{\eta p}{\varkappa - \varepsilon p^2}\right]. \tag{27.361}$$

Introducînd și acum notațiile (27.338) și (27.341), adică scriind

$$\frac{\eta p}{\varkappa - \varepsilon p^2} = \frac{2\mu p}{k^2 - p^2} = \frac{2\zeta\frac{p}{k}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \operatorname{tg}\beta$$

și observînd că în baza relației (27.343) pot fi făcute înlocuirile

$$\frac{\varkappa - \varepsilon p^2}{(\varkappa - \varepsilon p^2)^2 + \eta^2 p^2}\cdot\frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{(\varkappa - \varepsilon p^2)^2 + \eta^2 p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + (2\mu p)^2}} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{p}{k}\right)^2}} =$$

$$= H\left(\frac{p}{k}\right) = \frac{1}{\varkappa}\,\alpha\left(\frac{p}{k}\right),$$

se va mai putea scrie mărimea $\bar{A}$ sub forma exponențială

$$\bar{A} = X^0\, H\left(\frac{p}{k}\right) e^{-i\beta\left(\frac{p}{k}\right)}. \qquad (27.362)$$

Funcția complexă

$$\bar{H}\left(\frac{p}{k}\right) = H\left(\frac{p}{k}\right) e^{-i\beta\left(\frac{p}{k}\right)} = \frac{1}{\varkappa}\,\alpha\left(\frac{p}{k}\right) e^{-i\beta\left(\frac{p}{k}\right)} \qquad (27.363)$$

poartă numele de *funcție complexă de răspuns în frecvență*, sau încă cel de *caracteristică fază-amplitudine*, iar funcția complexă

$$\bar{\alpha}\left(\frac{p}{k}\right) = \alpha\left(\frac{p}{k}\right) e^{-i\beta\left(\frac{p}{k}\right)} \qquad (27.364)$$

este numită *factorul complex de amplificare a amplitudinii*, corespunzătoare modului propriu de vibrație considerat.

În baza notațiilor precedente, soluția particulară (27.360) va lua una din formele de mai jos

$$\zeta_r = X^0\, \bar{H}\left(\frac{p}{k}\right) e^{ipt} = \frac{X^0}{\varkappa}\,\bar{\alpha}\left(\frac{p}{k}\right) e^{ipt}, \qquad (27.365)$$

sau

$$\zeta_f = X^0 H\left(\frac{p}{k}\right) e^{i(pt-\beta)} = \frac{X^0}{\varkappa}\alpha\left(\frac{p}{k}\right) e^{i(pt-\beta)}, \tag{27.366}$$

iar mișcarea forțată corespunzătoare modului propriu considerat va fi descrisă prin ecuația finită

$$\xi_f = \operatorname{Im}\zeta_f = X^0 H\left(\frac{p}{k}\right)\sin(pt-\beta) = \frac{X^0}{\eta}\alpha\left(\frac{p}{k}\right)\sin(pt-\beta), \tag{27.367}$$

a cărei identitate cu ecuația (27.324) poate fi dovedită cu ajutorul relațiilor (27.343) și a celor folosite pentru scrierea mărimii $\bar{A}$ sub forma (27.362) sau (27.363), (cu $l = 1$ în ecuațiile (27.324).

Revenind la expresia (27.364) a factorului complex de amplificare a amplitudinii și introducînd notația

$$y = \frac{p}{k} \tag{27.368}$$

pentru pulsația relativă $\frac{p}{k}$, se va mai putea scrie această expresie sub forma

$$\bar{\alpha}(y) = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2}} e^{-i\beta} = \alpha(y)\, e^{-i\beta}, \tag{27.369}$$

cu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\zeta y}{1-y^2}, \tag{27.370}$$

sau încă, revenind la exprimarea carteziană a numerelor complexe, cu ajutorul înlocuirilor

$$\cos\beta = \frac{1-y^2}{\sqrt{(1-y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2}};\ \sin\beta = \frac{2\zeta y}{\sqrt{(1-y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2}},$$

Scanned with CamScanner

sub forma

$$\overline{\alpha}(y) = \frac{1 - y^2}{(1 - y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2} - i\,\frac{2\zeta y}{(1 - y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2} \cdot \quad (27.371)$$

Introducînd și notațiile

$$R(y) = \operatorname{Re}\overline{\alpha}(y) = \frac{1 - y^2}{(1 - y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2}\ ;\ I(y) = \operatorname{Im}\overline{\alpha}(y) = -$$

$$- \frac{2\zeta y}{(1 - y^2)^2 + 4\zeta^2 y^2}, \quad (27.372)$$

expresia (27.371) a factorului $\overline{\alpha}(y)$ va mai căpăta forma

$$\overline{\alpha}(y) = R(y) + i\,I(y). \quad (27.373)$$

Fiecărei valori a pulsației relative $y = \frac{p}{k}$ îi va corespunde, în cazul unui sistem vibrant dat (ζ dat), o pereche de valori R și I, deci un punct figurativ $P(R, I)$ în planul complex ΩRI, (fig. 27.11); în consecință, relațiile (27.372) vor putea fi considerate ca ecuațiile parametrice — parametrul fiind pulsația relativă y — ale traiectoriei punctului figurativ $P(R, I)$ din planul complex ΩRI.

Locul geometric al pozițiilor acestui punct corespunzătoare diverselor valori ale variabilei y va fi o curbă (Γ_α), numită *diagrama polară a răspunsului* pentru modul propriu de vibrație considerat, denumire justificată de observația că cele două coordonate polare ale unei poziții oarecare P^* a punctului figurativ $P(R, I)$, corespunzătoare unei anumite valori y^* a pulsației relative y, vor reprezenta cele două caracteristici ale mișcării forțate ξ_f și anume, raza polară

$$\rho^* = \overline{\Omega P^*} = \sqrt{R^{*2} + I^{*2}} = |\overline{\alpha}(y^*)| = \alpha(y^*)$$

va reprezenta valoarea factorului de amplificare a amplitudinii, iar unghiul polar φ^*, (fig. 27.11), va reprezenta, în baza relației

$$\operatorname{tg}\varphi^* = \frac{I^*}{R^*} = -\frac{2\zeta y^*}{1 - y^{*2}} = -\frac{2\zeta\frac{p^2}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = -\operatorname{tg}\beta,$$

Scanned with CamScanner

faza inițială a răspunsului considerat, corespunzătoare valorii y^* a pulsației relative.

Pentru a se putea trage unele concluzii în legătură cu forma curbei (Γ_α), se vor face următoarele observații:

— Pentru valoarea $y_0 = 0$ a variabilei y — adică, în absența excitației —, coordonatele punctului $P(R, I)$ vor lua valorile

$$R_0(0) = 1\,;\; I_0(0) = 0,$$

independente deci de valoarea raportului de amortizare ζ, ele determinînd un punct $P_0(1\,;\,0)$ situat pe axa reală, (fig. 27.12).

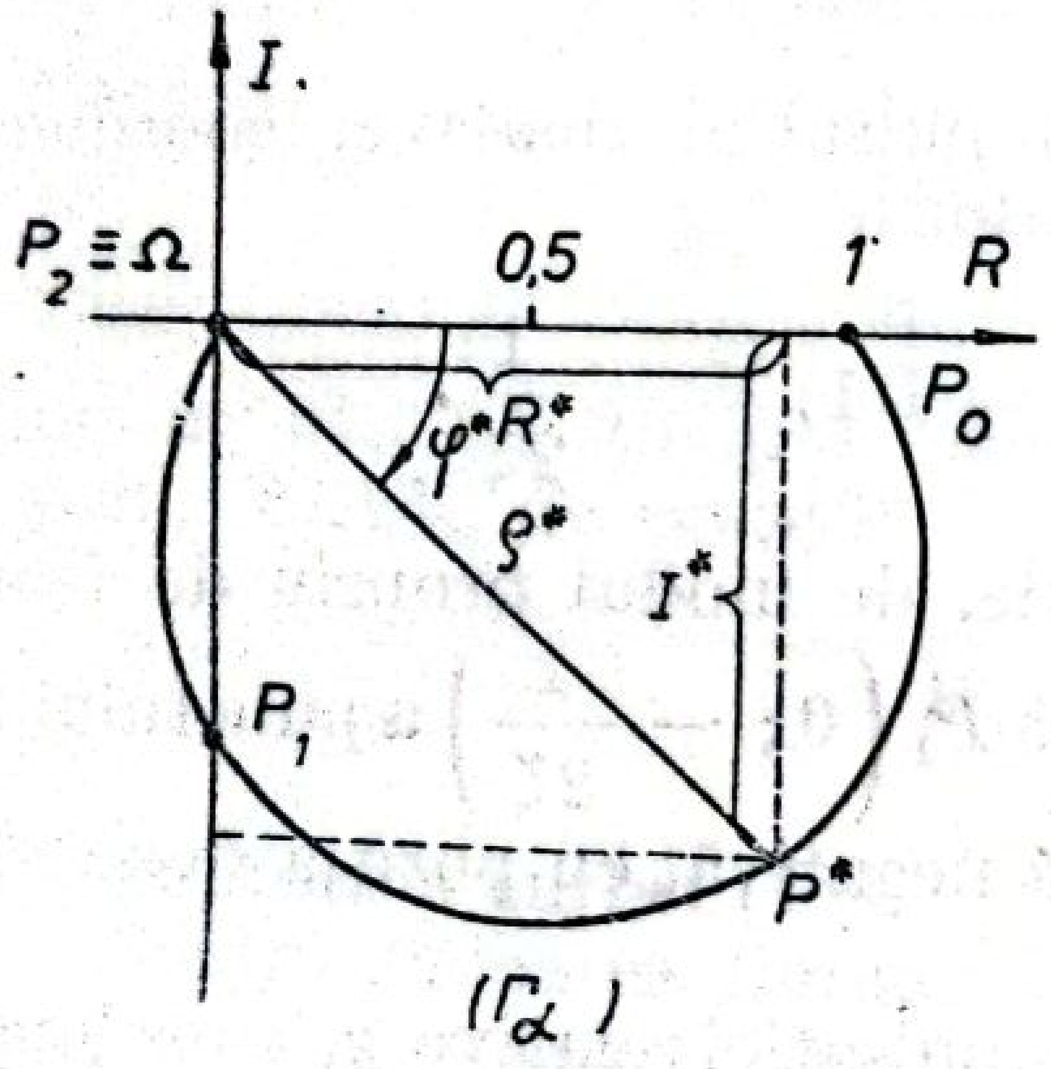


Fig. 27.11.

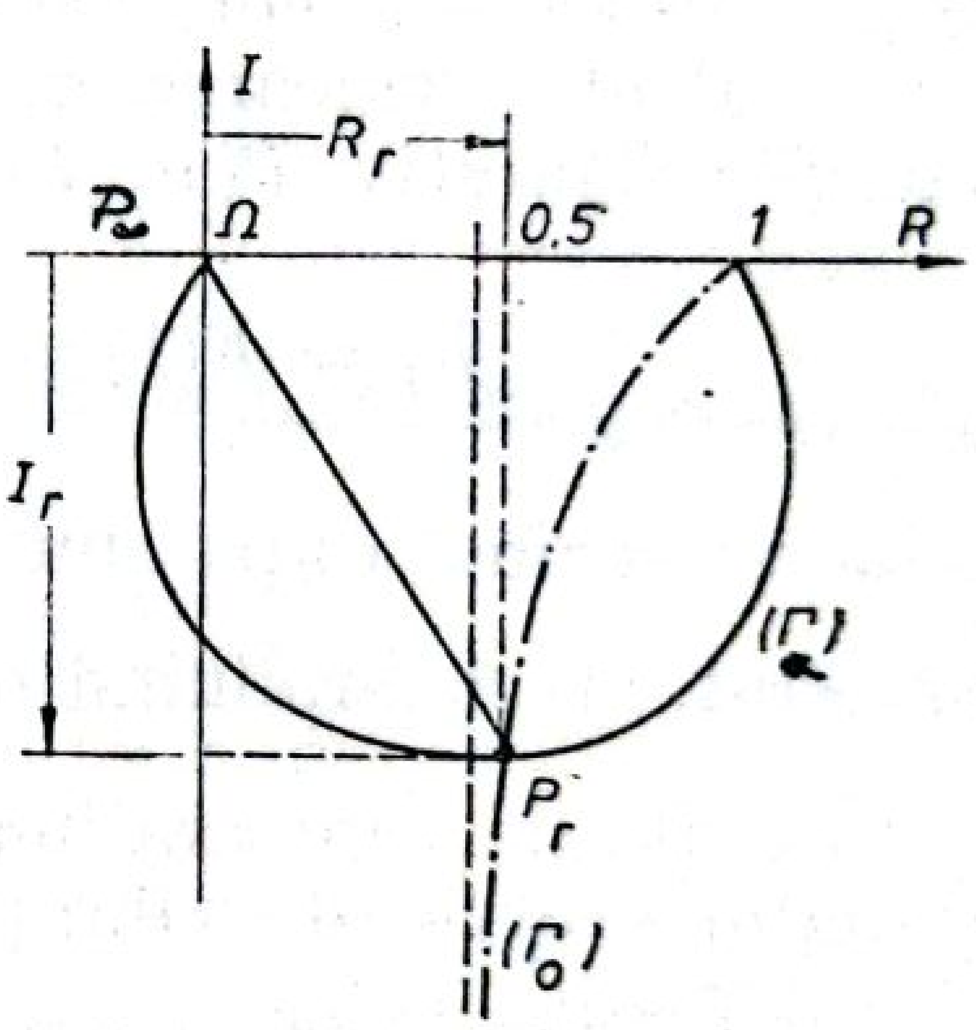


Fig. 27.12.

— Pentru pulsația de rezonanță (în condițiile unei excitații armonice va fi vorba numai de rezonanța de ordinul întîi), adică pentru valoarea

$$y_r = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

a pulsației relative, coordonatele punctului figurativ $P(R, I)$ iau valorile

$$R_r = \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} = R_r(\zeta)\,;\; I_r = -\frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{2\zeta(1 - \zeta^2)} = I_r(\zeta), \quad (27.374)$$

dependente deci de modul propriu de vibrație, ele determinînd o poziție $P_r(R_r, I_r)$ a punctului figurativ care va indica funcționarea în condiții de rezonanță a modului propriu de vibrație respectiv,

(fig. 27.12), cu raza polară corespunzătoare acestei poziții furnizînd amplitudinea la rezonanță

$$\rho_r = \overline{\Omega P_r} = \sqrt{R_r^2 + I_r^2} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \alpha_r = |\overline{\alpha}(y_r)| \quad (27.375)$$

și cu unghiul polar, dat în acest caz de relația

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{I_r}{R_r} = -\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} = -\operatorname{tg} \beta_r = \operatorname{tg}(-\beta_r) \quad (27.376)$$

furnizînd faza inițială la rezonanța in amplitudine pentru modul propriu de vibrație considerat.

— Pentru valoarea $y_1 = 1$ a pulsației relative, coordonatele punctului figuiativ $P(R, I)$ iau valorile

$$R_1 = R(1) = 0\,; \; I_1 = I(1) = -\frac{1}{2\zeta},$$

ultima depinzînd, după cum se vede, de modul propriu de vibrație considerat, ele determinînd o poziție $P_1\left(0\,; -\frac{1}{2\zeta}\right)$ a punctului figurativ situată pe semi axa imaginară negativă, cu poziția dependentă de modul propriu de vibrație.

— Pentru valoarea $y_\infty = \infty$ a pulsației relative y, coordonatele punctului $P(R, I)$ iau valorile

$$R_\infty = R(\infty) = 0\,; \; I_\infty = I(\infty) = 0,$$

independente de raportul de amortizare, deci de modul propriu de vibrație, ele determinînd un punct $P_\infty(0, 0)$ care coincide cu originea axelor.

Observațiile precedente permit să se tragă concluzia că în cazul unui sistem vibrant cu r grade de libertate, curbele (Γ_{α_i}), $(i = 1, 2, \ldots, r)$, corespunzătoare celor r moduri proprii de vibrații ale sistemului, pornesc toate din punctul $P_0(1\,; 0)$, taie axa imaginară în puncte $P_{i_1}\left(0\,; -\frac{1}{2\zeta_i}\right)$ situate la distanțe de originea invers proporționale cu rapoartele de amortizare corespunzătoare modurilor proprii de vibrație respective și revin toate în originea axelor, (fig. 27.13).

Scanned with CamScanner

Se ințelege că fiecare din curbele (Γ_{α_i}) va conține cite un punct $P_{i_r}(R_{i_r}, I_{i_r})$, care va furniza, prin coordonatele sale polare, amplitudinea de rezonanță și faza inițială corespunzătoare rezonanței in amplitudine, (fig. 27.13); se poate pune in acest caz problema determinării formei curbei (Γ_0), reprezentind locul geometric al pozițiilor punctelor de rezonanță P_{i_r}, loc geometric ale cărui ecuații parametrice — cu parametrul reprezentat in cazul de față prin raportul de amortizare — vor fi chiar ecuațiile (27.374).

Unele concluzii in legătură cu forma acestei curbe vor putea fi trase pe baza următoarelor observații:

— Pentru $\zeta \to 0$, coordonatele (27.374) ale punctului P_i tind către valorile

$$R_r \to \frac{1}{2}; \; I_r \to -\infty,$$

rezultind de aici că dreapta (Δ), paralelă la axa imaginară, (fig. 27.12 și fig. 27.13), de ecuație

$$R = \frac{1}{2}$$

este o asimptotă a curbei (Γ_0).

— Pentru valoarea limită

$$\zeta \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a raportului de amortizare in condițiile (27.351) de rezonanță in amplitudine, coordonatele punctului $P_r(R_r, I_r)$ tind spre valorile

$$R_r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to 1; \; I_r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to 0,$$

rezultind de aici că punctul $P_0(1, 0)$, din care pornesc curbele (Γ_{α_i}), este și punctul de care tinde să se apropie curba (Γ_0).

Observațiile precedente permit să se tragă concluzia că pentru un sistem vibrant dat — deci pentru valori determinate ale raportului de amortizare ζ —, rezonanța în amplitudine va fi reflectată in diagrama polară de prezența punctelor $P_{i_r}(R_{i_r}, I_{i_r})$ de intersecție a curbei (Γ_0) cu curbele (Γ_{α_i}), $(i = 1, 2, \ldots, r)$, construite pentru toate cele r moduri proprii de vibrație ale sistemului vibrant, (fig. 27.13).

Scanned with CamScanner

O asemenea rețea de curbe, cum este cea reprezentată în fig. 27.14, corespunzătoare unui sistem vibrant cu trei grade de libertate, poate furniza deci următoarele informații :

— Indică valorile factorilor de amplificare ai amplitudinilor răspunsurilor ζ_{ir} și ale fazelor inițiale corespunzătoare rezonanțe-

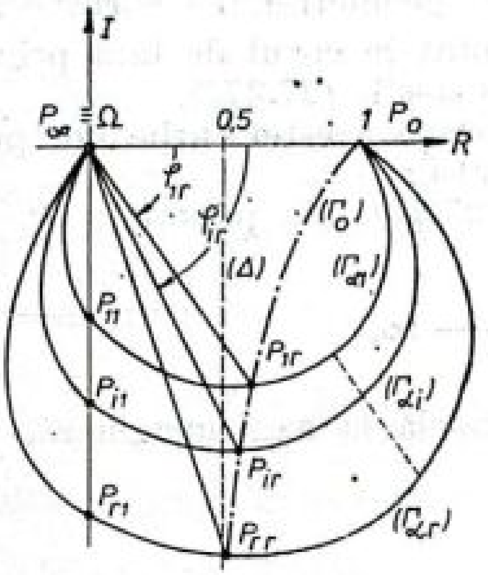


Fig. 27.13.

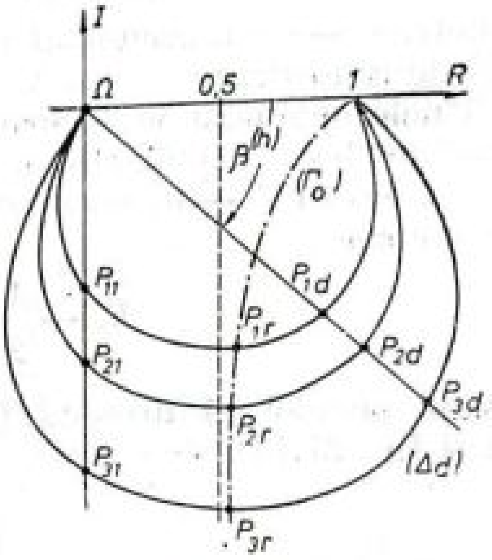


Fig. 27.14.

lor în amplitudine, aceste valori fiind reprezentate prin coordonatele polare ρ_{i_r} și φ_{i_r} ale punctelor de intersecție ale curbei (Γ_0) cu toate curbele (Γ_{α_i}).

— Furnizează valorile factorilor de amplificare ai amplitudinilor răspunsurilor corespunzătoare unui mod dat de distorsiune de ordinul h la o excitație armonică sincronă sinfazică $(\beta_i = \beta^{(h)})$, acestea fiind reprezentate prin razele polare ale punctelor $P_{i_d}(R_{i_d}, I_{i_d})$ de intersecție a curbelor (Γ_{α_i}) cu dreapta (Δ_d), de ecuația

$$I = -R \operatorname{tg} \beta^h,$$

unde β^h este una din rădăcinile ecuației (27.116), (fig. 27.14).

— Precizează valorile factorilor de amplificare ai amplitudinilor răspunsurilor la rezonanța în fază, aceste valori fiind reprezentate prin razele polare ale punctelor $P_{i_1}\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2\zeta_i}\right)$ de intersecție a curbelor (Γ_{α_i}) cu axa imaginară, (fig. 27.14).

Observînd că pentru obținerea tuturor informațiilor menționate mai sus interesează doar porțiunile P_0P_1 din curbele (Γ_{α_i}), corespunzătoare intervalului

$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

de variație a pulsației relative y, rezultă că în cazul amortizărilor foarte mici ($\zeta \ll 1$), termenul $2\zeta y$ din expresiile (27.372) ale coordonatelor punctului $P(R, I)$ va putea fi considerat practic constant pentru acest domeniu de variație a parametrului y, acceptîndu-se deci următoarele aproximări ale ecuațiilor parametrice (27.372):

$$R = \frac{1 - y^2}{(1 - y^2)^2 + c^2}\ ;\ I = -\frac{c}{(1 - y^2)^2 + c^2}, \qquad (27.377)$$

prin constanta c fiind aproximat produsul $2\zeta y$; eliminarea termenului $(1-y^2)$ între ecuațiile parametrice precedente conduce la ecuația

$$\boxed{R^2 + \left(I + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}}, \qquad (27.378)$$

reprezentînd, în planul complex, un cerc de rază egală cu $\frac{1}{2c}$, cu centrul situat pe axa imaginară la distanța $\overline{\Omega C} = \frac{1}{2c}$ de originea Ω și trecînd prin origine, (fig. 27.15).

Curba (Γ_α) devine efectiv un cerc în cazul așa zisei *amortizări histeretice*, pentru care coeficientul de amortizare η, coeficientul de rigiditate $\varkappa$ și pulsația p a excitației armonice sînt legați printr-o relație de forma

$$\eta = \frac{\varkappa}{p}\cdot\frac{E_2}{E_1} = \frac{\varkappa}{p}\,g, \qquad (27.379)$$

unde E_1 este *modulul de elasticitate dinamic*, caracterizînd proprietățile elastice ale comportării materialului la deformații, iar E_2 este *modulul de pierderi*, caracterizînd proprietățile neelastice ale materialului, raportul lor, $g = \frac{E_2}{E_1}$, numit *factor de pierderi*, fiind o constantă specifică unui mod propriu de vibrație dat.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, în acest caz termenul $2\zeta y$ din ecuațiile parametrice (27.372) capătă valoarea

$$2\zeta y = 2\frac{\eta}{\eta_{cr}}\cdot\frac{p}{k} = 2\frac{\frac{\varkappa}{p}g}{\sqrt{4\varkappa\varepsilon}}\cdot\frac{p}{k} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varepsilon}}g\cdot\frac{1}{k} = g,$$

în baza cărora ecuațiile (27.372) vor lua formele

$$R = \frac{1-y^2}{(1-y^2)^2+g^2}\,;\; I = -\frac{g}{(1-y^2)^2+g^2}, \tag{27.380}$$

identice deci cu ecuațiile (27.377), ceea ce înseamnă că în aceste condiții curba (Γ_α) va fi reprezentată prin cercul

$$\boxed{R^2+\left(I+\frac{1}{2g}\right)^2=\frac{1}{4g^2},} \tag{27.381}$$

de rază egală cu $\frac{1}{2g}$, cu centrul pe axa imaginară și tangent în origine la axa reală, (fig. 27.16).

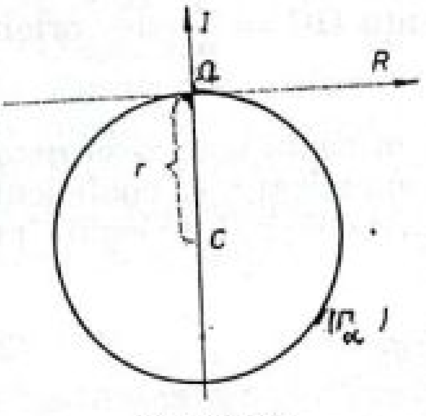


Fig. 27.15

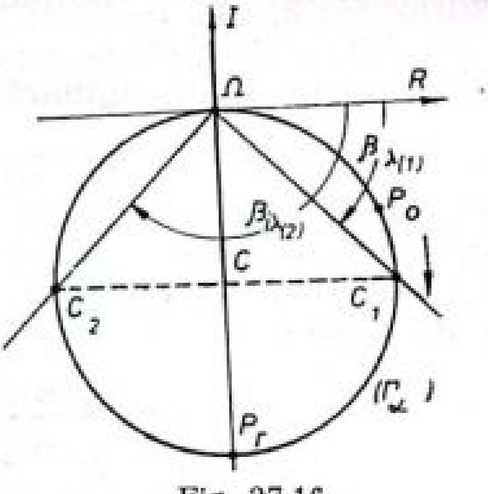


Fig. 27.16.

În această situație, pentru valori crescătoare ale parametrului y, punctul figurativ $P(R, I)$ va pleca din poziția inițială $P_0\left(\frac{1}{1+g^2};\,-\frac{g}{1+g^2}\right)$, corespunzînd valorii $y = 0$ a pulsației

Scanned with CamScanner

relative, parcurgînd cercul (Γ_α) în sens invers trigonometric, (fig. 27.16).

Întrucît în condițiile de mai sus factorul de amplificare a amplitudinii răspunsului vibrației forțate are valoarea

$$\alpha = |\bar{\alpha}(y)| = \sqrt{R^2 + I^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + g^2}},$$

se observă că rezonanța în amplitudine va avea loc acum pentru valoarea $y = 1$ a pulsației relative, pentru care α ia valoarea maximă

$$\alpha_r = \frac{1}{g}$$

și pentru care coordonatele punctului figurativ $P(R_1 I)$ iau valorile

$$R_r = 0\,;\; I_r = -\frac{1}{g},$$

care atestă coincidența, în acest caz, a punctului de rezonanță în amplitudine $P_r(R_r, I_r)$, cu punctul de rezonanță în fază $P_1\left(0; -\right.$ $\left.-\frac{1}{2\zeta} = -\frac{1}{g}\right)$.

Diametrul perpendicular pe raza vectoare ΩP_r determină pe cercul (Γ_α) două puncte, C_1 și C_2, cărora le corespund unghiurile polare

$$\varphi_1 = -\beta_1 = -\frac{\pi}{4}\,;\; \varphi_2 = -\beta_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

și razele vectoare

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{\Omega C}_1 = \overline{\Omega C}_2 = \sqrt{2}\,\overline{\Omega C} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{g}.$$

Pozițiile C_1 și C_2 ale punctului figurativ $P(R, I)$ corespund unor valori $y_{1,2}^2$ ale pătratului pulsației relative reprezentînd rădăcinile ecuației

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - y_{1,2}^2)^2 + g^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,g,$$

adică valorile

$$y_{1,2}^2 = 1 \pm g$$

purtînd numele de *pulsații relative de putere jumătate*. (Se demonstrează că în cazul cînd pulsația excitației armonice ia una din valorile $p = \sqrt{1 \pm g}$, atunci energia disipată prin amortizare este egală cu 1/2 din energia disipată prin amortizare la rezonanță).

Se menționează faptul că pe baza acestei observații a fost elaborată o metodă experimentală pentru determinarea raportului $g = \dfrac{E_2}{E_1}$, ce caracterizează amortizarea histeretică).

Revenind la cercul (Γ_α) corespunzător amortizării histeretice, se va observa că între unghiul polar φ corespunzător unei anumite valori a pulsației relative y și între unghiul la centru θ corespunzător punctului figurativ $P(R, I)$ pe cerc, (fig. 27.17), poate fi stabilită relația

$$\theta = 2\varphi,$$

în baza căreia, unei variații elementare $d\varphi$ a unghiului polar, provocată de o variație $d(y^2)$ a pătratului parametrului y și care aduce punctul figurativ $P(R, I)$ în poziția $P(R + dR; I + dI)$, (fig. 27.17), îi va corespunde o variație a unghiului θ avînd valoarea

$$d\theta = 2\, d\varphi$$

și o variație a lungimii orientate a arcului de cerc descris de punctul $P(R, I)$ dată de relația

$$ds = \frac{1}{2g}\, d\theta = \frac{1}{g}\, d\varphi = \frac{1}{g}\, d\left[\operatorname{arctg} \frac{I}{R}\right],$$

sau încă, ținînd seama și de ecuațiile (24.421), de relația

$$ds = -\frac{1}{(1 - y^2)^2 + g^2}\, d(y^2) = -\,\alpha^2(y) \cdot d(y^2).$$

O relație analoagă va putea fi scrisă și între variațiile Δs și $\Delta(y^2)$ finite, dar suficient de mici, adică se va putea scrie

$$|\Delta s| = \alpha^2(y)\, \Delta(y^2),$$

ecuația evidențiind în acest caz proporționalitatea, pentru variații $\Delta(y^2)$ constante, dintre arcele de cerc și pătratul factorului de ampli-

Scanned with CamScanner

ficare a amplitudinii corespunzător valorii medii a lui y din intervalul considerat în variația $\Delta(y^2)$; pentru valoarea $y = y_r$ a pulsației relative, corespunzătoare punctului de rezonanță $P_r(R_r, I_r)$, arcul Δs va avea lungimea maximă

$$|\Delta s|_{max} = \alpha_r^2\,\Delta(y_r^2) = \alpha^2(y_r)\,\Delta(y_r^2) \tag{27.382}$$

și va indica, pe cercul (Γ_α), *zona de rezonanță.*

Concluzia precedentă va fi folosită, așa cum se va arăta în continuare, la determinarea pe cale experimentală a frecvențelor de rezonanță ale unui sistem vibrant, înlocuindu-se însă, în reprezentarea grafică din planul complex, factorul complex de amplificare a amplitudinii cu funcția complexă de răspuns în frecvență

$$\overline{H}(y) = \frac{1}{\varkappa}\,\overline{\alpha}(y).$$

Datorită caracterului liniar al relației dintre mărimile $\overline{H}(y)$ și $\overline{\alpha}(y)$, este evident că diagrama polară (Γ_H), rezultînd din curba (Γ_α) prin amplificarea razei polare corespunzătoare fiecărei valori a unghiului polar cu factorul $\dfrac{1}{\varkappa}$, va păstra forma diagramei (Γ_α), cu aceeași poziționare a zonei de rezonanță, deosebindu-se de aceasta doar prin faptul că nu va mai pleca din punctul $P_0(1\,;\,0)$, ci din punctul $Q_0\left(\dfrac{1}{\varkappa}\,;\,0\right)$, (fig. 27.18), situat tot pe axa reală, dar la o distanță de origine dată de relația

$$\overline{\Omega Q_0} = \mathrm{Re}\,[\overline{H}(0)] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\varkappa}\,\overline{\alpha}(0)\right] = \frac{1}{\varkappa}.$$

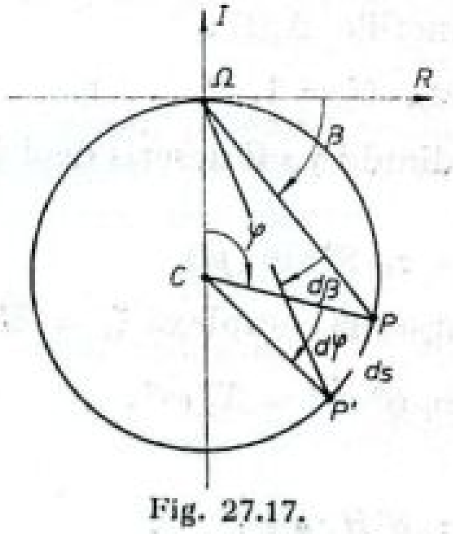


Fig. 27.17.

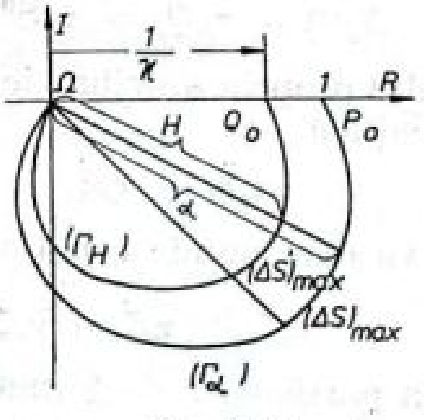


Fig. 27.18.

Pentru a efectua determinarea experimentală a frecvențelor de rezonanță, în unul din punctele sistemului vibrant — de regulă, într-un punct al unui element constitutiv al sistemului, al cărui parametru de poziție figurează printre parametrii lagrangeieni ai sistemului vibrant — se aplică o excitație pur armonică — o forță sau un moment, după caz —, de forma

$$S = S^0 \sin(pt),$$

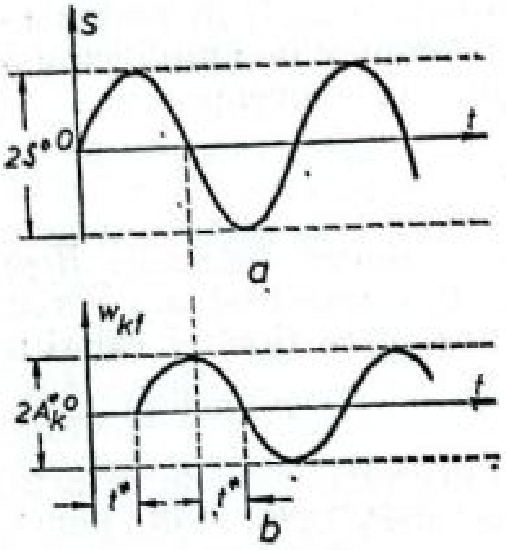


Fig. 27.19

cu pulsația reglabilă, variind de la zero pînă la o valoare suficient de mare pentru a acoperi toate frecvențele de rezonanță posibile (în mod obișnuit pînă la 1200—1500 Hz).

Această excitație se introduce, în același timp, și în canalul unui oscilograf, care o va rerezenta sub forma unei sinusoide, (fig. 27.19, a), căreia i se va putea evalua dublul amplitudinii sale $2S^0$.

Admițind că parametrul de poziție al elementului căruia i-a fost aplicată excitația armonică este chiar unul din parametrii lagrangeieni ai sistemului vibrant, de ex. w_j, forțele generalizate de excitație vor satisface condițiile

$$Q_k \equiv 0, \ (k = 1, 2, \ldots, j-1; j+1, \ldots, r); \ Q_j = S^0 \sin(pt),$$

cu următoarele consecințe pentru funcțiile $X_i(t)$:

$$X_j(t) = \tau_{ji} Q_j = \tau_{ji} S^0 \sin(pt), \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Modul propriu de vibrație de ordinul i va fi descris deci de ecuația diferențială

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_{ii} \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = \tau_{ji} S^0 \sin(pt),$$

căreia ii va corespunde ecuația in variabila complexă $\zeta_i = \xi_i^* + \mathring{i} \xi_i$.

$$\varepsilon_i \ddot{\zeta}_i + \eta_{ii} \dot{\zeta}_i + \varkappa_i \zeta_i = \tau_{ji} S^0 e^{\mathring{i}pt} = X_i^0 e^{\mathring{i}pt},$$

cu soluția particulară de forma

$$\zeta_{if} = \tau_{ji} S^0 \overline{H}_i(y) e^{\mathring{i}pt} = \tau_{ji} S^0 H_i(y) e^{\mathring{i}(pt - \beta_i)}.$$

Răspunsul forțat al sistemului vibrant corespunzător modului propriu de vibrație considerat va fi determinat prin relația

$$\xi_{if} = \mathrm{Im}\, \zeta_{if} = \tau_{ji} S^0 H_i(y) \sin(pt - \beta_i),$$

iar vibrația forțată corespunzătoare unui grad de libertate oarecare k va fi definită prin ecuația

$$w_{kf} = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} \xi_{if} = S^0 \sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} \tau_{ji} H(y) \sin(pt - \beta_i),$$

sau încă, prin ecuația

$$w_{kf} = \mathscr{A}_k^* \sin(pt - \beta_k^*), \tag{27.383}$$

cu mărimile $\mathscr{A}_k^*$ și β_k^* avînd, în baza relațiilor (21.90) și (21.91), expresiile

$$\mathscr{A}_k^* = S^0 \sqrt{\sum_{h,i=1}^{r} \tau_{hk} \tau_{jh} \tau_{ik} \tau_{ji} H_h(y)\ H_i(y)\ \cos(\beta_h - \beta_i)} = \mathscr{A}_k^*(y);$$

$$\beta_k^* = \mathrm{arc\,tg} \frac{\sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} \tau_{ji} H_i(y) \sin \beta_i}{\sum_{i=1}^{r} \tau_{ik} \tau_{ji} H_{iy} \cos \beta_i} = \beta_k^*(y). \tag{27.384}$$

Introducerea, prin intermediul unui captor de deplasări, a acestei vibrații într-un al doilea canal al oscilografului, va furniza oscilograma ei, căreia i se va putea evalua atît dublul amplitudinii $2\mathscr{A}_k^*$, cît și defazajul ei față de excitație

$$\beta_k^* = pt^*,$$

t^* fiind timpul cu care este decalată sinusoida răspunsului față de sinusoida excitației (fig. 27.19, b).

Determinînd, pentru valori crescătoare

$$p_{(h)} = p_{(0)} + h\,\Delta p,\ (h = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

cu $p_{(0)} = 0$, mărimile

$$\frac{\mathscr{A}_{k(h)}^*}{S_0} = \frac{\mathscr{A}_k^*(p_{(h)})}{S^0}\ ;\ \beta_{k(h)}^* = \beta_k^*(p_k)$$

Scanned with CamScanner

corespunzătoare lor — primele măsurate în (mm/N) dacă parametrul w_k este o lungime și în (rad/Mm) dacă parametrul w_k este un unghi —, se vor putea reprezenta grafic variațiile $\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0} = \frac{\mathscr{A}_k^*(p)}{S^0}$ și $\beta_k^* = \beta_k^*(p)$, obținîndu-se două curbe de forma celor din fig. 27.20, a și b, purtînd numele de *caracteristica amplitudine-frecvență*, respectiv de *caracteristica fază-frecventă*, a vibrației w_k.

Considerind valorile $\rho = \frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0}$ și $\varphi = -\beta_k^*$ drept coordonate polare curente ale unui punct figurativ $Q^*(\rho, \varphi)$ din planul complex ΩRI, fiecărei valori $p_{(h)}$ a pulsației p a excitației îi va corespunde, în semiplanul $I < 0$, un punct $Q^*_{(h)}(\rho_{(h)}, \varphi_{(h)})$, notat obișnuit în grafic, pentru simplificarea scrierii, chiar prin valoarea $p_{(h)}$ a pulsației excitației (fig. 27.21); locul geometric al acestor puncte va fi o curbă

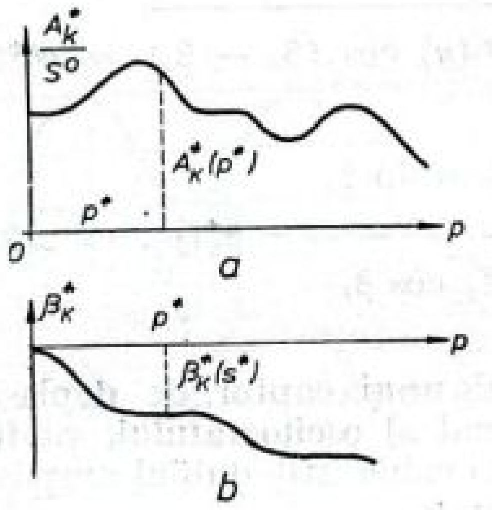


Fig. 27.20.

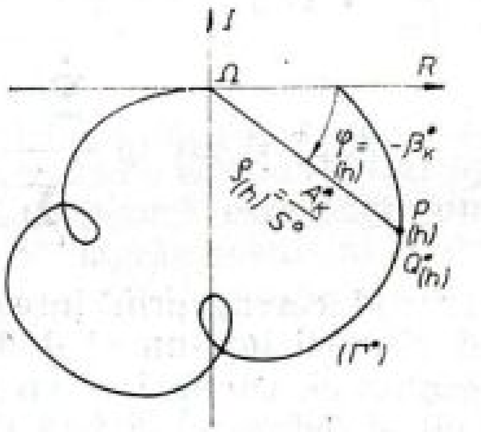


Fig. 27.21.

(Γ^*), rezultind din o succesiune de bucle mari — asimilabile uneori cu arce de cerc — în număr egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant, racordate una de alta prin bucle mai mici, întreaga curbă fiind situată, pentru sisteme vibrante liniare obișnuite, în semiplanul $I < 0$, (fig. 27.21).

Explicația acestei forme a curbei (Γ^*) este următoarea:

Dacă vibrația selectată prin captorul de deplasări, plasat pe elementul cu poziția determinată prin parametrul w_k, ar rezulta numai termenul corespunzător unui singur mod de vibrație de un

Scanned with CamScanner

ordin oarecare h — cum se întîmplă, de exemplu, atunci cînd se realizează modul principal de excitație de ordinul h —, relația care ar determina vibrația w_{kf} ar avea forma particulară

$$w_{kf} = S^0 \left[\tau_{hk}\tau_{fh}H_h\left(\frac{p}{k_h}\right)\right] \sin (pt) - \beta_h)$$

și comparația ei cu relația (27.383) ar conduce la concluziile

$$\mathscr{A}_k^* = S^0\left[\tau_{hk}\tau_{fh}H_h\left(\frac{p}{k_h}\right)\right]; \quad \beta_k^* = \beta_h .$$

Prima dintre relațiile precedente arată însă că în acest caz raportul $\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0}$ este o mărime proporțională cu funcția de răspuns în frecvență, conform relației

$$\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0} = \tau_{hk}\tau_{fh}H_h\left(\frac{p}{k_h}\right) = \tau_{hk}\tau_{fh}\frac{1}{\varkappa_h}\alpha_h\left(\frac{p}{k_h}\right),$$

rezultînd de aici proporționalitatea razelor polare ale punctelor corespunzătoare aceluiași unghi polar de pe curbele (Γ_k^*), (Γ_{H_h}) și (Γ_{α_h}); în consecință, punctului de rezonanță de pe curba (Γ_{α_h}), $P_{h_{(r)}}(R_{h_{(r)}}, I_{h_{(r)}})$, îi vor corespunde punctele $K_{h_{(r)}}\left(\frac{R_{k_{(r)}}}{\varkappa_h}, \frac{I_{h_{(r)}}}{\varkappa_h}\right)$ pe curba (Γ_{H_h}) și $Q_{h_{(r)}}$ $\left(\tau_{hk}\tau_{fh}\frac{R_{h_{(r)}}}{\varkappa_h}; \tau_{hk}\tau_{fh}\frac{I_{h_{(r)}}}{\varkappa_h}\right)$ pe curba (Γ_k^*), situate pe aceeași rază vectoare și bucurîndu-se de aceeași proprietate de a fi situate în interiorul zonelor de rezonanță respective.

Dacă însă vibrația captată cuprinde termenii corespunzători tuturor modurilor proprii de vibrații — și aceasta se și întîmplă în general —, atunci raportul $\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0}$ are, în baza primei dintre relațiile (27.384), valoarea

$$\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0} = \sqrt{\sum_{h,i=1}^{r} \tau_{hk}\tau_{fh}\tau_{ik}\tau_{fi}H_h\left(\frac{p}{k_h}\right)H_i\left(\frac{p}{k_i}\right)\cos(\beta_h - \beta_i)},$$

Scanned with CamScanner

CamScanner

care, pentru o valoare dată $p_{(l)}$ a pulsației p, corespunde — lucru ușor de verificat și din fig. 27.22 — sumei vectoriale

$$\overrightarrow{\Omega Q}_{(l)} = \overrightarrow{\Omega Q}_{1_{(l)}} + \overrightarrow{\Omega Q}_{2_{(l)}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega Q}_{i_{(l)}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega Q}_{r_{(l)}},$$

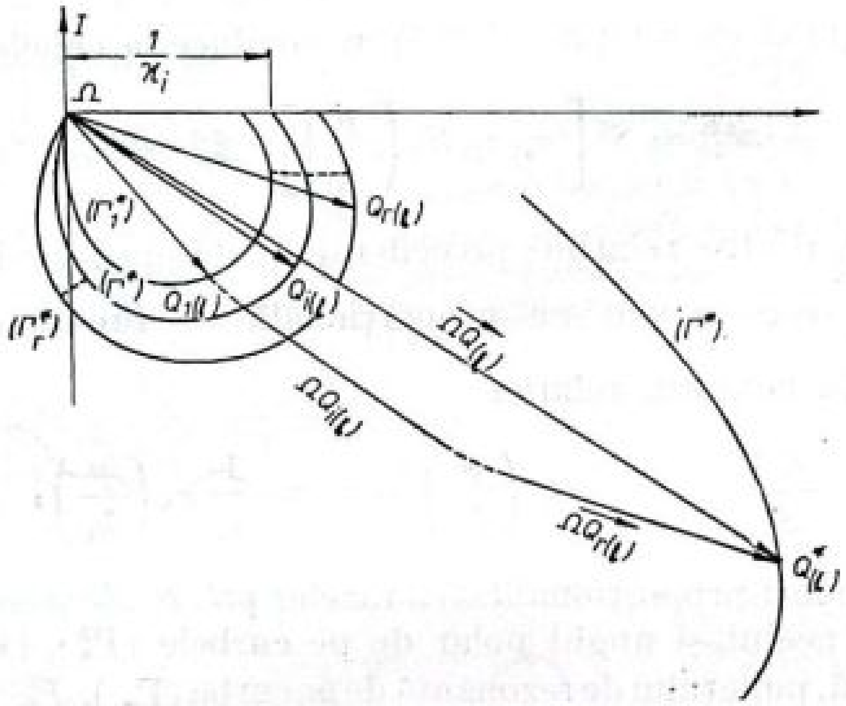


Fig. 27.22.

care, la rîndul ei, corespunde sumei de numere complexe $\bar{\rho}_{i_l} = R_{i_{(l)}} + i I_{i_{(l)}}$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ce determină pozițiile punctelor $Q_{i_{(l)}}$ $(\rho_{i_{(l)}}, \varphi_{i_{(l)}})$ pe curbele (Γ_i^*), rezultînd astfel egalitatea

$$|\overrightarrow{\Omega Q}_{(l)}| = \left| \sum_{i=1}^{r} (R_{i_{(l)}} + i I_{i_{(l)}}) \right|.$$

Citeva observații privind modul de compunere a acestor vectori vor justifica acum forma curbei (Γ^*):

— Cu cît raportul de amortizare ζ_i al unui mod propriu de vibrație este mai mic, cu atît curba (Γ_i^*) corespunzătoare lui are o curbură mai mică (rază de curbură mai mare), intersectînd axa imaginară la o distanță mai mare de origine cu și atît unghiul polar

Scanned with CamScanner

corespunzător unei valori date a excitației $\left(\varphi_i = -\beta_i = -\right.$ $\left.- \operatorname{arctg} 2\zeta \frac{p}{k_i} \bigg/ \left(1 - \frac{p^2}{k_i^2}\right)\right)$ are o valoare mai mică, rezultînd de aici că punctele reprezentative $Q_{i_{(l)}}(R_{i_{(l)}}, I_{i_{(l)}})$ rămîn cu atît mai în urmă pe curbele (Γ_i^*) cu cît amortizarea este mai mică, (fig. 27.22);

— pe măsură ce punctele reprezentative $Q_i(R_i, I_i)$ trec prin pozițiile de rezonanță $Q_{i_r}, (R_{i_{(r)}}, I_{i_{(r)}})$ ale modurilor proprii respective, vectorul $\overrightarrow{\Omega Q}$ corespunzător are modulul maxim, rezultînd de aici și cîte un maxim pentru modulul vectorului rezultant $|\overrightarrow{\Omega Q}|$, maxim care, evident, nu va fi același pentru toate modurile proprii de vibrație; din cele r maxime ce se obțin succesiv pentru $|\overrightarrow{\Omega Q}|$, primul va corespunde deci modului propriu cu raport de amortizare maxim, iar ultimul va corespunde modului propriu cu raport de amortizare minim;

— întrucît toți vectorii componenți au numai proiecții negative pe axa imaginară pentru toate punctele curbelor (Γ_i^*), este evident că și vectorul rezultant $\overrightarrow{\Omega Q}$ nu va avea proiecții pozitive pe această axă, adică curba (Γ^*) va fi situată în semiplanul $I < 0$.

— după depășirea fiecărui punct de rezonanță al unui mod propriu de vibrație, modulul vectorului $\overrightarrow{\Omega Q_i}$ începe din nou să scadă, pînă se apropie de următoarea zonă de rezonanță, cînd începe iar să crească, explicîndu-se astfel formarea buclelor mari, cîte una pentru fiecare mod propriu de vibrație și succedîndu-se în ordinea scăderii raportului de amortizare ζ_i;

— caracterul continuu, de regulă, al variației amplitudinii vibrației w_k la variația continuă a pulsației excitației, care implică existența, între două maxime succesive — deci între două zone de rezonanță —, a unui minim, explică posibilitatea ca în zona unui asemenea minim amplitudinea să revină la o aceeași valoare pentru două valori apropiate, $p_{(l)}$ și $p_{(l)} + \Delta p_{(l)}$, ale pulsației excitației, (fig. 27.23), în care interval se produc și variații foarte mici ale fazei β_k^*; se explică astfel și formarea buclelor mici de legătură între buclele mari, reprezentînd modurile proprii de vibrație.

Scanned with CamScanner

În fig. 27.24 este prezentată, după lucrarea [21], construcția curbei (Γ^*) pentru un sistem vibrant cu două grade de libertate, plecîndu-se de la curbele (Γ_1^*) și (Γ_2^*) corespunzătoare celor două

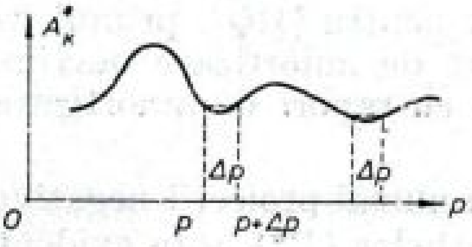


Fig. 27.23.

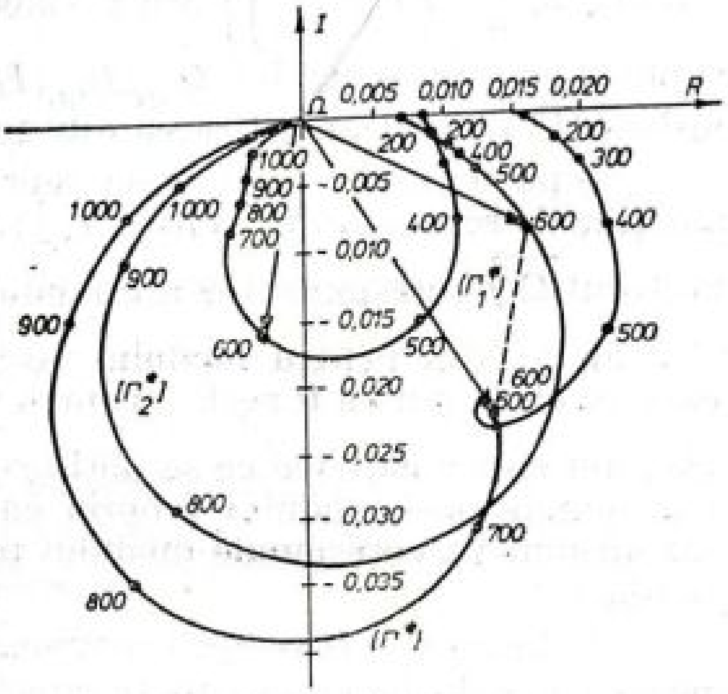


Fig. 27.24.

moduri proprii de vibrație, pentru următoarele valori concrete ale parametrilor sistemului vibrant:

$$\varkappa_1 = 111 \text{ (N/mm)}; \; k_1 = 575 \text{ (s}^{-1}\text{)}; \; \zeta_1 = 0{,}27;$$

$$\varkappa_2 = 125 \text{ (N/mm)}; \; k_2 = 770 \text{ (s}^{-1}\text{)}; \; \zeta_2 = 0{,}12.$$

În tehnica testărilor la vibrații se obișnuiește ca după trasarea curbei (Γ^*) și deci după identificarea, în mare, a zonelor de rezonanță corespunzătoare celor r moduri proprii de vibrație, să se repete operația de determinare a mărimilor $\frac{\mathscr{A}_k^*}{S^0}$ și β_k^* din acele zone, variindu-se continuu pulsația excitației cu cantități constante Δp — în determinările de mare precizie $\Delta p = 20$ Hz —, pentru a se putea alege astfel, în fiecare zonă de rezonanță, arcele Δs de lungime maximă, care vor indica cu o mai mare precizie parametrii de rezonanță în amplitudine ai modurilor proprii de vibrație.

Datorită faptului că în fiecare buclă (Γ_i^*), o porțiune destul de mare de arc A_iB_i al buclei, incluzînd și zona de rezonanță corespun-

zătoare modului propriu reprezentat, poate fi asimilată cu un arc de cerc (Γ_{C_i}), (fig. 27.25), cu centrul într-un punct C_i situat în semiplanul $I < 0$ și de rază depinzînd, ca și poziția centrului C_i, de mărimea porțiunii de curbă considerată, s-a ajuns la ideea că zona de rezonanță respectivă ar putea fi considerată ca o zonă de rezonanță corespunzătoare unei *amortizări histeretice echivalente* a modului propriu în cauză, cu precizarea că cercul (Γ_{C_i}) reprezentînd acest mod propriu de vibrație echivalent este raportat la reperul $\Omega_i^* R_i^* I_i^*$, care este și translat cu vectorul $\Omega\Omega_i \rightarrow a_i - i\, b_i$ față de reperul ΩRI și rotit față de acest reper cu unghiul φ_i (fig. 27.25).

Relațiile dintre cele două serii de coordonate ale unui punct curent $Q(R, I) \equiv Q(R_i^*, I_i^*)$ din zona $A_i B_i$, considerate în raport cu cele două sisteme de axe de coordonate, adică

$$R = a_i + R_i^* \cos \varphi_i - I_i^* \sin \varphi_i ; \; I = b_i + R_i^* \sin \varphi_i + I_i^* \cos \varphi_i ,$$

permit să se scrie egalitățile

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}R_i^* \cos \varphi_i - \mathrm{d}I_i^* \sin \varphi_i ; \; \mathrm{d}I = \mathrm{d}R_i^* \sin \varphi_i + \mathrm{d}R_i^* \cos \varphi_i$$

corespunzătoare trecerii de la punctul $Q(R, I)$ la un punct infinit vecin pe curbă ca urmare a variației $\mathrm{d}p$ a pulsației excitației, din care rezultă următoarea relație între lungimile arcelor elementare de curbă — pe cerc și pe curba (Γ^*) — la aceeași variație a pulsației excitației :

$$|\mathrm{d}s| = \sqrt{\mathrm{d}R^2 + \mathrm{d}I^2} = \sqrt{\mathrm{d}R^{*2} + \mathrm{d}I^{*2}} = |\mathrm{d}s^*| .$$

Ultima relație arată că arcului $|\Delta s|_{max}$ din zona de rezonanță a buclei considerate din curba (Γ^*) îi corespunde arcul $|\Delta s^*|$ din cercul corespunzător amortizării histeretice echivalente.

Pe baza acestei observații a fost elaborată *metoda Kennedy-Pancu* de localizare a zonelor de rezonanță ale unui sistem vibrant, [7].

În încheierea prezentării problemelor legate de curbele de răspuns frecvențial mai trebuie menționat faptul că în practică pot fi întîlnite și situații cînd una, sau chiar mai multe din buclele curbei (Γ_i^*) sînt situate în semiplanul $I > 0$, asemenea situații explicîndu-se fie prin prezența unor amortizări negative ($\zeta_i < 0$), fie, așa cum se întîmplă, de exemplu, în dinamica mașinilor unelte, prin apariția unor rigidități cu caracteristică negativă ($\varkappa_i < 0$), cînd coordonatele punctului figurativ $Q(R, I)$, reprezentînd partea reală și partea

imaginară a funcţiei complexe de răspuns în frecvenţă $\left(\bar{H}_i = \frac{1}{\varkappa_i}\bar{\alpha}_i\right)$, capătă semnele schimbate faţă de semnele părţii reale şi celei imaginare a factorului complex de amplificare a amplitudinii, (fig. 27.26).

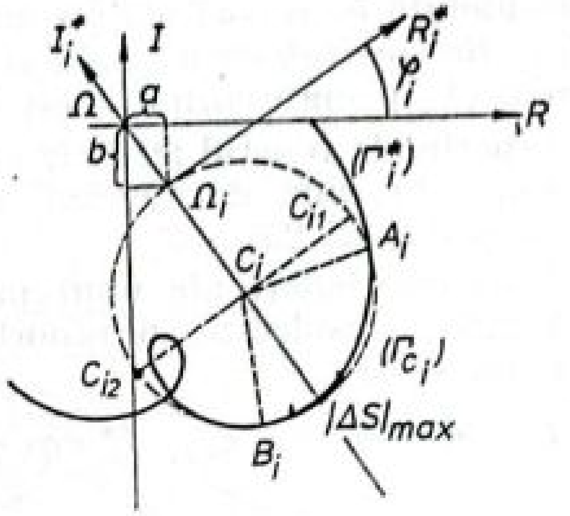


Fig. 27.25.

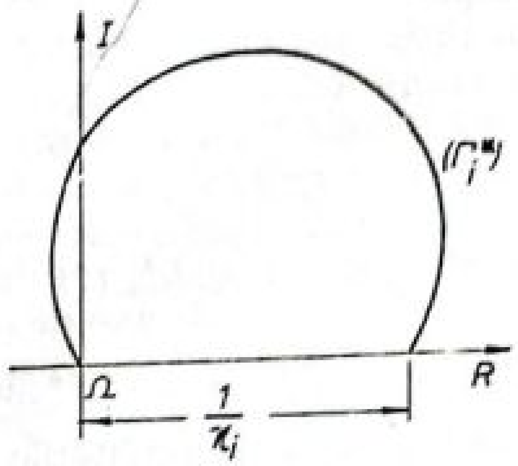


Fig. 27.26.

Revenind la problema determinării soluţiilor generale ale ecuaţiilor diferenţiale în coordonate principale ale sistemelor vibrante liniare supuse la excitaţii poliarmonice sincrone sinfazice — ecuaţiile (27.318) — , se va observa că în baza relaţiilor (27.209) şi (27.324) ele vor putea fi scrise sub formele

$$\boxed{\begin{gathered}\xi_i = \xi_{ip} + \xi_{if} = e^{-\mu_i t}\,\mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + \\ + \sum_{\lambda=1}^{l} \mathscr{A}_{i_\lambda} \sin(\lambda p t - \beta_{i_\lambda}) \\ (i = 1, 2, \ldots, r)\end{gathered}} \tag{27.385}$$

cu mărimile $\mathscr{A}_{i_\lambda}$ şi β_{i_λ} determinate prin relaţiile (27.325) şi (27.326).

În condiţiile neglijării amortizării ($\zeta_i = 0$; $k_{0_i} = k_i$), aceste ecuaţii vor lua formele particulare

$$\boxed{\xi_i = \mathscr{X}_i \sin(kt + \alpha_i) + \sum_{\lambda=1}^{l} \mathscr{A}_{i_\lambda} \sin(\lambda pt - \beta_{i_\lambda})}\,. \tag{27.386}$$

Atît în ecuațiile (27.385), cît și în ecuațiile (27.386) mărimile $\mathscr{X}_i$ și α_i sînt constante de integrare, care vor putea fi determinate impunîndu-se condițiile inițiale (24.210) în sistemele de ecuații formate din funcțiile $\xi_i = \xi_i(t)$ și $\dot{\xi}_i = \dot{\xi}_i(t)$.

În baza relațiilor (27.191) vor putea fi scrise, după determinarea constantelor de integrare, și ecuațiile finite ale mișcărilor vibratorii ale sistemului vibrant, acestea avînd formele

$$\begin{gathered} w_k = w_{kp} + w_{kf} = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} e^{-\mu_i t} \mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + \\ + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{l} \tau_{ki} \mathscr{A}_{i_\lambda} \sin(\lambda p t - \beta_{i_\lambda}) \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{gathered} \tag{27.387}$$

în cazul considerării amortizării și formele

$$w_k = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} \mathscr{X}_i \sin(k_i t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{l} \tau_{ki} \mathscr{A}_{i_\lambda} \sin(\lambda p t - \beta_{i_\lambda}) \tag{27.388}$$

în cazul sistemelor vibrante cu amortizare neglijabilă.

În cazul excitației armonice sincrone sinfazice ($l = 1$), ecuațiile (27.385) și (27.386) vor lua formele particulare

$$\xi_i = e^{-\mu_i t} \mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + \mathscr{A}_i \sin(pt - \beta_i), \tag{27.389}$$

respectiv

$$\xi_i = \mathscr{X}_i \sin(k_i t + \alpha_i) + \mathscr{A}_i \sin(pt - \beta_i) \tag{27.390}$$

pentru sisteme vibrante cu amortizare neglijabilă —, cărora le vor corespunde următoarele forme particulare pentru ecuațiile (27.387) și (27.388);

$$w_k = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} e^{-\mu_i t} \mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} \mathscr{A}_i \sin(pt - \beta_i), \tag{27.391}$$

CamScanner
Scanned with CamScanner

respectiv

$$w_k = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} \mathscr{X}_i \sin(k_i t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki} \mathscr{A}_i \sin(pt - \beta_i) \cdot \quad (27.392)$$

27.1.2. Mișcarea forțată efectuată sub acțiunea unei excitații de tip impulsiv.

După cum s-a arătat în § 25, pct. 25.1.1.d, o excitație de tip impulsiv $S = S(t)$ — o forță, sau un moment — care, aplicată la momentul $t = 0$ unui element al sistemului vibrant cu poziția determinată printr-un parametru lagrangeian w_j provoacă o variație finită, cunoscută, h_j^0, a impulsului generalizat al acelui element, poate fi exprimată cu ajutorul funcției simbol $\delta(t)$ a lui Dirac, definită prin proprietățile (21.293), (21.294) și (21.295), adică se poate scrie

$$S(t) = \lambda\, \delta(t),$$

λ fiind un factor constant cu dimensiunile fizice de excitație și cu mărimea determinată din condiția de coincidență a impulsului cunoscut h_j^0 cu expresia impulsului generalizat provocat de o asemenea excitație.

Întrucît în condițiile precizate toate forțele generalizate ale sistemului vibrant vor fi egale cu zero, cu excepția celei corespunzătoare gradului de libertate j care va coincide chiar cu solicitarea impulsivă, adică vor rezulta condițiile

$$Q_k \equiv 0\,;\ (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r)\,; Q_j = \lambda\delta(t), \quad (27.393,$$

ecuația lui Lagrange corespunzătoare gradului de libertate j, folosită sub forma care descrie mișcările impulsive, adică

$$h_j(\tau) - h_j(0) = \int_0^{\tau} Q_j\, dt,$$

unde τ reprezintă durata acțiunii impulsive, va putea fi scrisă în cazul de față, ($h_j(\tau) = h_j^0$; $h_j(0) = 0$; $t > 0$), sub următoarea formă concretă:

$$h_j^0 = \lambda \int_0^{\tau} \delta(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} \delta(t)\, dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt,$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici, în baza condiției (21.294), concluzia

$$\lambda = h_j^0,$$

care dovedește că factorul λ are mărimea egală cu cea a impulsului creat de excitația impulsivă, numai că dimensiunile fizice ale lui sînt cele ale unei excitații.

În această situație, condițiile (27.393) vor lua formele

$$Q_k \equiv 0; \ (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r);$$
$$Q_j = h_j^0 \, \delta(t),$$

iar excitațiile $X_i(t)$, corespunzătoare modurilor proprii de vibrație ale sistemului vibrant supus excitației impulsive considerate, vor avea și ele expresiile reduse la un singur termen, de forma

$$X_i(t) = \tau_{ji} Q_j(t) = \tau_{ji} h_j^0 \delta(t) = X_i^0 \, \delta(t), \qquad (27.394)$$

lor corespunzîndu-le următoarele forme ale ecuațiilor diferențiale în coordonate principale ale mișcării vibratorii a sistemului vibrant:

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = X_i^0 \delta(t). \qquad (27.395)$$

Considerînd numai ecuația corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i, soluția particulară a ei, determinînd mișcarea forțată respectivă, va putea fi obținută prin una din următoarele două metode:

— Ca soluție generală a ecuației omogene

$$\varepsilon_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + \varkappa_i \xi_i = 0$$

corespunzătoare ecuației (27.394) pentru $t > 0$, adică o soluție de forma

$$\xi_i = e^{-\mu_i t} \mathscr{X}_i \sin (k_{a_i} t + \alpha_i), \qquad (27.396)$$

dar cu constantele de integrare $\mathscr{X}_i$ și α_i determinate prin condițiile inițiale care definesc starea sistemului vibrant de la sfîrșitul acțiunii excitației impulsive, adică:

1°. În momentul încetării excitației impulsive sistemul vibrant nu s-a îndepărtat practic din poziția de echilibru static, rezultînd astfel următoarele condiții de poziție:

$$\xi_i(0) = 0, \qquad (27.397)$$

Scanned with CamScanner

2°. În momentul încetării acțiunii impulsive și deci în momentul începerii mișcării forțate ($t = 0$), toate impulsurile generalizate sînt egale cu zero, cu excepția impulsului generalizat corespunzător gradului de libertate j, care va avea valoarea h_j^0, rezultînd astfel condițiile

$$h_k(0) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r); \ h_j(0) = h_j^0. \quad (27.398)$$

Avînd în vedere expresia (24.23) a impulsului generalizat și relația (26.113) de trecere de la vitezele generalizate $\dot{w}_h$ la derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor principale, se pot scrie relațiile

$$h_k(0) = \sum_{h=1}^{r} a_{kh}\, \dot{w}_h(0) = \sum_{h=1}^{r} a_{kh} \sum_{j=1}^{r} \tau_{hj}\, \dot{\xi}_j(0) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{h=1}^{r} a_{kh}\, \tau_{hj} \right) \dot{\xi}_j(0).$$

Înmulțind fiecare din aceste relații cu τ_{ki}, $(k = 1, 2, \ldots, r)$ și sumîndu-le apoi după indicele k, rezultă egalitatea

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_{ki}\, h_k(0) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k,h=1}^{r} \tau_{ki} a_{kh}\, \tau_{hj} \right) \dot{\xi}_j(0),$$

sau încă, ținînd seama, pe de o parte, de condițiile (27.398), care fac ca în suma din membrul stîng să rămînă numai termenul pentru care indicele k ia valoarea j și, pe de altă parte, de condițiile (26.24), care fac ca în suma după indicele j din membrul drept să rămînă numai termenul pentru care acest indice ia valoarea i, se mai poate scrie

$$\tau_{ji}\, h_j^0 = \varepsilon_i\, \dot{\xi}_i(0), \quad (27.399)$$

obținîndu-se astfel și următoarele condiții inițiale de viteze:

$$\dot{\xi}_i(0) = \frac{\tau_{ji} h_j^0}{\varepsilon_i} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}, \quad (27.400)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Impunînd condițiile inițiale (27.397) și (27.400) în soluția (27.396) și în expresia derivatei ei în raport cu timpul, adică

$$\dot{\xi}_i = -\mu_i e^{-\mu_i t}\, \mathscr{X}_i \sin(k_{a_i} t + \alpha_i) + k_{a_i} e^{-\mu_i t}\, \mathscr{X}_i \cos(k_{a_i} t + \alpha_i),$$

rezultă următorul sistem de ecuații algebrice în necunoscutele $\mathscr{X}_i$ și α_i:

$$0 = \mathscr{X}_i \sin \alpha_i ; \quad \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} = \mathscr{X}_i \cos \alpha_i ,$$

cu rădăcinile

$$\alpha_i = 0 ; \quad \mathscr{X}_i = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} .$$

Se poate trage deci concluzia că răspunsul sistemului vibrant la excitația impuls considerată va fi determinat prin ecuația

$$\boxed{\xi_{if} = e^{-\mu_i t} \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} \sin (k_{a_i} t) = e^{-k_i \zeta_i t} \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} \sin (k_{a_i} t)} , \quad (27.401)$$

acest răspuns fiind reprezentat grafic în fig. 27.27.

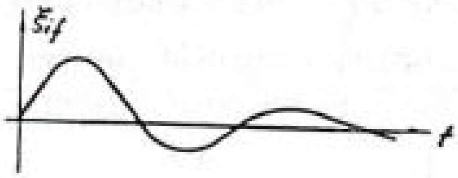


Fig. 27.27.

— Ca soluție a ecuației complete (27.395), determinată prin aplicarea transformării Fourier, rezultînd astfel, dacă se ține seama și de proprietățile (21.253) de operator liniar ale acestei transformate, egalitatea

$$\varepsilon_i \mathscr{F} [\ddot{\xi}_{if}(t)] + \eta_i \mathscr{F} [\dot{\xi}_{if}(t)] + \varkappa_i \mathscr{F} [\xi_{if}(t)] = \tau_{ji} h_j^0 \mathscr{F} [\delta(t)]. \quad (27.402)$$

Între expresiile

$$\mathscr{F} [\xi_{if}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \xi_{if}(t) \, dt \quad \text{și} \quad \mathscr{F} [\dot{\xi}_{if}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \dot{\xi}_{if}(t) \, dt,$$

care definesc transformatele Fourier ale funcțiilor $\xi_i(t)$ și $\dot{\xi}_i(t)$ poate fi stabilită, prin integrarea prin părți a ultimei (cu $\xi_{if}(t) \equiv 0$ pentru $t \leqslant 0$), relația

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\, \dot{\xi}_{if}(t)\, dt = [e^{-ipt}\, \xi_{if}\,(t)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ (ip) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\, \xi_{if}(t)\, dt = (ip) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\, \xi_{if}(t)\, dt,$$

rezultînd astfel următoarele expresii ale transformatelor Fourier ale derivatelor de ordinul întîi și doi în raport cu timpul ale funcției $\xi_{if}(t)$ în funcție de transformata Fourier a funcției $\xi_i(t)$:

$$\mathcal{F}\,[\dot{\xi}_{if}(t)] = (ip)\,\mathcal{F}\,[\xi_{if}(t)]; \quad \mathcal{F}\,[\ddot{\xi}_{if}(t)] = (ip)^2\,\mathcal{F}\,[\xi_{if}(t)].$$

Dacă se ține seama de relațiile precedente, precum și de condiția (21.296), care permite să se scrie egalitatea

$$\mathcal{F}\,[\delta(t)] = 1,$$

atunci ecuația (27.402) va putea fi retranscrisă sub forma

$$[\varepsilon_i(ip)^2 + \eta_i(ip) + \varkappa_i]\,\mathcal{F}\,[\xi_{if}(t)] = X_i^0, \tag{27.403}$$

rezultînd de aici următoarea expresie pentru transformata Fourier a răspunsului, numită încă și *spectrul funcției* $\xi_{if}(t)$:

$$\mathcal{F}\,[\xi_{if}(t)] = X_i^0 \frac{1}{\varkappa_i - \varepsilon_i p^2 + i\,\eta_i p} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i} \frac{1}{k_i^1 - p^2 + i2k_i\,\zeta_i\,p} \cdot \tag{27.404}$$

Răspunsul sistemului vibrant va fi dat de transformarea Fourier inversă

$$\xi_{if} = \mathcal{F}^{-1}\,[\mathcal{F}\,[\xi_{if}(t)]] = \frac{1}{2\pi} \frac{X_i^0}{\varepsilon_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{k_i^2 - p^2 + i\,2k_i\,\zeta_i\,p}\, dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{X_i^0}{\varepsilon_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp, \tag{27.405}$$

cu polii funcției de la numitorul fracției de sub semnul de integrare reprezentați prin rădăcinile ecuației

$$-p^2 + 2\,i\,k_i\zeta_i p + k_i^2 = 0,$$

Scanned with CamScanner

adică prin mărimile

$$p_{1,2} = i k_i \zeta_i \pm \sqrt{k_i^2 - k_i^2 \zeta_i^2} = \pm k_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} + i\, k_i \zeta_i = \pm k_{a_i} + \\ + i\, k_i \zeta_i . \qquad (27.406)$$

Conform teoremei lui Jordan, integrala din membrul drept al relației (27.405) va fi dată de relația

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{(\mathscr{C})} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp - \int_{(\Gamma)} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp \right],$$

sau încă, avînd în vedere faptul că ultima integrală are valoarea zero, mai rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp = \lim_{R\to\infty} \int_{(\mathscr{C})} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp = \frac{1}{i} \lim_{R\to\infty} \int_{(\mathscr{C})} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, d\,(ip), \quad (27.407)$$

(Γ) fiind semicercul de rază arbitrară R, cu centrul în origine, situat în semiplanul Im > 0, conținînd în el cei doi poli, (fig. 27.28), iar $(\mathscr{C})$ fiind curba închisă realizată prin completarea cercului (Γ) cu porțiunea AB a axei reale.

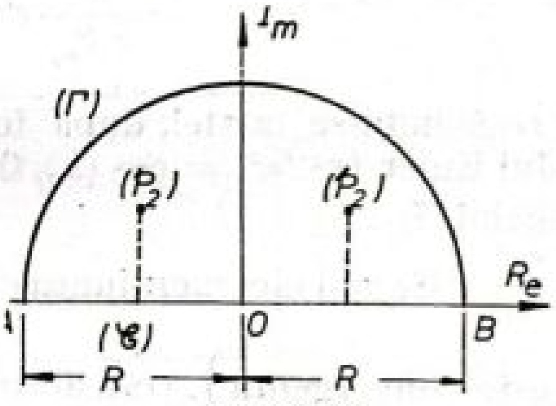


Fig. 27.28.

Dacă se ține seama acum și de teorema reziduurilor, care permite să se scrie relația

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(\mathscr{C})} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, d(ip) = \lim_{R\to\infty} \left[2\pi i \sum_{k=1}^{2} R_{ez}(p_k) \right] = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} R_{ez}(p_k),$$

în baza căreia egalitatea (27.407) va lua forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(ip)}{g(ip)}\, dp = 2\pi \sum_{k=1}^{2} R_{ez}(p_k) = 2\pi \left[\frac{h(ip_1)}{g'(ip_1)} + \frac{h(ip_2)}{g'(ip_2)} \right],$$

unde $g'(ip)$ are semnificația

$$g'(ip) = \frac{d}{d(ip)} [g(ip)] = \frac{d}{d(ip)} [k_i^2 + (ip)^2 + 2(ip)\, k_i \zeta_i] = \\ = 2\,[k_i \zeta_i + ip],$$

cu următoarele valori concrete corespunzătoare celor doi poli:

$$g'(ip_1) = 2k_{a_i}\, i\,;\; g'(ip_2) = -2k_{a_i}\, i,$$

atunci răspunsul (27.405) al sistemului vibrant va putea fi adus la forma

$$\xi_{if} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\left[\frac{h(ip_1)}{g'(ip_1)} + \frac{h(ip_2)}{g'(ip_2)}\right].$$

Înlocuind în ultima relație rădăcinile p_1 și p_2 cu valorile (27.406), rezultă ecuația

$$\xi_{if} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\left[\frac{e^{i(k_{a_i} + i k_i\zeta_i)t}}{2k_{a_i}\, i} + \frac{e^{i(-k_{a_i} + i k_i\zeta_i)t}}{-2k_{a_i}\, i}\right] =$$

$$= \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}}\, e^{-k_i\zeta_i t}\, \frac{e^{ik_{a_i}t} - e^{-ik_{a_i}t}}{2i},$$

regăsindu-se astfel, după folosirea formulelor de transformare ale lui Euler ($e^{\pm ik_{a_i}t} = \cos(k_{a_i} t) \pm i \sin(k_{a_i} t)$), forma (27.401) a răspunsului ξ_{if}.

Se mai face mențiunea că în condițiile acestei probleme, $\left(\int |\xi_{if}|\, dt\right.$ este convergentă$\left.\right)$, transformata Fourier a funcției $\xi_{if}(t)$ reprezintă o formă particulară a transformatei Laplace a aceleiași funcții, corespunzătoare înlocuirii lui (ip) cu s, adică se poate scrie

$$\mathcal{F}[\xi_{if}(t)] = \mathcal{L}[\xi_{if}(t)]_{s=ip} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\, \frac{1}{s^2 + 2k_i\zeta_i s + k_i^2} =$$

$$= \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\, \frac{1}{(s + k_i\zeta_i)^2 + k_i^2 - k_i^2\zeta_i^2} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i}\, \frac{1}{(s + k_i\zeta_i)^2 + k_{a_i}^2},$$

sau încă, amplificînd fracția cu k_{a_i}, mai rezultă

$$\mathcal{F}[\xi_{if}(t)] = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}}\, \frac{k_{a_i}}{(s + k_i\zeta_i)^2 + k_{a_i}^2} = \frac{X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}}\, \mathcal{X}_i(s), \qquad (27.408)$$

Scanned with CamScanner

acestei funcții imagine corespunzîndu-i, în tabelele de transformate Laplace, forma (27.401) a răspunsului ξ_{if}.

Cunoscînd toate cele r răspunsuri de forma (27.401), corespunzătoare celor r moduri proprii de vibrație, vor putea fi scrise acum și ecuațiile mișcării vibratorii forțate a sistemului vibrant, aceste din urmă ecuații avînd formele

$$\boxed{w_k = w_{kf} = \sum_{i=1}^{r} \tau_{ki}\xi_{if} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\tau_{ki}X_i^0}{\varepsilon_i k_{a_i}} e^{-k_i\zeta_i t} \sin(k_{a_i} t), \quad (k = 1, 2, \ldots, r)}, \tag{27.409}$$

care scot în evidență faptul că fiecare vibrație forțată rezultă din suprapunerea unui număr de r mișcări oscilatorii cvasi-armonice cu modulații exponențial-descrescătoare în amplitudine.

Revenind la expresia (27.401) a răspunsului $\xi_{if}(t)$, se va mai face observația că raportul

$$\boxed{\pi_i(t) = \frac{\xi_{if}}{X_i^0} = \frac{1}{\varepsilon_i k_{a_i}} e^{-k_i\zeta_i t} \sin(k_{a_i} t) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)} \tag{27.410}$$

reprezintă răspunsul sistemului vibrant la *o excitație impuls unitate*, ($h_j^0 = 1$; $X_i(t) = \tau_{ji}\delta(t) = \delta(t)$), acest răspuns purtînd încă și numele de *funcție pondere* corespunzătoare modului propriu de vibrație de ordinul i a sistemului vibrant.

Introducerea noțiunii de funcție pondere a creat posibilitatea studierii comportării dinamice în timp a unui sistem vibrant, așa cum introducerea noțiunii de funcție de răspuns în frecvență a permis studiul comportării dinamice a unui sistem vibrant sub aspectul frecvențial.

Considerînd un sistem vibrant supus, la momentul $t = 0$, unei excitații oarecari $S = S(t)$, aplicată unui element cu poziția determinată printr-un parametru lagrangeian w_j, acestei excitații îi va corespunde o forță generalizată $Q_j(t)$, respectiv o excitație în coordonate principale de forma

$$X_i(t) = \tau_{ji}S(t),$$

Scanned with CamScanner

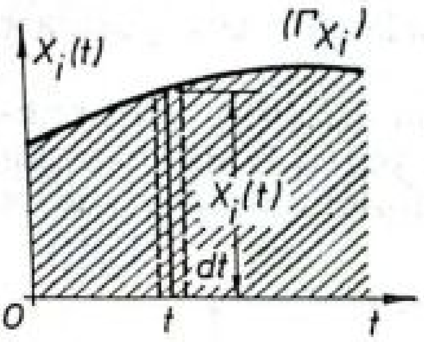


Fig. 27.29.

reprezentată grafic in fig. 24.29 prin curba (Γ_{x_i}); impulsul generalizat total creat de o asemenea excitație $X_i(t)$ din momentul inițial $t=0$ pînă la un moment $t>0$ va fi dat de relația

$$h_i^* = \int_0^t X_i(t)\, dt$$

și va fi reprezentat prin aria cuprinsă intre curba (Γ_{x_i}) și axa absciselor, (fig. 27.30, a). Această arie va putea fi considerată insă ca rezultind dintr-o infinitate de arii dreptunghiulare de bază $\Delta\tau_j$ și de

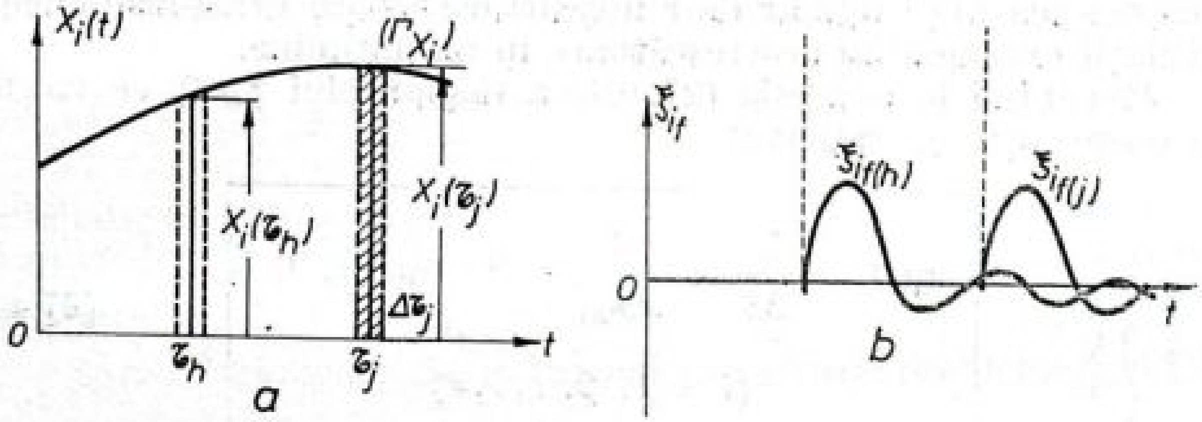


Fig. 27.30.

inălțime $X_i(\tau_j)$, (fig. 27.30, a), $\tau_j > 0$ fiind un moment oarecare al duratei de acțiune a excitației, adică se va putea scrie relația

$$h_i^* = \lim_{\Delta\tau_j \to 0} \sum_j X_i(\tau_j)\, \Delta\tau_j.$$

Pe de altă parte, fiecare impuls elementar $X_i(\tau_j)\,\Delta\tau_j$ va putea fi considerat ca fiind provocat de o excitație impulsivă, care, in baza celor arătate mai inainte, va putea fi exprimată prin produsul dintre funcția simbolică a lui Dirac corespunzătoare momentului $t = \tau_j(\delta(t) \to \delta(t-\tau_j))$ și dintre mărimea impulsului creat de excitația respectivă, dar cu dimensiunile fizice de excitație, adică se va putea scrie

$$X_i(\tau_j) = [X_i(\tau_j)\,\Delta\tau_j]\,\delta(t-\tau_j).$$

Acestei excitații îi va corespunde un răspuns de forma (27.401), dar pentru momentul $t' = t - \tau$, de forma

$$\xi_{if_{(j)}} = [X_i(\tau_j)\,\Delta\tau_j]\,\frac{e^{-k_i\zeta_i(t-\tau_j)}}{\varepsilon_i k_{a_i}}\sin[k_{ai}(t-\tau_j)] = [X_i(\tau_j)\,\Delta\tau_j]\,\pi_i(t-\tau_j), \tag{27.411}$$

$\pi_i(t - \tau_j)$ fiind funcția pondere corespunzătoare momentului τ_j, (fig. 24.30, b).

Întrucît sistemul vibrant este liniar, pentru el va fi valabil principiul suprapunerii, exprimat prin aceea că dacă o excitație $X_i(t)$ rezultă din însumarea unui număr de n excitații componente, adică

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} X_{ij},$$

unde γ_{ij} sînt niște constante, atunci și răspunsul sistemului este de forma

$$\xi_{if} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\,\xi_{if_{(j)}},$$

unde $\xi_{if_{(j)}}$ sînt răspunsurile provocate de fiecare din excitațiile componente, acționînd independent una de alta.

În baza acestui principiu, răspunsul sistemului vibrant la excitația oarecare $X_i(t)$ aplicată într-un interval de timp oarecare $[0, t]$ va putea fi scris sub forma

$$\xi_{if} = \lim_{\Delta\tau_j \to 0} \sum_j \xi_{if_{(j)}} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_j X_i(\tau_j)\,\Delta\tau_j \pi_i(t - \tau_j),$$

sau încă, sub forma echivalentă

$$\boxed{\xi_{if} = \int_0^t X_i(\tau)\,\pi_i(t-\tau)\,d\tau,} \tag{27.412}$$

fiind reprezentat deci printr-o integrală de tip Duhamel.

După cum se vede, cunoașterea funcției pondere permite să se determine răspunsul la orice excitație variabilă în timp, sau chiar constantă; în particular, cu ajutorul ei se va putea regăsi răspunsul,

Scanned with CamScanner

stabilit pe altă cale în unul din subpunctele precedente, la excitația în treaptă.

În cazul sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate, ($r = 1$), ecuația diferențială a mișcării în parametrul lagrangeian $w_1 = w$, scrisă în acest caz sub forma

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = Q(t), \tag{27.413}$$

va coincide chiar cu ecuația în coordonate principale

$$\varepsilon\ddot{\xi} + \eta\dot{\xi} + \varkappa\xi = X(t),$$

adică sînt valabile condițiile

$$w = \xi;\ a = \varepsilon;\ b = \eta;\ c = \varkappa;\ Q(t) = X(t), \tag{27.414}$$

deoarece în această situație matricea de transformare se reduce numai la elementul $\tau_{11} = 1$.

Datorită acestei identități, răspunsurile, corespunzătoare celor trei tipuri principale de excitații deterministe — neperiodice, periodice și de tip impulsiv —, ale unui sistem vibrant liniar cu mișcarea descrisă prin ecuația diferențială (27.413), vor putea fi obținute direct, prin particularizarea, în baza condițiilor (27.414), a răspunsurilor (27.240), (27.385) și (27.401), rezultînd astfel:

— *răspunsul sistemului vibrant la o excitație neperiodică:*

$$\boxed{w = e^{-\mu t} W^0 \sin(k_a t + \alpha) + \frac{1}{ak_a}\int_0^t Q(t)\, e^{-\mu(t-\tau)} \sin[k_a(t - \tau)]\,\mathrm{d}\tau;} \tag{27.415}$$

— *răspunsul sistemului vibrant la o excitație poliarmonică:*

$$\boxed{w = e^{-\mu t} W^0 \sin(k_a t + \alpha) + \sum_{\lambda=1}^{l} \mathscr{A}_\lambda \sin(\lambda p t - \beta_\lambda);} \tag{27.416}$$

— *răspunsul sistemului vibrant la o excitație de tip impulsiv:*

$$\boxed{w = e^{-k\zeta t}\frac{h^0}{ak_a}\sin(k_a t) = h^0\,\pi(t).} \tag{27.417}$$

Scanned with CamScanner

În relațiile precedente, W^0 și α reprezintă constante de integrare, h^0 este impulsul generalizat provocat de excitație, $\pi(t)$ reprezintă funcția pondere, $\mathscr{A}_\lambda$ și β_λ sînt amplitudinile și fazele inițiale ale armonicelor mișcării forțate, avînd, în baza relațiilor (27.325) și (27.326) expresiile

$$\mathscr{A}_\lambda = \frac{Q_\lambda^0}{\sqrt{(c - ap_\lambda^2)^2 + b^2 p_\lambda^2}}\ ;\ \beta_\lambda = \text{arc tg}\left[\frac{bp_\lambda}{c - ap_\lambda}\right],$$

iar k_a este pulsația proprie cu amortizare, determinată cu ajutorul relației (27.204), care, prin considerarea condițiilor (27.414) și a relațiilor (27.197), (27.198) și (27.199), va mai putea fi scrisă sub forma

$$k_a = k\sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{1 - \frac{b^2}{4ca}} = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}, \tag{27.418}$$

cu formele particulare

$$k_a = \sqrt{\frac{k_e}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} \tag{27.419}$$

pentru sistemele vibrante constituite dintr-un singur element în mișcare de translație rectilinie, cu poziția determinată prin parametrul lagrangeian $w = x^* = x_G - x_{G_{st}}$, $(a = M;\ b = C;\ c = k_l)$, respectiv

$$k_a = \sqrt{\frac{k_t}{J} - \left(\frac{D}{2J}\right)^2}, \tag{27.420}$$

pentru sistemele vibrante constituite dintr-un singur element în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe, cu poziția determinată prin parametrul lagrangeian $w = \varphi^* = \varphi - \varphi_{st}$, $(a = J;\ b = D;\ c = k_t)$.

Cazul modurilor proprii de vibrații cuplate prin amortizări. În acest caz ecuațiile diferențiale în coordonate principale vor avea formele (26.126) și, prin introducerea simbolului lui Kronecker, cu semnificațiile

$$\delta_{ki} \begin{cases} = 1 & k = i \\ = 0 & k \neq i \end{cases},\ (k, i = 1, 2, \ldots, r),$$

care permite să se facă inlocuirile

$$\varepsilon_k \ddot{\xi}_k = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ki}\varepsilon_i\ddot{\xi}_i; \ \varkappa_k\xi_k = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ki}\varkappa_i\xi_i, \ (k = 1, 2, \ldots, r),$$

vor mai putea fi scrise sub forma

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r} [\delta_{ki}\varepsilon_i\ddot{\xi}_i + \eta_{ki}\xi_i + \delta_{ki}\varkappa_i\xi_i] = X_\kappa(t) \\ (k = 1, 2, \ldots, r)\end{gathered}} \tag{27.421}$$

analogă sistemelor (27.8) de ecuații diferențiale în parametrii lagrangeieni ai sistemului; în consecință, integrarea sistemului (27.421) de ecuații diferențiale va putea fi efectuată după metodele expuse în subpunctul 27.1.1 al acestui paragraf.

27.1. Integrarea ecuației diferențiale a vibrațiilor liniare autoexcitate, efectuate în jurul pozițiilor de echilibru stabil, ale sistemelor vibrante cu un grad de libertate

În aplicațiile tehnice se întîlnesc situații cînd mișcarea vibratorie a unui sistem mecanic, ce conține și elemente amortizoare, capătă un caracter întreținut chiar în absența unor excitații exterioare, acest fenomen putîndu-se datora uneia din următoarele trei cauze principale:

— apariția unor excitații interioare, de regulă cu acțiune întîrziată, depinzînd, cel mai adesea, de deplasare;

— modificarea periodică în timp a unora dintre caracteristicile dinamice generalizate ale sistemului vibrant, acestea fiind, în majoritatea cazurilor, caracteristicile rigidității;

— asocierea, la rezistențele obișnuite de amortizare, a unor *rezistențe negative*, datorate prezenței frecărilor uscate în procesul vibratoriu.

Aceste trei tipuri principale de vibrații cu caracter întreținut care se produc în absența excitațiilor exterioare, au fost numite *vibrații autoexcitate* sau, încă, *autovibrații*.

Scanned with CamScanner

În cele ce urmează vor fi determinate răspunsurile sistemelor vibrante corespunzătoare primelor două tipuri de vibrații autoexcitate menționate mai sus.

a) Răspunsul sistemelor vibrante liniare la excitații interioare cu argument întîrziat

În subpunctul 26.1.2.1. al § 26 a fost stabilită ecuația diferențială (26.46) a vibrațiilor liniare în jurul poziției de echilibru static ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate, supus unei excitații cu argument întîrziat dependentă de deplasare; în aplicațiile concrete pot fi întîlnite însă și situații cînd excitațiile interioare cu argument întîrziat pot să depindă și de viteză și uneori chiar și de accelerații, adică în expresia forței generalizate corespunzătoare lor pot să apară termeni liniari atît în deplasări, cît și în viteze generalizate și în derivatele în raport cu timpul ale acestora din urmă.

Considerînd, în cele ce urmează, cazul cînd excitația interioară cu argument întîrziat se exprimă prin termeni liniari în deplasarea și în viteza generalizată a unui sistem vibrant cu un grad de libertate, ecuația diferențială ce va modela matematic mișcarea vibratorie autoexcitată a sa în jurul poziției de echilibru va avea forma

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = g\dot{w}(t-\tau) + hw(t-\tau), \qquad (27.422)$$

cu g, h și $\tau > 0$ constante reale.

Prin dezvoltarea în serie Taylor în jurul valorii t a expresiilor $\dot{w}(t-\tau)$ și $w(t-\tau)$ și prin considerarea relațiilor (26.49) și (26.52) — care se vor aplica și funcției $\dot{w}(t-\tau)$ —, vor putea fi făcute în ecuația (27.422) înlocuirile

$$\dot{w}(t-\tau) = \dot{w}(t)\, e^{-\tau z};\ w(t-\tau) = w(t)\, e^{-\tau z},$$

— unde z este o constantă complexă, care va putea fi determinată impunîndu-se condiția ca expresia

$$w = e^{zt} \qquad (27.423)$$

să reprezinte o soluție a ecuației (27.422) —, rezultînd astfel, după împărțirea prin a și introducerea notațiilor

$$\frac{b}{a} = 2\mu;\ \frac{c}{a} = k^2;\ \frac{g}{a} = q;\ \frac{h}{a} = p, \qquad (27.424)$$

Scanned with CamScanner

următoarea formă finală pentru ecuația diferențială stabilită mai sus:

$$\ddot{w} + 2\mu\dot{w} + k^2 w = q\,\dot{w}\,e^{-\tau s} + pwe^{-\tau s}. \qquad (27.425)$$

Impunînd condiția ca soluția (27.423) să verifice această din urmă ecuație diferențială, rezultă, după simplificarea lui e^{zt}, egalitatea

$$(z^2 + 2\mu z + k^2) - (qz + p)\,e^{-\tau z} = 0 \qquad (27.426)$$

care va reprezenta *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (27.425).

Luînd în considerație, în continuare, numai cazul care interesează în cea mai mare măsură tehnica vibrațiilor, cînd rădăcinile ecuației caracteristice (27.426) sînt pur imaginare, adică de forma

$$z = \mathrm{i}y$$

și cînd deci soluția (27.423) este periodică, ecuația caracteristică (27.426) va căpăta forma particulară

$$(k^2 - y^2) + \mathrm{i}2\mu y = (p + \mathrm{i}qy)\,e^{-\mathrm{i}\tau y},$$

căreia îi va corespunde următoarea relație între pătratele modulilor celor două mărimi complexe care figurează în cei doi membri ai ecuației

$$|(k^2 - y^2) + \mathrm{i}2\mu y|^2 = |p + \mathrm{i}qy|^2,$$

sau încă

$$(k^2 - y^2)^2 + 4\mu^2 y^2 = p^2 + q^2 y^2. \qquad (27.427)$$

Ecuația precedentă, retranscrisă încă, prin ordonarea termenilor după puterile lui y^2, sub forma

$$y^4 - 2\left(k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2\right) y^2 + k^2 - p^2 = 0$$

permite să se determine mărimile

$$y^2_{\mathrm{I,II}} = \left(k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2\right) \pm \sqrt{\left(k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2\right)^2 - (k^2 - p^2)} =$$

$$= \alpha \pm \beta, \qquad (27.428)$$

Scanned with CamScanner

pentru sistemele mecanice reale fiind satisfăcută, de regulă, condiția

$$\left(k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2\right)^2 - (k^2 - p^2) > 0,$$

care asigură caracterul real al rădăcinilor y_I^2 și y_{II}^2.

Pentru discutarea, în continuare, a problemei integrării ecuației diferențiale (27.425), vor fi luate în considerație următoarele două situații distincte:

a) Cazul cînd constantele μ, k, q și p satisfac condițiile

$$k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2 > 0\,;\; k^2 < p^2, \tag{27.429}$$

cu consecința

$$\beta > \alpha.$$

În această situație, ecuația (27.427) are numai două rădăcini reale

$$y_{1.2} = \pm\sqrt{\alpha + \beta} = \pm k_{a_1},$$

și deci ecuația caracteristică (27.426) are numai două rădăcini pur imaginare

$$z_1 = +\,\mathrm{i}k_{a_1}\,;\; z_2 = -\,\mathrm{i}k_{a_1},$$

iar soluția generală a ecuației diferențiale (27.425) va avea forma

$$w(t) = W_1 e^{\mathrm{i}k_{a_1}t} + W_2 e^{-\mathrm{i}k_{a_1}t}, \tag{27.430}$$

cu constantele arbitrare W_1 și W_2 complexe și conjugate, adică de forma

$$W_{1.2} = \frac{1}{2}(A \pm \mathrm{i}B).$$

Introducînd aceste ultime expresii in soluția (27.430) și folosind și cunoscutele formule de transformare ale lui Euler ($e^{\pm \mathrm{i}k_{a_1}t} = \cos(k_{a_1} t) \pm \mathrm{i}\sin(k_{a_1} t)$), rezultă, după reducerea termenilor asemenea, următoarea formă finală a soluției generale a ecuației diferențiale (27.425) în condițiile (27.429):

$$\boxed{w(t) = A\cos(k_{a_1} t) - B\sin(k_{a_1} t) = W_1^0 \sin(k_{a_1} t - \alpha_1)}\,. \tag{27.431}$$

Scanned with CamScanner

Constantele de integrare A și B, respectiv $W_1^0 = -\sqrt{A^2 + B^2}$ și $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}$, vor putea fi determinate observîndu-se că pînă la momentul $t = \tau$, cînd începe acțiunea întîrziată a excitației interioare, mișcarea sistemului vibrant, descrisă prin ecuația diferențială liniară omogenă

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = 0$$

este o vibrație cvasi-armonică cu modulație exponențial descrescătoare în amplitudine, determinată prin ecuația

$$w^* = e^{-\mu t}\, W^0 \sin(k_a\, t + \alpha^*), \tag{27.432}$$

cu μ avînd și acum semnificația (27.424), cu k_a dat de relația

$$k_a = \sqrt{k^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} \tag{27.433}$$

și cu constantele W^0 și α^* determinate cu ajutorul condițiilor inițiale

$$t = 0\ \{w^*(0) = w^{*0};\ \dot{w}^*(0) = \dot{w}^{*0}\},$$

care au permis scoaterea sistemului vibrant din poziția de echilibru static; caracterul continuu al mișcării și în momentul $t = \tau$, cînd începe acțiunea întîrziată a excitației interioare, implică satisfacerea condițiilor

$$w(\tau) = w^*(\tau);\ \dot{w}(\tau) = \dot{w}^*(\tau), \tag{27.434}$$

care vor putea servi pentru determinarea constantelor de integrare A și B.

b) Cazul cînd constantele μ, k, q și p satisfac condițiile

$$k^2 + \frac{q^2}{2} - 2\mu^2 > 0;\quad k^2 > p^2, \tag{27.435}$$

cu consecința

$$\beta < \alpha.$$

În această de a doua situație, ecuația (27.427) va avea un număr de patru rădăcini reale

$$y_{1.2} = \pm\sqrt{\alpha + \beta} = \pm k_{a_1};\ y_{3.4} = \pm\sqrt{\alpha - \beta} = \pm k_{a_2}, \tag{27.436}$$

iar ecuația caracteristică (27.426) va avea și ea patru rădăcini pur imaginare

$$z_{1,2} = \pm ik_{a_1}; \; z_{3,4} = \pm ik_{a_2}.$$

În consecință, soluția generală a ecuației diferențiale (27.425) va avea acum forma

$$w(t) = W_1 e^{ik_{a_1}t} + W_2 e^{-ik_{a_1}t} + W_3 e^{ik_{a_2}t} + W_4 e^{-ik_{a_2}t}, \qquad (27.437)$$

cu constantele W_1, W_2, W_3 și W_4 complexe și conjugate două cîte două, adică de forma

$$W_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 \pm iB_1); \qquad W_{3,4} = \frac{1}{2}(A_2 \pm iB_2).$$

Introducerea acestor expresii în soluția (27.437) și folosirea și de astă dată a formulelor de transformare ale lui Euler va permite să se aducă această soluție generală la forma

$$\boxed{\begin{aligned} w(t) &= [A_1 \cos(k_{a_1} t) - B \sin(k_{a_1} t)] + [A_2 \cos(k_{a_2} t) - B_2 \sin(k_{a_2} t)] = \\ &= W_1^0 \sin(k_{a_1} t + \alpha_1) + W_2^0 \sin(k_{a_2} t + \alpha_2). \end{aligned}}$$

(27.438)

Determinarea celor patru constante de integrare, A_1, B_1, A_2 și B_2, respectiv $W_1^0 = -\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $\alpha_1 = \text{arctg}\,\frac{A_1}{B_1}$, $W_2^0 = -\sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ și $\alpha_2 = \text{arctg}\,\frac{A_2}{B_2}$, se va face prin folosirea atît a condițiilor de continuitate a mișcării (27.434), cît și a unui număr de două noi condiții, care vor putea fi cele corespunzătoare deplasării și vitezei într-un moment oarecare $t^* > \tau$, în particular, cele corespunzătoare unui extremum al deplasării.

b) Răspunsul sistemelor vibrante liniare cu rigiditate variabilă periodic în timp. Ecuația diferențială care va modela matematic vibrațiile autoexcitate în jurul poziției de echilibru ale unui sistem vibrant liniar cu rigiditate variabilă periodic în timp, cu perioada T_0,

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

va putea fi scrisă direct, prin particularizarea fie a ecuației (26.57) în baza condițiilor

$$b = \text{const}\,;\ c = c(t) = c(t + T_0)\,;\ Q(t) \equiv 0, \tag{27.439}$$

fie a ecuațiilor (26.63), ținîndu-se seama de condițiile

$$g(t) = \frac{1}{a}\left[c(t) - \frac{b^2}{4a}\right] = g(t + T_0)\,;\quad f(t) \equiv 0. \tag{27.440}$$

Folosind ultima din cele două forme ale ecuației diferențiale a mișcării vibratorii autoexcitate, adică ecuația

$$\ddot{y} + g(t)y = 0, \tag{27.441}$$

se va discuta problema integrării ei după o prealabilă transformare a ecuației, realizată prin schimbarea de variabilă

$$t^* = \frac{\pi}{T_0}\,t, \tag{27.442}$$

care transformă funcția periodică de t, $g(t)$, într-o funcție periodică de t^*, $g\left(\frac{T_0}{\pi}\,t^*\right)$, cu perioada

$$T^* = \frac{\pi}{T_0}\cdot T_0 = \pi.$$

Efectuînd deci înlocuirea

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{d\left(\frac{T_0}{\pi}\,t^*\right)^2} = \frac{d^2y}{dt^*}\cdot\frac{1}{\frac{T_0}{\pi}}$$

și introducînd și notația

$$\frac{T_0}{\pi}\,g(t) = \frac{T_0}{\pi}\,g\left(\frac{T_0}{\pi}\,t^*\right) = g^*(t^*) = g^*(t^* + \pi)\,, \tag{27.443}$$

se va putea aduce ecuația diferențială (27.441) la forma

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} + g^*(t^*)y = 0\,. \tag{27.444}$$

O asemenea ecuație diferențială admite, după cum se știe, un sistem de două soluții fundamentale, liniar independente, $y_1 = y_1(t^*)$ și $y_2 = y_2(t^*)$, care vor putea fi alese astfel încît să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1; \quad \dot{y}_1(0) = 0; \\ y_2(0) &= 0; \quad \dot{y}_2(0) = 1. \end{aligned} \tag{27.445}$$

Întrucît ecuația diferențială (27.444) nu se modifică atunci cînd se înlocuiește variabila t^* cu variabila $(t^* + \pi)$, rezultă că funcțiile $y_1(t^* + \pi)$ și $y_2(t^* + \pi)$ vor fi și ele soluții ale ecuației (27.444), numai că, nemai fiind soluții fundamentale, ele vor putea fi exprimate sub forma unor combinații liniare ale soluțiilor fundamentale, adică vor putea fi scrise relațiile

$$\begin{aligned} y_1(t^* + \pi) &= a_{11}y_1(t^*) + a_{12}y_2(t^*); \\ y_2(t^* + \pi) &= a_{21}y_1(t^*) + a_{22}y_2(t^*), \end{aligned} \tag{27.446}$$

cu

$$\begin{cases} \dfrac{d^* y_1(t^* + \pi)}{dt^*} = a_{11}\dfrac{d^* y_1(t^*)}{dt^*} + a_{12}\dfrac{d^* y_2(t^*)}{dt^*}; \\[2ex] \dfrac{d^* y_2(t^* + \pi)}{dt^*} = a_{21}\dfrac{d^* y_1(t^*)}{dt^*} + a_{22}\dfrac{d^* y_2(t^*)}{dt^*}, \end{cases} \tag{27.447}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} și a_{22} fiind constante, care vor putea fi determinate impunîndu-se condițiile (27.445) în relațiile (27.446) și (27.447) scrise pentru valoarea $t^* = 0$ a argumentului; rezultă astfel următoarele valori pentru cele patru constante:

$$a_{11} = y_1(\pi); \; a_{12} = \left(\frac{dy_1(t^* + \pi)}{dt^*}\right)_{t^*=0}; \quad a_{21} = y_2(\pi);$$

$$a_{22} = \left(\frac{dy_2(t^* + \pi)}{dt^*}\right)_{t^*=0}. \tag{27.448}$$

Considerîndu-se cunoscute soluțiile fundamentale $y_1(t^*)$ și $y_2(t^*)$, soluția generală a ecuației diferențiale (27.444) va putea fi scrisă sub forma

$$y(t^*) = Ay_1(t^*) + By_2(t^*), \tag{27.449}$$

Scanned with CamScanner

— unde A și B sînt constante arbitrare — cu expresia

$$y(t^* + \pi) = Ay_1(t^* + \pi) + By_2(t^* + \pi) \tag{27.450}$$

pentru valoarea $(t^* + \pi)$ a argumentului.

Introducînd în ultima relație expresiile (27.446) ale funcțiilor $y_1(t^* + \pi)$ și $y_2(t^* + \pi)$, se obține, după scoaterea în factor comun a soluțiilor fundamentale, egalitatea

$$y(t^* + \pi) = (Aa_{11} + Ba_{21})\, y_1(t^*) + (Aa_{12} + Ba_{22})y_2(t^*). \tag{27.451}$$

Presupunînd că se poate găsi o constantă z — care poate fi reală, imaginară, sau complexă — astfel încît să fie satisfăcute condițiile

$$Aa_{11} + Ba_{21} = zA\,;\; Aa_{12} + Ba_{22} = zB \tag{27.452}$$

și ținînd seama și de relația (27.449), se va putea aduce ecuația (27.451) la forma

$$y(t^* + \pi) = z[Ay_1(t^*) + By_2(t^*)] = zy(t^*). \tag{27.453}$$

Constanta z va putea fi determinată observîndu-se că în ipoteza că cele două constante arbitrare A și B sînt diferite de zero, relațiile (27.452), scrise încă sub forma

$$\begin{gathered}(a_{11} - z)\,A + a_{21}B = 0\,; \\ a_{12}A + (a_{22} - z)\,B = 0\end{gathered} \tag{27.454}$$

formează un sistem de două ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele A și B, care va admite o soluție nebanală numai în cazul cînd va fi satisfăcută condiția

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - z \end{vmatrix} = 0, \tag{27.455}$$

reprezentînd o ecuație de gradul 2 în z, de forma

$$z^2 - 2Cz + D = 0, \tag{27.456}$$

cu

$$C = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\,;\; D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{27.457}$$

Se va demonstra mai întîi că termenul liber D are valoarea 1.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, pe de o parte, impunînd condiția ca cele două soluții fundamentale să verifice ecuația diferențială (27.444), rezultă egalitățile

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^{*2}} + g^*(t^*)\, y = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^{*2}} + g^*(t^*)\, y_2 = 0$$

și eliminarea lui $g^*(t^*)$ între ele conduce la relația

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^{*2}}\, y_1 - \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^{*2}}\, y_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}\left[\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t^*}\, y_1 - \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t^*}\, y_2\right] = 0,$$

cu consecința

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t^*}\, y_1 - y_2 \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t^*} = c = \mathrm{const}, \qquad (27.458)$$

în care pentru constanta c rezultă, prin impunerea condițiilor (24.485), valoarea $c = 1$.

Pe de altă parte, relația (27.458) fiind valabilă pentru orice valoare a argumentului t^*, va fi valabilă și pentru valoarea $t^* = \pi$, rezultînd astfel, dacă se ține seama și de relațiile (27.448), concluzia

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t^*}\right)_{t^*=\pi} \cdot y_1(\pi) - y_2(\pi)\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t^*}\right)_{t^*=\pi} = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = D = 1. \qquad (27.459)$$

Ecuația (27.455) va lua astfel forma,

$$z^2 - 2Cz - 1 = 0, \qquad (27.460)$$

fiind numită *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (27.444); iar rădăcinile ei

$$z_{1\cdot 2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1}, \qquad (27.461)$$

numite și ele *rădăcini caracteristice*, vor satisface relația

$$z_1 z_2 = 1. \qquad (27.462)$$

Dacă transformarea (27.446) se realizează astfel încît să fie satisfăcute condițiile

$$a_{12} = \left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t^*}\right)_{t^*=\pi} = 0\,; \; a_{21} = y_2(\pi) = 0, \qquad (27.463)$$

Scanned with CamScanner

ceea ce face ca din relația (27.459) să rezulte condiția

$$a_{11}a_{22} = 1, \tag{27.464}$$

atunci rădăcinile ecuației caracteristice (27.460) coincid chiar cu coeficienții a_{11} și a_{22}, așa cum rezultă mai jos

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 - 1} =$$
$$= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}),$$

adică

$$z_1 = a_{11};\ z_2 = a_{22},$$

și relațiile (27.446) iau formele particulare

$$y_1(t^* + \pi) = a_{11}y_1(t^*) = z_1y_1(t^*);$$
$$y_2(t^* + \pi) = a_{22}y_2(t^*) = z_2y_2(t^*). \tag{27.465}$$

Asemenea soluții, care pot satisface relațiile de mai sus, sînt funcțiile de forma

$$y_i = e^{\frac{t^*}{\pi}\ln z_i}\,\Phi_i,\ (i = 1, 2), \tag{27.466}$$

unde Φ_i $(i = 1, 2)$ sînt funcții periodice de t^*, de perioadă π, satisfăcînd deci relațiile

$$\Phi_i(t^* + \pi) = \Phi_i(t^*),\ (i = 1, 2),$$

afirmație care poate fi verificată urmărindu-se șirul de relații de mai jos:

$$y_i(t^* + \pi) = e^{\frac{t^*+\pi}{\pi}\ln z_i}\,\Phi_i(t^* + \pi) = e^{\ln z_i}\,e^{\frac{t^*}{\pi}\ln z_i}\,\Phi_i(t^*) =$$
$$= z_i e^{\frac{t^*}{\pi}\ln z_i}\,\Phi_i(t^*) = z_i y_i(t^*).$$

Adoptînd deci soluții fundamentale de forma (27.465), va rezulta următoarea formă pentru soluția generală a ecuației diferențiale (27.444):

$$\boxed{y = Ae^{\nu_1 t^*}\,\Phi_1(t^*) + Be^{\nu_2 t^*}\,\Phi_2(t^*)} \tag{27.467}$$

unde prin ν_i, $(i = 1, 2)$, au fost notate mărimile

$$\nu_i = \frac{1}{\pi} \ln z_i, \ (i = 1, 2). \tag{27.468}$$

Discuția precedentă permite să se tragă concluzia că determinarea soluției generale a ecuației diferențiale (27.444) se poate reduce, în ultimă instanță, la rezolvarea următoarelor două probleme principale:

1°. Construirea funcțiilor periodice $\Phi_i(t^*)$, $(i=1, 2)$, de perioadă π, care intră în componența celor două soluții fundamentale ale ecuației diferențiale (27.444);

2°. Stabilirea ecuației caracteristice (27.460) și determinarea celor două rădăcini ale ei.

Prima problemă se rezolvă, obișnuit, prin dezvoltarea funcțiilor periodice $\Phi_i(t^*)$ în serii Fourier, dezvoltări care, în condiții de convergență a seriilor, vor putea fi înlocuite cu polinoame trigonometrice de un anumit ordin, depinzînd de precizia urmărită în rezolvarea problemei: este recomandabilă, în aceste cazuri, folosirea formei complexe (21.242) a dezvoltării, prezentată în § 21, subpunctul 21.1.2.1. pentru funcția $w(t)$.

Renunțîndu-se la factorul numeric $\frac{1}{2}$, care va putea intra în constantele de integrare A și B din soluția (27.467), și ținînd seama de faptul că pulsația fundamentală a dezvoltării este acum

$$p = \frac{2\pi}{T^*} = \frac{2\pi}{\pi} = 2,$$

vor rezulta următoarele expresii ale funcțiilor

$$\Phi_i(t^*) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_\lambda^{(i)} e^{i\lambda p t^*} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_{2\lambda}^{(i)} e^{i2\lambda t^*}, \ (i = 1, 2), \tag{27.469}$$

cu

$$C_{2\lambda}^{(i)} = C_\lambda^{(i)}, \ (\lambda = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty; \ i = 1, 2).$$

Detrminarea coeficienților seriilor de mai sus se va face, în principiu, impunîndu-se condiția ca soluțiile fundamentale (27.466) să verifice ecuația (27.444); se înțelege însă că în cazul unei probleme concrete, cu date numerice determinate, rezolvarea nu va fi posibilă

Scanned with CamScanner

decît în cazul înlocuirii seriilor cu polinoame trigonometrice cu un număr relativ mic de termeni.

Problema determinării funcțiilor $\Phi_i(t^*)$ se simplifică într-oarecare măsură în cazul cînd funcția periodică $g^*(t^*)$ este pară, adică satisface condiția

$$g^*(t^*) = g^*(-t^*)$$

și cînd exponentul caracteristic ν este complex.

Într-adevăr, întrucît în aceste condiții ecuația diferențială (27.444) nu se schimbă la înlocuirea lui t^* cu $(-t^*)$, rezultă că dacă expresia

$$y_1(t^*) = e^{\nu t^*}\,\Phi(t^*)$$

este o soluție fundamentală, atunci expresia

$$y_2(t^*) = e^{-\nu t^*}\,\Phi(-t^*)$$

este de asemenea o soluție fundamentală, independentă de prima, ea reprezentînd deci cea de-a doua soluție fundamentală a ecuației diferențiale (27.444).

În consecință, în aceste cazuri soluția generală (27.467) a ecuației diferențiale (27.444) va lua forma

$$\boxed{y(t^*) = Ae^{\nu t^*} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_{2\lambda}\, e^{i2\lambda t^*} + Be^{-\nu t^*} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_{2\lambda}\, e^{-i2\lambda t^*}} \qquad (27.470)$$

necesitînd, pentru construirea ei, determinarea unui singur set de coeficienți $C_{2\lambda}$.

Trecînd la discutarea celei de-a doua probleme — stabilirea ecuației caracteristice (27.460) și determinarea celor două rădăcini ale ei —, se va face observația generală că datorită dificultăților întîmpinate în rezolvarea ei, se înlocuiește, de regulă, ecuația (27.460) cu o altă ecuație, avînd ca necunoscută chiar exponentul caracteristic $\nu = \dfrac{1}{\pi}\ln z$, stabilită cu un anumit grad de aproximare dependent de forma particulară a funcției $g^*(t)$ și care se rezolvă prin metode de recurență.

O discuție se impune totuși în legătură cu natura rădăcinilor ecuației caracteristice (27.460), natură care poate explica caracterul stabil, sau nestabil, al vibrației autoexcitate.

Scanned with CamScanner

În acest scop, soluția generală (27.467) va fi adusă la o altă formă, admițîndu-se cazul mai general, cînd rădăcinile caracteristice z_i, $(i = 1, 2)$ sînt complexe, adică se pot scrie relațiile

$$z_i = \alpha_i + i\beta_i = |z_i|\, e^{i\varphi_i},\ (i = 1, 2), \qquad (27.471)$$

cu

$$|z_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2};\ \varphi_i = \operatorname{arctg}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\ (i = 1, 2).$$

Prin logaritmarea relațiilor (27.471) rezultă expresiile

$$\ln z_i = \ln|z_i| + \ln e^{i\varphi_i} = \ln|z_i| + i\varphi_i,\ (i = 1, 2)$$

care, introduse în ecuația (27.467) o vor aduce la forma

$$y(t^*) = Ae^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_1|}\,[e^{i\frac{\varphi_1}{\pi}t^*}\,\Phi_1(t^*) + Be^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_2|}\,[e^{\frac{i\varphi_2}{\pi}t^*}\,\Phi_2(t^*)],$$

sau încă, introducînd notațiile

$$\psi_i(t^*) = e^{i\frac{\varphi_i}{\pi}t^*}\,\Phi_i(t^*),\ (i = 1, 2), \qquad (27.472)$$

la forma

$$y(t^*) = Ae^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_1|}\,\psi_1(t^*) + Be^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_2|}\,\psi_2(t^*). \qquad (27.473)$$

Cum natura rădăcinilor z_i va depinde de valoarea (27.457) a coeficientului C al ecuației caracteristice (27.460), vor trebui luate în considerație următoarele trei situații distincte:

— *Cazul I*, caracterizat prin condiția

$$|C| = \frac{1}{2}|a_{11} + a_{22}| > 1, \qquad (27.474)$$

cînd rădăcinile z_1 și z_2, date de relația (27.461), vor fi reale și distincte, rezultînd de aici condițiile

$$\varphi_i = 0,\ (i = 1, 2),$$

în baza cărora soluția (27.473) va lua forma

$$y(t^*) = Ae^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_1|}\,\Phi_1(t^*) + Be^{\frac{t^*}{\pi}\ln|z_2|}\,\Phi_2(t^*). \qquad (27.475)$$

Scanned with CamScanner

Din relația (27.462) rezultă însă că în acest caz modulul uneia din rădăcini — de ex. z_1 — va fi supraunitar — deci logaritmul natural al lui va fi pozitiv —, iar al celeilalte rădăcini — z_2 — va fi subunitar — deci logaritmul natural al lui va fi negativ —, adică se vor putea scrie relațiile

$$\frac{1}{\pi} \ln |z_1| = \mu_1 > 0; \quad \frac{1}{\pi} \ln |z_2| = -\mu_2 < 0.$$

În consecință, soluția (27.475) va lua forma

$$y(t^*) = Ae^{\mu_1 t^*} \Phi_1(t^*) + Be^{-\mu_2 t^*} \Phi_2(t^*), \tag{27.476}$$

care permite să se observe că în timp ce cea de-a doua componentă a soluției scade exponențial cu timpul, amortizîndu-se, prima componentă crește nelimitat cu timpul.

— *Cazul II*, corespunzător condiției

$$|C| = \frac{1}{2} |a_{11} + a_{22}| < 1, \tag{27.477}$$

pentru care vor rezulta rădăcini caracteristice complexe și conjugate, adică de forma

$$z_1 = \alpha + i\beta; \; z_2 = \alpha - i\beta,$$

cu

$$z_1 z_2 = \alpha^2 + \beta^2 = |z_1| = |z_2| \tag{27.478}$$

Comparînd relația (27.478) cu relația (27.462), rezultă concluzia

$$\ln |z_1| = \ln |z_2| = 0,$$

în baza căreia soluția generală (27.473) va lua forma

$$y(t^*) = Ae^{i\frac{\varphi}{\pi}t^*} \Phi_1(t^*) + Be^{-i\frac{\varphi}{\pi}t^*} \Phi_2(t^*), \tag{27.479}$$

cu

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Această formă a soluției generale scoate în evidență caracterul cel puțin aproape periodic ($|y(t^*)|$ este mărginit) al vibrației autoexcitate.

Scanned with CamScanner

— *Cazul III*, caracterizat prin condiția

$$C = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \pm 1, \tag{27.480}$$

pentru care rădăcinile caracteristice, determinate prin relația (27.461), iau valorile particulare

$$z_1 = z_2 = 1, \text{ respectiv: } z_1 = z_2 = -1.$$

Se demonstrează că în acest caz soluția generală este de forma

$$y^*(t^*) = \Phi_1^*(t^*) + t^*\Phi_2^*(t^*), \tag{27.481}$$

care scoate în evidență creșterea nelimitată cu timpul a amplitudinilor uneia din cele două componente ale ei.

În continuare va fi aplicată teoria generală expusă mai sus la determinarea soluției generale a următoarelor două tipuri particulare de ecuații diferențiale de forma (27.444):

Soluția generală a ecuației Hill. Ca urmare a schimbării de variabilă (27.442), ecuația Hill (26.67), stabilită în § 26.1.2, adică

$$\ddot{y} + \left[\frac{1}{2} g_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_\lambda \cos(\lambda\, pt)\right] y = 0$$

va putea fi adusă, prin introducerea notațiilor

$$\frac{1}{2} g_0 \frac{T_0}{\pi} = g_0^*\,; \quad \frac{T_0}{\pi} g_\lambda = 2g_{2\lambda}^*, \tag{27.482}$$

la forma

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} + \left[g_0^* + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} g_{2\lambda}^* \cos(2\lambda\, t^*)\right] y = 0. \tag{27.483}$$

Adoptînd o soluție fundamentală de forma

$$y(t^*) = e^{zt^*} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{2h}\, e^{i2ht^*}, \tag{27.484}$$

cu

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} = e^{zt^*} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (z + i2h)^2 C_{2h}\, e^{i2ht^*} = e^{zt^*} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (z + i2j)^2 C_{2j} e^{i2jt^*}$$

Scanned with CamScanner

și impunînd condiția ca această soluție să verifice ecuația (27.483), rezultă, după împărțirea prin e^{zt^*}, egalitatea

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} [(z + i2h)^2 + g_0^*]\, C_{2h}\, e^{i2ht^*} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2g_{2\lambda}^* \cos(2\lambda t^*) \cdot C_{2j}\, e^{i2jt^*} = 0, \tag{27.485}$$

care va reprezenta *ecuația caracteristică a ecuației Hill.*

Observînd că pot fi făcute înlocuirile

$$\cos (2\lambda t^*) = \frac{1}{2} (e^{i2\lambda t^*} + e^{-i2\lambda t^*})$$

și

$$2g_{2\lambda}^* \cos (2\lambda t^*)\, C_{2j}\, e^{i2jt^*} = g_{2\lambda}^* C_{2j}\, [e^{i2(j+\lambda)t^*} + e^{i2(j-\lambda)t^*}],$$

se va mai putea scrie ecuația caracteristică (27.485) sub forma

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} [(z + i2h)^2 + g_0^*]\, C_{2h}\, e^{i2ht} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_{2\lambda}^* C_{2j}\, e^{i2(j+\lambda)t^*} +$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_{2\lambda}^* C_{2j}\, e^{i2(j-\lambda)t^*} = 0,$$

sau încă, înlocuind în prima sumă dublă indicele $(j + \lambda)$ cu indicele h, $(j + \lambda = h; 2j = 2h - 2\lambda)$, iar în cea de-a doua sumă dublă indicele $(j - \lambda)$ cu indicele h, $(j - \lambda = h; 2j = 2h + 2\lambda)$, înlocuiri care permit scoaterea exponențialelor e^{i2ht^*} în factori comuni —, se va mai putea scrie

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ [(z + i2h)^2 + g_0^*)\, C_{2h} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_{2\lambda}^* (C_{2h-2\lambda} + C_{2h+2\lambda}) \right\} e^{i2ht^*} = 0. \tag{27.486}$$

Pentru ca o asemenea egalitate să aibă loc, este necesar ca toți coeficienții exponențialelor e^{i2ht^*}, $(h = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots +\infty)$, să fie egali cu zero, această concluzie conducînd la urmă-

Scanned with CamScanner

torul sistem cu un număr infinit de ecuații algebrice liniare omogene în coeficienții necunoscuți C_{2h};

$$[(z+i2h)^2+g_0^*]\,C_{2h}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_{2\lambda}^*(C_{2h-2\lambda}+C_{2h+2\lambda})=0$$

$$(h=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots+\infty). \tag{27.487}$$

Condiția de compatibilitate a acestui sistem de ecuații — anularea determinantului $\Delta(z)$ al coeficienților necunoscutelor C_{2h} — va conduce la o ecuație algebrică în z, care va putea, în cazul rezolvării ei, să furnizeze valorile acestei constante; se demonstrează [22] însă că dacă valorile coeficienților g_2^*, g_4^*, g_6^*,... sînt mici în comparație cu coeficientul g_0^*, acest determinant ia, pentru $z=0$, valoarea aproximativă

$$\Delta(0)\approx 1+\frac{\pi\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{g_0^*}\right)}{4\sqrt{g_0^*}}\left[\frac{g_2^{*2}}{1-g_0^*}+\frac{g_4^{*2}}{2^2-g_0^*}+\frac{g_6^{*2}}{3^2-g_0^*}+\ldots\right] \tag{27.488}$$

și că valorile lui z sînt date de relațiile

$$\cos(iz\pi)=1-\Delta(0)[1-\cos(\pi\sqrt{g_0^*})] \tag{27.489}$$

și

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}iz\pi\right)=\Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{g_0^*}\right), \tag{27.490}$$

fiecare din ele furnizînd cîte două rădăcini particulare de mărimi egale și semne contrarii.

Pentru o asemenea rădăcină z, se vor putea calcula expresiile

$$\delta_{2h}=(z+i2h)^2+g_0^*=g_0^*-(2h-iz)^2$$

$$(h=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty) \tag{27.491}$$

și, prin împărțirea ecuațiilor (27.487) la aceste expresii — aceasta, evident, în ipoteza că toți δ_{2h} sînt diferiți de zero — ecuațiile (27.487) vor putea fi aduse la forma

$$C_{2h}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{g_{2\lambda}^*}{\delta_{2h}}(C_{2h-2\lambda}+C_{2h+2\lambda})=0,$$

$$(h=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty). \tag{27.492}$$

Scanned with CamScanner

Datorită convergenței, în general foarte puternică, a seriilor ce figurează în expresiile funcțiilor $g^*(t^*)$ și $y(t^*)$, se înlocuiesc aceste serii cu sume cu un număr finit de termeni, și anume cu suma primilor r termeni ($\lambda = 1, 2, \ldots, r$) în cazul primei serii și cu suma unui număr de $2r$ termeni consecutivi, grupați simetric de o parte și de alta a termenului central, ($\lambda = -r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r$), în cazul celei de-a doua serii; o soluție cu aproximație acceptabilă pentru cazul cînd coeficienții $g^*_{2\lambda}$ sînt mici în comparație cu g^*_0 poate fi obținută pentru valoarea $r = 2$, ($h = -2, -1, 0, 1, 2$; $\lambda = 1, 2$), cînd sistemul (27.492) de ecuații se reduce numai la următoarele cinci:

$$C_{2\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{g^*_{2\lambda}}{\delta_{2h}} (C_{2h-2\lambda} + C_{2h+2\lambda}) = 0.$$

$$(h = 2, -1, 0; 1, 2). \qquad (27.493)$$

Scriind ecuațiile dezvoltat pentru fiecare valoare a indicelui h, neglijînd în aceste ecuații termenii ce conțin pe C_{-8}, C_{-6}, C_6 și C_{-8} și ordonînd apoi termenii, rezultă următoarea formă concretă pentru sistemul (27.493) de ecuații algebrice în necunoscutele C_{-4}, C_{-2}, C_0, C_2 și C_4:

$$C_{-4} + \frac{g^*_2}{\delta_{-4}} C_{-2} + \frac{g^*_4}{\delta_{-4}} C_0 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_4 = 0;$$

$$\frac{g^*_2}{\delta_{-2}} C_{-4} + C_{-2} + \frac{g^*_2}{\delta_{-2}} C_0 + \frac{g^*_4}{\delta_{-2}} C_2 + 0 \cdot C_4 = 0;$$

$$\frac{g^*_4}{\delta_0} C_{-4} + \frac{g^*_2}{\delta_0} C_{-2} + C_0 + \frac{g^*_2}{\delta_0} C_2 + \frac{g^*_4}{\delta_0} C_4 = 0; \qquad (27.494)$$

$$0 \cdot C_{-4} + \frac{g^*_4}{\delta_2} C_{-2} + \frac{g^*_2}{\delta_2} C_0 + C_2 + \frac{g^*_2}{\delta_2} C_4 = 0;$$

$$0 \cdot C_{-4} + 0 \cdot C_{-2} + \frac{g^*_4}{\delta_4} C_0 + \frac{g^*_2}{\delta_4} C_2 + C_4 = 0.$$

Formînd un sistem cu patru din ecuațiile precedente și rezolvîndu-l în raport cu necunoscutele C_{-4}, C_{-2}, C_2 și C_4, acestea din urmă

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

vor putea fi exprimate în funcție de coeficientul central C_0 prin relații de forma

$$C_{2h} = \gamma_{2h}\, C_0, \; (h = -2, -1, 1, 2),$$

γ_{2h} fiind mărimi cunoscute, (cu : $\gamma_0 = 1$).

În consecință, soluția fundamentală (27.484) va putea fi scrisă acum sub forma determinată (pînă la constanta C_0) :

$$y(t^*) = e^{zt^*} C_0 \sum_{h=-2}^{+2} r_{2h}\, e^{i2ht^*},$$

iar soluția generală a ecuației Hill — de forma (27.470), deoarece funcția $g^*(t^*)$ este pară — va fi reprezentată prin ecuația

$$\boxed{y(t^*) = Ae^{zt^*} \sum_{h=-2}^{+2} \gamma_{2h}\, e^{i2ht^*} + Be^{-zt^*} \sum_{h=-2}^{+2} \gamma_{2h}\, e^{-i2ht}} \qquad (27.495)$$

în care, în constantele de integrare A și B, care vor putea fi determinate cu ajutorul condițiilor inițiale, a fost înglobat și coeficientul necunoscut C_0.

Soluția generală a ecației Mathieu. În baza schimbării (27.442) de variabilă și a introducerii notațiilor

$$\frac{1}{2} g_0 \frac{T_0}{\pi} = a\,; \quad \frac{T_0}{\pi} g_1 = -2q,$$

ecuația Mathieu (26.68) stabilită în § 26 subpunctul 26.1.2.2, adică

$$\ddot{y} + \left[\frac{1}{2} g_0 + g_1 \cos (pt)\right] y = 0,$$

va lua forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^{*2}} + [a - 2q \cos (2t^*)]\, y = 0. \qquad (27.496)$$

Considerînd, în cele ce urmează, numai cazul cînd rădăcinile caracteristice sînt imaginare, soluția generală a acestei ecuații diferențiale va avea forma (27.479), cu

$$\Phi_1(t^*) = \Phi(t^*)\,; \; \Phi_2(t^*) = \Phi(-t^*),$$

Scanned with CamScanner

ca urmare a faptului că nici ecuația Mathieu nu se modifică la schimbarea variabilei t^* în $(-t^*)$; în consecință, folosind și acum dezvoltarea în serie Fourier complexă pentru funcția $\Phi(t^*)$ și introducînd și notația

$$\frac{\varphi}{\pi} = \delta,$$

soluția generală a ecuației (27.496) va avea forma

$$\boxed{y(t^*) = Ae^{i\delta t^*}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{2h}\, e^{i2ht^*} + Be^{-i\delta t^*}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{2h}\, e^{-i2ht^*}} \qquad (27.497)$$

cu A și B reprezentînd și acum constante de integrare, ce vor putea fi determinate cu ajutorul condițiilor inițiale.

În legătură cu calculul exponentului caracteristic $\nu = i\delta$, se menționează faptul că se demonstrează [14], că el depinde de valorile parametrilor a și q ai ecuației Mathieu, valori care pot determina mai multe zone de stabilitate; pentru prima zonă, calculul exponentului ν poate fi făcut cu ajutorul ecuației aproximative

$$\nu^2 \approx a - \frac{1}{2(\nu^2-1)}q^2 - \frac{5\nu^2+7}{32(\nu^2-1)^3(\nu^2-4)}q^4 - $$
$$- \frac{9\nu^4+58\nu^2+29}{64(\nu^2-1)^5(\nu^2-4)(\nu^2-9)}q^6 + \ldots, \qquad (27.498)$$

utilizabilă însă numai în cazul cînd este satisfăcută codiția

$$|a| \gg \left|\frac{q^2}{2(\nu^2-1)}\right|$$

rezolvarea ecuației făcîndu-se prin aproximări succesive: se consideră în primă aproximație

$$\nu_{(1)}^2 = a,$$

apoi se folosește o a doua aproximație, cu ajutorul relației

$$\nu_{(2)}^2 = a - \frac{q^2}{2(\nu_{(1)}^2-1)} = a - \frac{q^2}{2(a-1)}$$

Scanned with CamScanner

și, in fine, se realizează cea de-a treia aproximație în baza relației

$$\nu_{(3)}^2 = a - \frac{q^2}{2(\nu_{(2)}^2 - 1)} - \frac{5\nu_{(1)}^2 + 7}{32(\nu_{(1)}^2 - 1)^3 (\nu_{(1)}^2 - 4)} q^4 -$$

$$- \frac{9\nu_{(1)}^4 + 58\,\nu_{(1)}^2 + 29}{64(\nu_{(1)}^2 - 1)^5 (\nu_{(1)}^2 - 4)(\nu_{(1)}^2 - 9)} q^6.$$

În ceea ce privește determinarea coeficienților seriilor Fourier complexe ce figurează în soluția generală, se va folosi și aici sistemul de ecuații (27.487), dar cu seria după λ redusă la un singur termen: avînd în vedere corespondența dintre notațiile introduse în cazul celor două ecuații, adică

$$g_0^* = a\,;\; g_{22}^* = -q\,;\; z = i\delta,$$

cu

$$g_0^* + (z + i2h)^2 = g_0^* - (2h - iz)^2 = a - (2h + \delta)^2,$$

sistemul (27.487) de ecuații algebrice va fi scris acum sub forma

$$[a - (2h + \delta)^2]\, C_{2h} - q(C_{2h-2} + C_{2h+2}) = 0$$

$$(h = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty.$$

Se înțelege însă că și aici nu se va putea lucra, în problemele concrete (pentru care se recomandă folosirea în paralel a MEC), decît cu un număr finit de termeni ai seriei trigonometrice, ai căror coeficienți vor fi determinați repetîndu-se calculele prezentate în cazul ecuației Hill.

27.2. *Studiul răspunsurilor sistemelor vibrante neliniare*

După cum s-a arătat în § 26, subpunctul 26.1.1., vibrațiile neliniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate sînt descrise de ecuația generală (26.15), adică

$$\ddot{w} + G(w, \dot{w}) + F(t) = 0, \qquad (27.499)$$

Scanned with CamScanner

cu forma particulară (26.20) dacă este vorba de sisteme neautonome și de ecuația generală (26.21), adică

$$\ddot{w} + G(w, \dot{w}) = 0, \qquad (27.500)$$

cu formele particulare (26.24), (26.27), (27.31), pentru sistemele vibrante neliniare autonome.

Discutind problema integrării acestor ecuații, trebuie făcută de la început precizarea că obținerea unei soluții exacte este posibilă doar pentru anumite tipuri particulare de ecuații neliniare și chiar și în aceste cazuri ea se exprimă, de cele mai multe ori, prin funcții speciale, care pot fi calculate doar cu mari dificultăți; din aceste motive, se preferă, de regulă, utilizarea metodelor aproximative de integrare a ecuațiilor diferențiale neliniare, iar în cazurile cînd nici acestea nu sînt eficiente, se recurge la studiul calitativ al răspunsului, prin foloirea metodelor topologice de repreztare a mișcării în planul fazelor.

Studiile teoretice și experimentale efectuate asupra vibrațiilor neliniare au permis evidențierea următoarelor trăsături specifice lor, care le deosebesc fundamental de vibrațiile liniare:

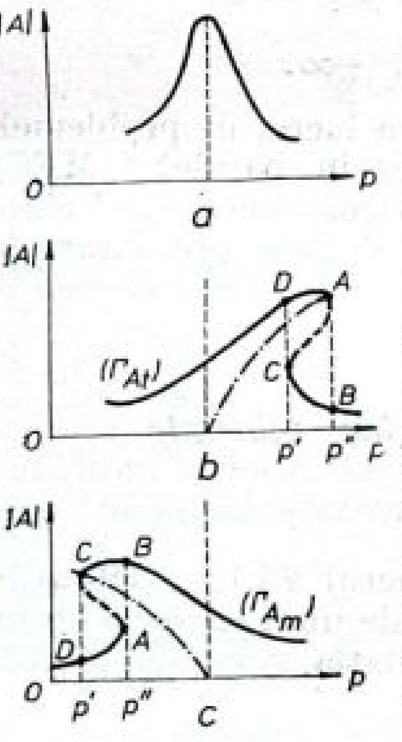


Fig. 27.31.

— absența proprietăților de izocronism și de tautocronism la vibrațiile neliniare periodice;

— prezența fenomenului de „salt" în curbele de răspuns amplitudine-frecvență la vibrațiile neliniare forțate, manifestat, în cazurile cînd neliniaritatea sistemului se datorează numai rigidității, prin existența unei zone $(p'' - p')$ a pulsației p a excitației armonice în care amplitudinea vibrației forțate trece brusc de la o valoare la alta. Acest salt se explică prin faptul că în timp ce la vibrațiile liniare — corespunzătoare unui cuplaj elastic liniar — curba amplitudine-frecvență are forma din fig. 27.31, *a*, la vibrația neliniară corespunzătoare unui cuplaj elastic neliniar tare ea are forma din fig. 27.34, *b*, iar la vibrația neliniară corespunzătoare unui cuplaj elastic neliniar moale forma din fig. 27.34, *c*. Se observă din

aceste ultime două grafice că amplitudinea vibrației crește odată cu frecvența excitației pînă în dreptul punctului D de abscisă p', poate lua fie valorile corespunzătoare porțiunii DA de grafic, fie cele corespunzătoare porțiunii CB, cu valori instabile pe porțiunea intermediară AC, pentru valori ale pulsației excitației cuprinse între limitele p' și p'', trece brusc, pentru $p = p''$, de la valoarea corespunzătoare punctului A — la valoarea corespunzătoare punctului B dacă variația se face pe ramura de curbă DA și scade apoi, sub valoarea corespunzătoare punctului B pentru valori superioare lui p'' ale pulsației excitației;

— apariția, în răspunsul sistemului vibrant neliniar supus la o excitație armonică, nu numai a armonicii fundamentale cu pulsația egală cu cea a excitației, ca la vibrații liniare, ci și a unor *supraarmonice*, cu pulsații $p_k = kp$, $(k = 2, 3, 4, \ldots)$, iar în anumite condițiuni pentru amplitudine chiar a unor *subarmonice*, de pulsații $p_k = \frac{1}{k}\, p$, $(k = 2, 3, \ldots)$;

— infirmarea, la sistemele vibrante neliniare, a principiului suprapunerii efectelor, reflectată în interdependența răspunsurilor sistemului vibrant la mai multe excitații armonice simultane.

Aceste trăsături specifice vor fi evidențiate pe parcursul expunerii metodelor de studiere a răspunsurilor sistemelor vibrante neliniare.

1°. Studiul răspunsului sistemelor vibrante neliniare prin integrarea exactă a ecuației diferențiale neliniare. În cele ce urmează, se va efectua integrarea exactă a ecuației diferențiale a vibrațiilor neliniare pentru cazul sistemelor vibrante autonome cu cuplaj elastic neliniar și amortizarea neglijabilă, caz întîlnit uneori în aplicațiile tehnice.

Mișcarea sistemului vibrant efectuată în aceste condiții va fi modelată matematic prin ecuația (27.500), cu funcția $G(w, \dot{w})$ depinzînd însă acum, așa cum rezultă din relația (26.9) de definiție a ei, (cu $g = a$; $Q_d \equiv 0$; $Q_e = -cg^*(w)$, numai de deplasarea w, putîndu-se face deci înlocuirea

$$G(w, \dot{w}) \equiv G(w) = \frac{c}{a}\, g^*(w) = k^2 g^*(w). \qquad (27.501)$$

Ecuația (27.500) va lua astfel forma

$$\ddot{w} + k^2 g^*(w) = 0, \qquad (27.502)$$

sau încă, observînd că poate fi scris șirul de relații

$$\ddot{w} = \frac{d\dot{w}}{dt} = \frac{d\dot{w}}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = \dot{w}\frac{d\dot{w}}{dw} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(\dot{w}^2)}{dw},$$

forma

$$\frac{d(\dot{w}^2)}{dw} + 2k^2 g^*(w) = 0,$$

permițînd obținerea integralei prime

$$\dot{w}^2 = -2k^2\int g^*(w)\,dw + C_1. \qquad (27.503)$$

Transformînd integrala nedefinită în integrala definită

$$\int g^*(w)\,dw = \int_0^w g^*(y)\,dy + C_1^* = -\int_w^0 g^*(y)\,dy + C_1^*$$

$-y$ fiind noua variabilă de integrare —, relația (27.503) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\dot{w}^2 = 2k^2\int_{-w}^0 g^*(y)\,dy + C_I, \qquad (27.504)$$

constanta C_I înglobind în ea constantele C_1 și C_1^*.

Pentru valoarea extremă $w = W$ a variabilei w, considerată cunoscută — ea reprezentînd, în cazul vibrațiilor periodice, amplitudinea vibrației —, cînd viteza generalizată va deveni egală cu zero, relația (27.504) va lua forma

$$0 = 2k^2\int_W^0 g^*(y)\,dy + C_I,$$

care va furniza valoarea constantei C_I; introducerea acestei valori în integrala primă (27.504) va conduce la relația

$$\dot{w}^2 = 2k^2\left[\int_{-w}^0 g^*(y)\,dy + \int_{-0}^W g^*(y)\,dy\right] = 2k^2\int_{-w}^W g^*(y)\,dy,$$

Scanned with CamScanner

din care se va putea scoate expresia vitezei generalizate

$$\dot{w} = \pm \sqrt{2}\, k \sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}, \qquad (27.505)$$

cu semnul din membrul drept precizat prin analiza sensului variației funcției $w(t)$.

Separînd variabilele în ecuația (27.505) și integrînd din nou, rezultă relația

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} = \pm \sqrt{2}\, kt + C_2, \qquad (27.506)$$

C_2 fiind o nouă constantă de integrare.

Transformînd din nou integrala nedefinită în integrala definită cu limită inferioară zero și limită superioară variabilă, adică

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} = \int_0^w \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} + C_2^* = -\int_w^0 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} + C_2^*,$$

unde z este noua variabilă de integrare, ecuația (27.506) va mai lua forma

$$-\int_w^0 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} = \pm \sqrt{2}\, kt + (C_2 - C_2^*),$$

sau încă

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\, k} \int_0^w \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} + C_{\mathrm{II}}, \qquad (27.507)$$

cu $C_{\mathrm{II}} = \pm \dfrac{C_2^* - C_2}{\sqrt{2}\, k}$.

Impunînd în ultima relație condițiile inițiale

$$t = 0\ \{w(0) = w^0 = W;\ \dot{w}(0) = \dot{w}^0 = 0\},$$

Scanned with CamScanner

rezultă următoarea valoare pentru constanta C_0:

$$C_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{0}^{w_0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} \mp \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{-W}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}},$$

iar înlocuirea ei cu această valoare în soluția generală (27.507) conduce la ecuația finită

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[\int_{0}^{w} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} + \int_{-W}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} \right],$$

adică

$$\boxed{t = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{-W}^{w} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_z^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}}}. \qquad (27.508)$$

Deși prin obținerea ecuației (27.508) integrarea ecuației diferențiale (27.502) poate fi considerată ca efectuată din punct de vedere teoretic, totuși utilizarea în practică a acestei ecuații nu e posibilă, de regulă, decît prin folosirea unor procedee de aproximare a funcției $w = w(t)$, datorită dificultăților întîmpinate în explicitarea lui w.

În cele mai multe din situațiile întîlnite în aplicațiile tehnice, vibrațiile neliniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate, efectuate în absența amortizărilor și în condiții de imparitate a funcției $g^*(w)$, adică în condițiile satisfacerii egalității

$$g^*(-w) = -g^*(w),$$

sînt periodice, perioada fiind dată de relația

$$T = t_{0,\,W} + t_{W,\,-W} + t_{-W,\,0},$$

unde termenii din membrul drept reprezintă duratele de timp în care deplasarea w variază de la valoarea indicată de primul indice

inferior pînă la valoarea precizată prin cel de-al doilea indice, aceste durate satisfăcînd relațiile

$$t_{W,-W} = 2t_{-W,0} = 2t_{0,W}. \tag{27.509}$$

Considerînd, în continuare, numai aceste din urmă cazuri și observînd că durata $t_{0,W}$ va fi dată, în baza relației (27.505), (cu $w>0$ crescător și deci cu: $\dot{w}>0$), de integrala

$$t_{0,W} = \int_0^{t_{0,W}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}\,k}\int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}},$$

se va putea scrie următoarea expresie a perioadei:

$$\boxed{T = 4t_{0,W} = \frac{4}{\sqrt{2}\,k}\int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}} = T(W)}\,. \tag{27.510}$$

După cum se vede, se verifică afirmația făcută la început, privind dependența perioadei de amplitudinea mișcării.

Deși mișcarea vibratorie neliniară efectuată în condițiile precizate mai sus nu este armonică, se obișnuiește totuși să se definească și în acest caz o pulsație a vibrației neliniare periodice libere, prin relația

$$k^* = \frac{2\pi}{T},$$

în baza căreia egalitatea (27.510) va lua forma

$$k^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi k}{I(W)}, \tag{27.511}$$

unde prin $I(W)$ s-a notat integrala

$$I(W) = \int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y}}, \tag{27.512}$$

Scanned with CamScanner

care pentru anumite tipuri particulare de funcții $g^*(w)$ se găsește tabelată în funcție de valorile lui W, sau ale unui alt parametru care depinde de W.

În asemenea cazuri, relația (27.512) va permite să se calculeze valorile pulsației k^* pentru diversele valori ale amplitudinii W, putîndu-se construi apoi curba de răspuns amplitudine - frecvență și pentru acest tip de vibrație neliniară.

Unul dintre sistemele vibrante neliniare autonome cele mai des întîlnite în aplicații este cel realizat prin cuplaj elastic cu neliniaritate cubică; în cazul cînd o asemenea legătură elastică este aplicată numai elementului cu poziția determinată prin parametrul lagrangeian w, forța generalizată elastică va coincide chiar cu solicitarea elastică, iar aceasta va avea o expresie analogă expresiei (24.87) (cu alungirea ΔL reprezentată chiar prin parametrul lagrangeian w), adică se va putea scrie

$$Q_e(w) = -C(1 \pm \gamma w^2)\, w$$

și deci

$$G(w) = -\frac{Q_e(w)}{a} = \frac{C}{a}(1 \pm \gamma w^2)\, w = k^2(1 \pm \gamma w^2)\, w = k^2 g^*(w),$$

semnul superior corespunzînd cuplajului elastic tare, iar semnul inferior cuplajului elastic moale.

În acest caz funcția $g^*(w)$ va avea deci forma particulară

$$g^*(w) = [1 \pm \gamma w^2]\, w = -[1 \pm \gamma(-w)^2](-w) = -g^*(-w),$$

fiind, după cum se vede, impară în w, iar integrala care figurează sub radicalul din expresia funcției $I(W)$ va avea valoarea

$$\int_w^W g^*(y)\,\mathrm{d}y = \int_w^W [y \pm \gamma y^3]\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(W^2 - w^2) \pm$$

$$\pm \frac{\gamma}{4}(W^4 - w^4) = \frac{1}{2}(W^2 - w^2)\left[1 \pm \frac{\gamma}{2}(W^2 + w^2)\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{4}(W^2 - w^2)\left[\frac{2 \pm \gamma W^2}{\gamma} \pm w^2\right].$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

Introducind ultima expresie in relația (27.512), aceasta din urmă va lua forma

$$I(W)=\int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\int_{-w}^{W} g^*(y)\,\mathrm{d}y}}=\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(W^2-w^2)\left[\dfrac{2\pm\gamma W^2}{\gamma}\pm w^2\right]}} \tag{27.513}$$

Calculul, in continuare, al acestei integrale va trebui efectuat separat, pentru fiecare din cele două forme de cuplaje elastice neliniare.

Cazul cuplajului elastic tare. În acest caz, funcția $I(W)$ va putea fi scrisă, ținind seama și de condiția(27.509), $(t_{-W,0}=t_{0,W})$ sub forma

$$I(W)=\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\int_0^W \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(W^2-w^2)\left[\dfrac{2+\gamma W^2}{\gamma}+w^2\right]}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\int_{-W}^{0} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(W^2-w^2)\left[\dfrac{2+\gamma W^2}{\gamma}+w^2\right]}}. \tag{27.514}$$

Efectuind schimbarea de variabilă

$$w=-W\cos\varphi,$$

cu $\mathrm{d}w=W\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ și cu noile limite egale cu $\varphi=0$ — corespunzătoare limitei $w=-W$ — și $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$ — corespunzătoare limitei $w=0$ —, integrala $I(W)$ va putea fi adusă la forma

$$I(W)=\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\dfrac{1+\gamma W^2}{\gamma}-W^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1+\gamma W^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-C^2\sin^2\varphi}}, \tag{27.515}$$

Scanned with CamScanner

unde prin C^2 s-a notat expresia

$$C^2 = \frac{\gamma W^2}{2(1+\gamma W^2)} < 1.$$

Integrala

$$F(C(w)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2\varphi}},$$

care a fost intilnită și cu prilejul determinării perioadei pendulului fizic, este o integrală eliptică de specia intii, care este tabelată (a se vedea lucrarea [2], anexa IV); prin introducerea acestei notații, funcția $I(W)$ ia forma

$$I(W) = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1+\gamma W^2}} F(C(W)), \qquad (27.516)$$

iar expresia (24.560) a perioadei ia forma particulară

$$\boxed{T = \frac{4}{\sqrt{2}\,k} I(W) = \frac{4}{k\sqrt{1+\gamma W^2}} F(C(W)) = T(W)}\,, \qquad (27.517)$$

cu T depinzind de amplitudinea W și direct și prin intermediul parametrului C^2.

Dacă se ține seama și de legătura dintre perioadă și pulsația convențională introdusă pentru vibrațiile neliniare periodice libere $\left(k^* = \frac{2\pi}{T}\right)$, rezultă și legătura dintre pulsație și amplitudine, exprimată prin relația

$$k^* = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi k\sqrt{1+\gamma W^2}}{2} \frac{1}{F(C(W))} = k^*(W), \qquad (27.518)$$

care va permite construirea curbei de răspuns amplitudine - frecvență; pentru cuplajul elastic tare, această curbă va avea o formă ca cea din fig. 27.32, a.

Scanned with CamScanner

Cazul cuplajului elastic moale. În această de a doua situație, funcția $I(W)$ va avea expresia

$$I(W) = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \int_0^W \frac{dw}{\sqrt{(W^2 - w^2)\left[\frac{2 - \gamma W^2}{\gamma} - w^2\right]}}, \qquad (27.519)$$

care, în urma schimbării de variabilă

$$w = W \sin \varphi,$$

cu $dw = W \cos \varphi \, d\varphi$ și cu noile limite egale cu $\varphi_1 = 0$ — corespunzătoare limitei $w = 0$ — și $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ — corespunzătoare limitei $w = W$ —, va mai lua forma

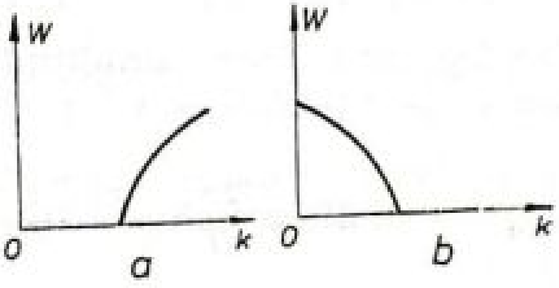


Fig. 27.32.

$$I(W) = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2(1 - \gamma W^2)}{\gamma}} \sqrt{1 - \frac{\gamma W^2}{2 - \gamma W^2} \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \gamma W^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \gamma W^2}} F(C(W)), \qquad (27.520)$$

unde prin C^2 s-a notat expresia

$$C^2 = \frac{\gamma W^2}{2 - \gamma W^2}.$$

Pentru ca integrala eliptică $F(C(W))$ să existe, trebuie să fie satisfăcute condițiile

$$0 < C^2 = \frac{\gamma W^2}{2 - \gamma W^2} < 1,$$

ambele îndeplinite pentru valoarea

$$W^2 < \frac{1}{\gamma}.$$

Presupunind satisfăcută ultima relație, perioada vibrației neliniare periodice executate de un sistem vibrant în condițiile unui cuplaj elastic moale va avea valoarea

$$\boxed{T = \frac{4}{\sqrt{2}\,k} I(W) = \frac{4}{k\sqrt{1-\gamma W^2}} F(C(W)) = T(W)}, \tag{27.521}$$

iar legătura dintre amplitudinea mișcării vibratorii și dintre pulsația convențională a vibrației va fi exprimată prin relația

$$k^* = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi k\sqrt{1-\gamma W^2}}{2} \frac{1}{F(C(W))} = k^*(W), \tag{27.522}$$

căreia îi corespunde o curbă de răspuns amplitudine - frecvență de forma celei reprezentate în fig. 27.32, b.

2°. **Studiul răspunsului sistemelor vibrante neliniare prin integrarea prin metode aproximative a ecuației diferențiale a mișcării.** În cele ce urmează vor fi prezentate cîteva din cele mai des folosite dintre metodele aproximative analitice de integrare a ecuației diferențiale a vibrațiilor neliniare în jurul poziției de echilibru stabil ale unui sistem vibrant cu un grad de libertate.

a) **Metode de perturbație.** Aceste metode, aplicabile la *sisteme vibrante ușor neliniare* (termenii neliniari din ecuația diferențială sînt înmulțiți cu un parametru mic subunitar), constau, în principiu, în dezvoltarea parametrului lagrangeian într-o serie de puteri ale acestui mic parametru, determinîndu-se coeficienții seriei prin calcule de aproximare succesivă; cea mai des întîlnită dintre aceste metode este

— *Metoda micului parametru a lui Poincaré*, utilizată în cazul ecuațiilor diferențiale de forma (26.24), adică

$$\ddot{w} + k^2 w + \varepsilon h(w, \dot{w}) = 0, \tag{27.523}$$

cu constanta k numită *pulsația proprie* a sistemului vibrant.

Scanned with CamScanner

Se adoptă următoarele ipoteze de lucru:

— Funcția $h(w, \dot{w})$ satisface condițiile de dezvoltare în serie Taylor în jurul valorilor $w = 0$, $\dot{w} = 0$, precum și condiția

$$h(0, 0) = 0 \tag{27.524}$$

— Soluția ecuației diferențiale (27.523) este periodică, de perioadă T.

Notind cu

$$k^* = \frac{2\pi}{T} \tag{27.525}$$

pulsația — pentru moment necunoscută — a vibrației cvasiliniare, se va efectua, în ecuația (27.523), schimbarea de variabilă

$$t = \frac{1}{k^*}\tau, \tag{27.526}$$

cu

$$\dot{w} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = k^* \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = k^* w'; \quad \ddot{w} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = k^{*2} \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\tau^2} =$$

$$= k^{*2} w'' \left(w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau}; \; w'' = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\tau^2} \right)$$

și

$$h(w, \dot{w}) = h(w, k^* w') = h(w, w', k^*),$$

în baza căreia această ecuație va putea fi adusă la forma

$$k^{*2} w'' + k^2 w + \varepsilon h(w, w', k^*) = 0, \tag{27.527}$$

ei asociindu-i-se obișnuit următorul sistem de condiții inițiale:

$$t = 0 \; \{w(0) = W; \; \dot{w}(0) = 0\}, \tag{27.528}$$

respectiv

$$\tau = 0 \{(w(0) = W; \; w'(0) = 0\}. \tag{27.529}$$

Ca urmare a condiției (27.524) și funcția $h\ (w, w'. \ k^*)$ va satisface condiția analogă

$$h(0, 0, 0) = 0, \tag{27.530}$$

în baza căreia, dezvoltarea ei în serie Taylor în jurul valorilor $w = 0$; $w' = 0$; $k^* = 0$ va lua forma

$$h(w, w', k^*) = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w' + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k^*\right] + \mathscr{H}, \quad (27.531)$$

$\mathscr{H}$ desemnînd suma termenilor de ordin superior ai dezvoltării, iar indicele $(_0)$ indicînd că în expresiile cărora le este atașat trebuie făcute înlocuirile $w = 0$; $w' = 0$; $k^* = 0$.

În condițiile existenței unei soluții periodice a ecuației diferențiale (27.523) și ecuația (27.527) va admite o soluție periodică, cu perioada τ avînd, în baza relațiilor (27.526) și (27.525), valoarea

$$\mathscr{T} = k^* T = k^* \frac{2\pi}{k^*} = 2\pi.$$

Pentru a obține această soluție cu un anumit grad de aproximare, se vor efectua următoarele două operații :

— Se dezvoltă soluția $w(\tau)$ în serie de puteri ale micului parametru ε, oprindu-se dezvoltarea la termenul de gradul $(r - 1)$:

$$w(\tau) = \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j(\tau), \quad (27.532)$$

rezultînd de aici următoarele expresii pentru derivatele $w'(\tau)$ și $w''(\tau)$:

$$w'(\tau) = \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j'(\tau); \quad w''(\tau) = \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j''(\tau), \quad (27.533)$$

unde ε^j sînt puteri ale lui ε, iar $w_j(\tau)$, $w_j'(\tau)$ și $w_j''(\tau)$, $(j=1, 2, \ldots r-1)$, sînt termeni de aproximare succesivă de ordinul j a mărimilor $w(\tau)$, $w'(\tau)$ și $w''(\tau)$, presupuși cunoscuți din determinări anterioare.

— Se dezvoltă și pulsația $k^* = k^*(W)$ în serie după puterile lui ε, oprindu-se și acum dezvoltarea la termenul de gradul $(r - 1)$:

$$k^* = k^*(W) = \sum_{h=0}^{r-1} \varepsilon^h k_h^*(W) = \sum_{h=0}^{r-1} \varepsilon^h k_h^*, \quad (27.534)$$

ε^h fiind și acum puteri ale lui ε, iar $k_h^* = k_h^*(W)$, $(h = 1, 2, \ldots, r-1)$, fiind termeni de aproximare succesivă de ordinul h a pulsației k^*, considerați de asemenea cunoscuți din determinări anterioare.

Scanned with CamScanner

În baza relațiilor (27.533) și (27.534), primul termen din membrul sting al ecuației (27.527) va putea fi scris sub forma

$$k^{*2}w'' = \left(\sum_{h=0}^{r-1} \varepsilon^h k_h^*\right)\left(\sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon^i k_i^*\right)\left(\sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j''\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^h \varepsilon^i \varepsilon^j k_h^* k_i^* w_j'' = \sum_{l=0}^{3(r-1)} \varepsilon^l A_l, \tag{27.535}$$

cu mărimile A_l date de relațiile

$$A_l = \sum_{i=0}^{l} k_i^* k_{l-i}^* w_0'' + \sum_{i=0}^{l} k_i^* k_{l-i-1}^* w_0'' + \ldots + \sum_{i=0}^{l} k_i^* k_{l-i-j}^* w_j'' +$$
$$+ \ldots + k_0^{*2} w_l''. \tag{27.536}$$

Datorită valorii mici a parametrului ε, în suma (27.535) se vor putea opri numai primii $(r-1)$ termeni, adică se va putea scrie

$$k^{*2}w'' \approx \sum_{l=0}^{r-1} \varepsilon^l A_l = A_0 + \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon^l A_l, \tag{27.537}$$

cu următoarele valori concrete ale mărimilor A_l :

$$\begin{aligned} A_0 &= k_0^{*2} w_0''\,; \\ A_1 &= 2k_0^* k_1^* w_0'' + k_0^{*2} w_1''\,; \\ A_2 &= (2k_0^* k_2^* + k_1^{*2}) w_0'' + (2k_0^* k_1^*) w_2'' + k_0^{*2} w_2''\,; \end{aligned} \tag{27.538}$$

etc. ...

De asemenea, în baza relației (27.532), cel de-al doilea termen din membrul sting al ecuației (27.527) va lua forma

$$k^2 w = k^2 \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j = \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j (k^2 w_j) = \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon^l (k^2 w_l). \tag{27.539}$$

În fine, reținînd în dezvoltarea (27. 531) numai primul grup de termeni și ținînd seama și de relațiile (27.532), (27.533) și (27.534), se va putea face în ecuația (27.527) și înlocuirea

$$\varepsilon h(w, w', k^*) \approx \varepsilon \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j w_j' +\right.$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^j k_j^*\right] = \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon^{j+1}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_j + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w_j' + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k_j^*\right],$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

sau încă, înlocuind indicele de sumare $j+1$ cu indicele l, ($j+1=l$; $j=l-1$) și renunțînd la termenul de gradul r în ε, se va mai scrie

$$\varepsilon h(w, w', k^*) \approx \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon^l \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_{l-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w'_{l-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k^*_{l-1}\right]. \tag{27.540}$$

În baza relațiilor (27.537), (27.539) și (27.540), ecuația diferențială (27.527) va lua, pentru aproximația de ordinul r, forma

$$A_0 + k^2 w_0 + \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon^l \left\{A_l + k^2 w_l + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_{l-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w'_{l-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k^*_{l-1}\right]\right\} = 0, \tag{27.541}$$

cu următoarele forme particulare pentru primele aproximări:

— Aproximația de ordinul întîi ($r=1$):

$$A_0 + k^2 w_0 = 0. \tag{27.542}$$

— Aproximația de ordinul doi ($r=2$):

$$A_0 + k^2 w_0 + \varepsilon \left\{A_1 + k^2 w_1 + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_0 + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w'_0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right) k^*_0\right]\right\} = 0. \tag{27.543}$$

— Aproximația de ordinul trei ($r=3$):

$$A_0 + k^2 w_0 + \varepsilon \left\{A_1 + k^2 w_1 + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_0 + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w'_0 + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k^*_0\right]\right\} +$$
$$+ \varepsilon^2 \left\{A_2 + k^2 w_2 + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right) w_1 + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w'_1 + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k^*_1\right]\right\} = 0, \tag{27.544}$$

etc. . . .

Aceste relații, cărora li se vor asocia sisteme de condiții inițiale echivalente condițiilor (27.529), adică de forma

$$\tau = 0 \begin{cases} w_0(0) = W\,;\ w_j(0) = 0\,; \\ w_0'(0) = 0\,;\quad w_j'(0) = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, r-1) \end{cases} \qquad (27.545)$$

vor furniza ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor neliniare ale sistemului vibrant considerat pentru diverse ordine de aproximare succesivă.

Astfel, pentru prima aproximație, ecuația diferențială (27.542), care, în baza relațiilor (27.538) va mai putea fi scrisă sub forma

$$k_0^{*2} w_0'' + k^2 w_0 = 0, \qquad (27.546)$$

va modela o vibrație armonică; întrucît soluția ei va trebui să fie, ca și soluția generală $w(\tau)$, periodică, de perioadă $\mathscr{T} = 2\pi$, ea va trebui să aibă forma

$$w_0 = W_0 \sin(p\tau + \alpha) = W_0 \sin(\tau + \alpha), \qquad (27.547)$$

$\left(p = \dfrac{2\pi}{\mathscr{T}} = 1\right)$, cu constantele de integrare W_0 și α, determinate cu ajutorul condițiilor inițiale (27.545), avînd valorile

$$W_0 = W\,;\quad \alpha = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Funcția finită care va descrie, în primă aproximație, mișcarea sistemului vibrant va avea deci forma

$$w_0 = W \cos \tau, \qquad (27.548)$$

iar impunerea condiției ca ea să verifice ecuația (27.546) conduce la egalitatea

$$W \cos \tau(\alpha_0^{*2} - k^2) = 0,$$

cu consecința

$$k_0^* = k, \qquad (27.549)$$

atestînd că valoarea pulsației k^* în primă aproximație este k.

Scanned with CamScanner

Trecînd la aproximația de ordinul doi, se va observa că ecuația (27.543) va lua, în baza relațiilor (27.542) și (27.538) și după împărțirea prin ε, forma

$$k_0^{*2}w_1'' + k^2 w_1 = -2k_0^* k_1^* w_0'' - \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 w_0' + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k_0^*\right],$$

sau încă, ținînd seama și de rezultatele (27.548) și (27.549), forma

$$w_1'' + w_1 = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 + \frac{1}{k^2}\left[2kk_1^* - \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0\right] W \cos\tau +$$

$$+ \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial h}{\partial w'}\right)_0 W \sin\tau. \qquad (27.550)$$

O asemenea ecuație diferențială modelează însă matematic o vibrație liniară forțată neamortizată efectuată în condiții de rezonanță $\left(k_0 = p = \frac{2\pi}{\mathcal{T}} = 1\right)$, soluția particulară a ei avînd forma

$$w_1 = L_1 + M_1\tau \cos\tau + N_1\tau \sin\tau, \qquad (27.551)$$

cu constantele L_1, M și N, determinate impunîndu-se condiția ca soluția să verifice ecuația (27.550); rezultă de aici că prezența termenilor în $\cos\tau$ și $\sin\tau$ — numiți și *termeni seculari* — în ecuația diferențială (27.550) va face ca soluția generală a ei să nu fie periodică, datorită apariției factorului τ în soluția particulară (27.551).

Pe de altă parte, soluția $w(\tau)$ nu va putea fi periodică decît în cazul cînd fiecare termen din expresia (27.532) a ei va fi periodic, de aceeași perioadă $\mathcal{T}$.

Se poate trage deci concluzia că ecuația diferențială (27.550) va admite o soluție periodică numai în condițiile

$$\left(\frac{\partial h^*}{\partial w'}\right)_0 = 0;\quad 2kk_1^* - \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 = 0, \qquad (27.552)$$

ultima furnizînd primul din termenii de aproximare a pulsației:

$$k_1^* = \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0. \qquad (27.553)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

În baza condițiilor (27.552), ecuația diferențială (27.550) va lua forma

$$w_1'' + w_1 = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0, \tag{27.554}$$

ei corespunzîndu-i soluția generală

$$w_1 = A_1 \cos\tau + B_1 \sin\tau - \frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0, \tag{27.555}$$

cu

$$w_1' = -A_1 \sin\tau + B_1 \cos\tau,$$

A_1 și B_1 fiind constante de integrare.

Introducerea condițiilor inițiale (27.545) în ultimele două relații, conduce la următoarele valori ale constantelor A_1 și A_2:

$$A_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0; \quad B_1 = 0$$

și deci la următoarea formă determinată a termenului w_1

$$w_1 = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 + \frac{1}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 \cos\tau. \tag{27.556}$$

Pentru a doua aproximație, soluția $w(\tau)$ și pulsația k^* vor avea deci expresiile

$$w(\tau) = w_0 + \varepsilon w_1 = \left[W + \frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0\right]\cos\tau - \frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0, \tag{27.557}$$

respectiv

$$k^* = k_0^* + \varepsilon k_1^* = k + \frac{\varepsilon}{2k}\left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0. \tag{27.558}$$

Trecînd la a treia aproximație, se va observa mai întîi că ecuația (27.544) care o determină va lua, în baza relațiilor (27.542), (27.543) și (27.538) și după împărțirea prin ε^2, forma

$$k_0^{*2} w_2'' + k^2 w_2 = -(2k_0^* k_2^* + k_1^{*2})\, w_0'' - 2k_0^* k_1^* w_1'' - \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)_0 w_1 + \left(\frac{\partial h}{\partial k^*}\right)_0 k_1^*\right]. \tag{27.559}$$

Pentru obținerea soluției $w(\tau)$ corespunzătoare ei se vor efectua operațiile:

— înlocuirea mărimilor w_0, w_1, k_0^* și k_1^* cu mărimile cunoscute, determinate în cadrul primelor două aproximații;

— anularea coeficienților termenilor seculari, ceea ce va conduce la determinarea termenului k_2^* al pulsației k^*;

— determinarea soluției generale a ecuației (27.560), după anularea termenilor seculari și înlocuirea lui k_2^* cu valoarea găsită;

— determinarea, cu ajutorul condițiilor inițiale (27.545), a constantelor de integrare din soluția generală;

—stabilirea, pentru a treia aproximație, a expresiei soluției $w(\tau)$:

$$w(\tau) = w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \varepsilon^2 w_2(\tau), \tag{27.559}$$

precum și a valorii pulsației k^*:

$$k^* = k_0^* + \varepsilon k_1^* + \varepsilon^2 k_2^*. \tag{27.560}$$

Procedeul este repetat pînă la obținerea aproximării dorite.

Este ușor de înțeles că metoda perturbației prezentată mai sus va putea fi aplicată și la sistemele vibrante ușor neliniare autonome neamortizate, cînd funcțiile $G(w, \dot{w})$ și $h(w, \dot{w})$ vor deveni numai funcții de w, adică cînd ecuația diferențială (27.527) va lua forma

$$k^{*2}w'' + k^2 w + \varepsilon h(w) = 0, \tag{27.561}$$

calculele simplificîndu-se în aceste cazuri și prin faptul că nu mai este necesară dezvoltarea în serie Taylor a funcției $h(w)$.

b) Metode de iterație. Aceste metode, aplicabile, în general, sistemelor vibrante ușor neliniare neautonome neamortizate și, în particular, și sistemelor autonome neamortizate, permite determinarea soluției aproximative a ecuației diferențiale neliniare a vibrațiilor acestor sisteme, ecuație avînd, în condițiile precizate ($G(w_1 \dot{w}) \equiv \equiv G(w) = k^2 g^*(w)$), forma

$$\ddot{w} + k^2 g^*(w) + F(t) = 0, \tag{27.562}$$

folosind procedee de iterație în construirea ecuației diferențiale corespunzătoare fiecărei aproximații.

Scanned with CamScanner

Aplicarea metodelor cuprinde următoarele etape:

— În primă aproximație se pleacă de la o ecuație diferențială obținută din ecuația (27.562), prin neglijarea unor termeni, astfel încît noua ecuație să fie integrabilă; soluția exactă w_1 a acestei ecuații va fi considerată ca soluție a ecuației (24.562) în condițiile primei aproximații și, de regulă, ea nu va corespunde unui grad satisfăcător de precizie.

— În a doua aproximație se va pleca de la ecuația diferențială completă, dar cu termenii care au fost neglijați în prima ecuație exprimați în funcție de soluția cunoscută w_1; de cele mai multe ori, această nouă ecuație este și ea integrabilă și soluția ei, w_2, va constitui soluția ecuației diferențiale (27.562) în a doua aproximație.

În mod obișnuit, procesul de iterație poate fi oprit la cea de-a doua aproximație; dacă totuși rezultatul obținut astfel nu este suficient de precis, procedeul de iterație poate fi reluat, construindu-se o a treia ecuație diferențială, cu termenii neglijați în prima ecuație exprimați în funcție de soluția aproximativă w_2, procesul putînd fi reluat pînă la obținerea gradului de aproximare dorit.

Cea mai des folosită dintre metodele de iterație este:

— *Metoda lui Duffing.* Această metodă a fost folosită de Duffing la integrarea ecuației diferențiale neliniare care-i poartă numele în condițiile neglijării amortizării, adică la integrarea ecuației diferențiale

$$\ddot{w} + (\alpha \pm \beta w^2)w = Q^0 \cos(pt), \qquad (27.563)$$

care, prin introducerea notațiilor

$$\alpha = k^2; \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon^2,$$

mai poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{w} + [k^2 w \pm \varepsilon^2 k^2 w^3] = Q^0 \cos(pt), \qquad (27.564)$$

cu semnul superior corespunzînd cuplajului elastic neliniar tare și cu cel inferior cuplajului elastic neliniar moale.

Neglijînd, în primă aproximație, grupul de termeni incluși în paranteza patrată din membrul stîng al relației (27.564) — neglijare posibilă însă numai în condițiile unor valori mici ale parametrilor ε^2 și k^2, deci numai în cazul sistemelor vibrante ușor neliniare, precum

Scanned with CamScanner

și pentru valori relativ mici ale amplitudinii W a elongației w — ecuația diferențială (27.564) va lua forma

$$\ddot{w} \approx Q^0 \cos(pt) \qquad (27.565)$$

și va admite o soluție în cos (pt), cu un coeficient care ar putea fi obținut prin integrarea ecuației precedente; adoptînd o asemenea expresie și ca soluție în primă aproximație a ecuației diferențiale (27.564), amplitudinea ei va trebui să corespundă însă valorii reale W, pe care o capătă efectiv vibrația neliniară periodică, pentru moment necunoscută.

Rezultă deci că soluția, în primă aproximație, a ecuației (27.564) va avea forma

$$w_1 = W\cos(pt). \qquad (27.566)$$

Pentru a obține soluția în a doua aproximație, w_2, se va pleca din nou de la ecuația (27.564), în care însă, în grupul de termeni din paranteza pătrată se va înlocui w cu w_1 dat de relația (27.564), adică de la ecuația

$$\ddot{w}_2 + [k^2 w_1 \pm \varepsilon^2 k^2 w_1^3] = Q^0 \cos(pt),$$

sau încă

$$\ddot{w}_2 = [Q^0 - k^2 W]\cos(pt) \mp \varepsilon^2 k^2 W^3 \cos^3(pt). \qquad (27.567)$$

Dacă se mai ține seama acum și de identitatea trigonometrică

$$\cos^3(pt) = \frac{3}{4}\cos(pt) + \frac{1}{4}\cos(3pt), \qquad (27.568)$$

ecuația (27.567) va mai putea fi scrisă sub următoarea formă finală:

$$\ddot{w}_2 = \left[Q^0 - k^2 W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2 k^2 W^3\right]\cos(pt) \mp \frac{1}{4}\varepsilon^2 k^2 W^3 \cos(3pt), \qquad (27.569)$$

conducînd, prin integrări succesive, la relațiile

$$\dot{w}_2 = \frac{1}{p}\left[Q^0 - k^2 W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2 k^2 W^3\right]\sin(pt) \mp$$

$$\mp \frac{1}{12p}\varepsilon^2 k^2 W^3 \sin(3pt) + C_1, \qquad (27.570)$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$w_2 = -\frac{1}{p^2}\left[Q^0 - k^2W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2 k^2 W^3\right]\cos(pt) \pm$$

$$\pm \frac{1}{36\,p^2}\varepsilon^2 k^2 W^3 \cos(3pt) + [C_1 t + C_2], \qquad (27.571)$$

C_1 și C_2 fiind constante de integrare.

Pentru ca soluția w_2 să fie periodică — singura situație care va fi luată în considerație în continuare, ea prezentînd cel mai mare interes pentru aplicații — este necesar ca ea să nu conțină grupul de termeni inclus în paranteza patrată din membrul drept al relației (27.571), ceea ce se realizează prin condițiile

$$C_1 = 0\,;\ C_2 = 0,$$

realizabile prin impunerea, în relațiile (27.570) și (27.571), a condițiilor inițiale

$$t = 0\left\{\begin{aligned} & w_2(0) = -\frac{1}{p^2}\left[Q^0 - k^2W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2k^2W^3\right] \pm \frac{1}{36\,p^2}\varepsilon^2k^2W^3 \\ & \dot{w}_2(0) = 0. \end{aligned}\right\}$$

În această situație, ecuația vibrației neliniare, în cea de-a doua aproximație, a sistemului vibrant considerat va lua forma

$$w_2 = -\frac{1}{p^2}\left[Q^0 - k^2W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2k^2W^3\right]\cos(pt) \pm$$

$$\pm \frac{1}{36\,p^2}\varepsilon^2k^2W^3\cos(3\,pt). \qquad (27.572)$$

Examinarea ultimei relații permite să se tragă concluzia că în a doua aproximație în răspunsul sistemului vibrant pe lîngă armonica fundamentală — termenul în $\cos(pt)$ —, care figura și în răspunsul din prima aproximație și care, trebuind să fie același în ambele soluții, implică satisfacerea condiției

$$W = -\frac{1}{p^2}\left[Q^0 - k^2W \mp \frac{3}{4}\varepsilon^2k^2W^3\right], \qquad (27.573)$$

Scanned with CamScanner

a apărut și o supraarmonică, reprezentată prin termenul în cos $(3pt)$.

În baza relației (27.573), ecuația (27.572) va lua forma finală

$$w_2 = W\cos(pt) \pm \frac{1}{36}\frac{\varepsilon^2 k^2}{p^2} W^3 \cos(3pt) \tag{27.574}$$

și, în cele mai multe cazuri, poate fi considerată ca satisfăcătoare pentru gradul de precizie urmărit în aplicațiile tehnice; totuși, dacă se urmărește o precizie superioară în determinarea răspunsului sistemului vibrant, se vor relua calculele, plecîndu-se de la ecuația

$$\ddot{w}_3 + [k^2 w_2 \pm \varepsilon^2 k^2 w_2^3] = Q^0 \cos(pt), \tag{27.575}$$

cu w_2 dat de relația (27.574) ş.a.m.d.

Relația (27.573), scrisă încă sub forma

$$p^2 = k^2 \pm \frac{3}{4}\varepsilon^2 k^2 W^2 - \frac{Q^0}{W} = p^2(W), \tag{27.576}$$

stabilește legătura dintre amplitudinea răspunsului și pulsația excitației în cazul acestui tip de vibrație neliniară, conducînd, prin reprezentare grafică, la curbele de răspuns amplitudine-frecvență (Γ_{W_t}), (fig. 27.33, a) pentru cuplajul elastic tare și la curbele de răspuns (Γ_{W_m}), (fig. 27.33, b), pentru cuplajul elastic neliniar moale; după cum se observă din grafice și așa cum rezultă, de altfel și din relația (27.576), cele două ramuri ale curbelor (Γ_{W_t}), respectiv (Γ_{W_m}), sînt cu atît

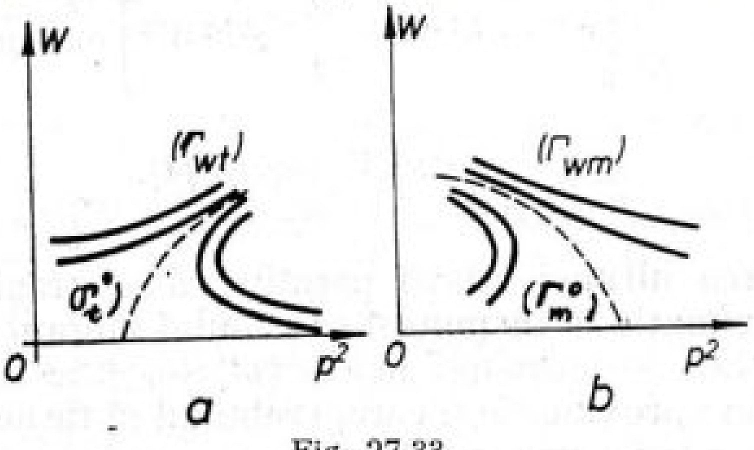


Fig. 27.33.

mai îndepărtate de curbele mediane (Γ_t^0) și (Γ_m^0), corespunzătoare vibrațiilor neautonome, $(Q^0 = 0)$, cu cît amplitudinea excitației armonice este mai mare.

c) Metode de variație a parametrilor de integrare. Aceste metode, aplicabile, de regulă, sistemelor vibrante autonome, cuprind, în principiu, următoarele două etape principale de aplicare:

— liniarizarea, prin neglijarea termenilor neliniari, a ecuației diferențiale neliniare ce descrie mișcarea unui asemenea sistem vibrant și determinarea soluției generale a ecuației diferențiale astfel simplificate, soluție care va conține doi parametri (constante) de integrare.

— acceptarea ultimei soluții și ca soluție a ecuației diferențiale neliniare, cu condiția de a considera parametrii de integrare ca funcțiuni de timp, determinate prin metoda lui Lagrange, prin impunerea celor două condiții cunoscute:

α) derivata în raport cu timpul a soluției, cu parametrii de integrare considerați funcțiuni de timp, să coincidă cu derivata în raport cu timpul a soluției cu parametrii de integrare considerați constanți.

β) soluția cu parametrii de integrare considerați funcțiuni de timp să verifice ecuația diferențială neliniară inițială.

Singura deosebire în folosirea metodei lui Lagrange, față de modul în care ea a fost aplicată la integrarea ecuațiilor diferențiale liniare neomogene, constă în faptul că la ecuațiile diferențiale neliniare sistemul de ecuații diferențiale în cei doi parametri de integrare funcții de timp nu mai este, de regulă, integrabil, fiind necesară utilizarea unor metode aproximative de integrare a acestor din urmă ecuații; cum procedeele de aproximare depind, la rîndul lor, de caracterul neliniarităților din ecuația diferențială neliniară, este ușor de înțeles că au trebuit să fie elaborate metode specifice pentru diversele tipuri particulare de ecuații diferențiale neliniare.

Din acest grup de metode va fi prezentată, în cele ce urmează, cea mai des folosită dintre ele și anume

— *Metoda Krîlov - Bogoliubov.* Această metodă, aplicabilă sistemelor vibrante ușor neliniare autonome amortizate, cu mișcarea descrisă printr-o ecuație diferențială de forma (27.523), adică

$$\ddot{w} + p^2 w + \varepsilon h(w, \dot{w}) = 0, \qquad (27.577)$$

unde ε reprezintă un parametru mic ($\varepsilon \ll 1$), constă în neglijarea, la început, a termenului neliniar $\varepsilon h(w, \dot{w})$, obținîndu-se astfel o ecuație diferențială liniară omogenă, a cărei soluție generală, de forma

$$w = W \sin(pt + \alpha), \qquad (27.578)$$

va fi considerată şi ca soluție a ecuației diferențiale neliniare (27.577), cu condiția ca parametrii (constantele) de integrare W şi α să fie considerați funcții de timp, satisfăcînd condițiile α şi β precizate mai sus; această ultimă soluție, scrisă acum sub forma

$$w = W(t) \sin [pt + \alpha(t)], \tag{27.579}$$

cu

$$\dot{w} = \dot{W}(t) \sin [pt + \alpha(t)] + \dot{\alpha}(t) W(t) \cos [pt + \alpha(t)] + \\ + pW(t) \cos [pt + \alpha(t)],$$

va reprezenta o vibrație cvasiarmonică cu modulație în amplitudine şi în fază.

Prin impunerea condițiilor α şi β, rezultă relațiile

$$\dot{W}(t) \sin[pt + \alpha(t)] + \dot{\alpha}(t) W(t) \cos[pt + \alpha(t)] = 0$$

$$p\dot{W}(t) \cos [pt + \alpha(t)] - p\dot{\alpha}(t) W(t) \sin [pt + \alpha(t)] + \\ + \varepsilon h [W(t) \sin [pt + \alpha(t)]; pW(t) \cos [pt + \alpha(t)]. \tag{27.580}$$

Rezolvind sistemul precedent de ecuații algebrice în necunoscutele $\dot{W}(t)$ şi $\dot{\alpha}(t)$, se obțin următoarele expresii pentru aceste două funcții:

$$\dot{W}(t) = -\frac{\varepsilon}{p} \mathscr{H}(\varphi); \; \dot{\alpha}(t) = \frac{\varepsilon}{pW} \mathscr{K}(\varphi), \tag{27.581}$$

unde prin

$$\varphi = pt + \alpha(t) \tag{27.582}$$

s-a notat faza la momentul t a vibrației cvasiarmonice definită prin ecuația (27.579), iar prin $\mathscr{H}(\varphi)$ şi $\mathscr{K}(\varphi)$ au fost notate expresiile:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\varphi) &= h(W(t) \sin \varphi; pW \cos \varphi) \cos \varphi; \\ \mathscr{K}(\varphi) &= h(W(t) \sin \varphi; pW \cos \varphi) \sin \varphi. \end{aligned} \tag{27.583}$$

Întrucît s-a admis că vibrația neliniară descrisă prin ecuația diferențială (27.577) este periodică, rezultă că şi vibrația cvasiarmo-

Scanned with CamScanner

nică definită prin ecuația (27.579), care va modela vibrația neliniară studiată, trebuie să fie și ea periodică, de perioadă

$$T \approx \frac{2\pi}{p}, \tag{27.584}$$

egală practic cu cea a mișcării, ceea ce conduce la concluzia că și funcțiile $W(t)$ și $\alpha(t)$ de modulație a amplitudinii și fazei — și deci și derivatele lor în raport cu timpul — trebuie să fie periodice, de aceeași perioadă T, numai în aceste condițiuni putînd fi satisfăcută egalitatea

$$w(t + T) = w(t).$$

Aceasta inseamnă însă că funcțiile $\mathscr{H}(\varphi)$ și $\mathscr{K}(\varphi)$ vor fi și ele periodice, de astă dată de perioadă 2π, putînd fi dezvoltate, în consecință, în serii Fourier, de forma

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\varphi) &= \mathscr{H}_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} [M_\lambda \cos(\lambda\varphi) + N_\lambda \sin(\lambda\varphi)]; \\ \mathscr{K}(\varphi) &= \mathscr{K}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [P_\nu \cos(\nu\varphi) + Q_\nu \sin(\nu\varphi)], \end{aligned} \tag{27.585}$$

cu primii termeni ai dezvoltărilor dați de relațiile

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(W \sin\varphi; pW\cos\varphi)\cos\varphi \, d\varphi = \mathscr{H}_0(W); \\ \mathscr{K}_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(W \sin\varphi; pW\cos\varphi)\sin\varphi \, d\varphi = \mathscr{K}_0(W), \end{aligned} \tag{27.586}$$

ei fiind, după cum se vede, funcții de amplitudinea W.

Dacă se studiază mișcarea numai pe durata unui ciclu și se ține seama de faptul că, datorită valorii mici a parametrului ε din ecuația diferențială (27.577), variațiile funcțiilor $\dot{W}(t)$ și $\dot{\alpha}(t)$ in decursul unei perioade sînt lente, funcțiile $\dot{W}(t)$ și $\dot{\alpha}(t)$ vor putea fi aproxi-

Scanned with CamScanner

mate cu valorile medii pe durata unui ciclu ale lor, valori medii date de relațiile

$$\dot{W}(t)_m = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{W}(t)\,dt = -\frac{\varepsilon}{p}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathscr{H}(\varphi)\,d\varphi\,;$$

$$\dot{\alpha}(t)_m = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\alpha}(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{pW}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathscr{K}(\varphi)\,d\varphi, \qquad (27.587)$$

cu integralele din membrul drept avînd, în baza relațiilor (27.585), valorile

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{H}(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left\{\mathscr{H}_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}[M_\lambda \cos(\lambda\varphi) + N_\lambda \sin(\lambda\varphi)]\right\} d\varphi = $$
$$= 2\pi\,\mathscr{H}_0(W)\,;$$

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{K}(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left\{\mathscr{K}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}[P_\nu \cos(\nu\varphi) + Q_\nu \sin(\nu\varphi)]\right\} d\varphi = $$
$$= 2\pi\,\mathscr{K}_0(W). \qquad (27.588)$$

În baza precizărilor făcute mai sus, vor putea fi acceptate deci aproximările

$$\dot{W}(t) \approx \dot{W}(t)_m = -\frac{\varepsilon}{p}\,\mathscr{H}_0(W)\,;$$

$$\dot{\alpha}(t) \approx \dot{\alpha}(t)_m = \frac{\varepsilon}{p}\,\frac{\mathscr{K}_0(W)}{W}, \qquad (27.589)$$

prima putînd fi integrată prin separarea de variabile, rezultînd astfel relația

$$\int \frac{dW}{\mathscr{H}_0(W)} = -\frac{\varepsilon}{p}\,t + C_1, \qquad (27.590)$$

iar a doua furnizînd, după înlocuirea lui W cu expresia sa în funcție de timp dedusă din relația precedentă și după integrare, funcția de modulație a fazei

$$\alpha(t) = \frac{\varepsilon}{p}\int \frac{\mathscr{K}_0(W)}{W(t)}\,dt + C_2. \qquad (27.591)$$

Scanned with CamScanner

Constantele de integrare C_1 și C_2 vor putea fi determinate cu ajutorul condițiilor inițiale, care corespund, în mod obișnuit, cazului cînd punerea în mișcare a sistemului vibrant se realizează numai prin îndepărtarea sa din poziția de echilibru stabil într-o poziție determinată prin valoarea $w = W$ a parametrului lagrangeian, adică condițiile (27.528).

d) Metode de soluții medii. Aceste metode aproximative de integrare, bazate pe ideea adoptării unor soluții care satisfac „în medie" ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor neliniare, au avantajul că pot fi aplicate la clase mai largi de tipuri de ecuații diferențiale neliniare și că furnizează, de cele mai multe ori, relații directe între amplitudinile și pulsațiile excitațiilor, permițînd astfel construcția curbelor de răspuns amplitudine - frecvență.

În principiu, metodele de soluții medii constau în adoptarea unor soluții periodice de forma

$$w_1 = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t), \tag{27.592}$$

C_1 și C_2 fiind constante arbitrare, iar $\psi_1(t)$ și $\psi_2(t)$ fiind funcții periodice, de perioadă

$$T = \frac{2\pi}{p}, \tag{27.593}$$

unde p este pulsația excitației, considerată armonică, aceste funcții, alese în mod convenabil, purtînd numele de *funcții pondere*; în mod obișnuit, ele sînt reprezentate prin funcțiile trigonometrice $\psi_1(t) = \cos(pt)$ și $\psi_2(t) = \sin(pt)$.

Prin efectuarea schimbării de variabilă independentă

$$\tau = pt \tag{27.594}$$

uncțiile $\psi_1(t)$ și $\psi_2(t)$ devin funcții periodice de τ, de perioadă $\mathcal{T} = 2\pi$, $\psi_1(t) = \Psi(\tau)$; $\psi_2(t) = \Psi_2(\tau)$; $\mathcal{T} = pT = 2\pi$), astfel că ecuația (27.592) va lua forma

$$w_1 = C_1\Psi_1(\tau) + C_2\Psi_2(\tau). \tag{27.595}$$

Se demonstrează, în calculul variațional, [40], că o asemenea soluție poate fi considerată și ca soluție a unei ecuații diferențiale de forma

$$E(w, w', w'', \tau) = 0, \tag{27.596}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$w' = \frac{dw}{d\tau}; \; w'' = \frac{d^2w}{d\tau^2},$$

cu condiția satisfacerii, de către funcțiile pondere, a relațiilor

$$\int_0^{2\pi} E(w_1, w_1', w_1'', \tau)\, \Psi_1(\tau)\, d\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} E(w_1, w_1', w_1'', \tau)\, \Psi_2(\tau)\, d\tau = 0, \qquad (27.597)$$

care vor reprezenta două ecuații algebrice în constantele de integrare C_1 și C_2; prin exprimarea acestor constante în funcție de amplitudinea și de faza inițială a vibrației neliniare și apoi prin eliminarea, între cele două ecuații astfel modificate, a fazei inițiale, se obține o relație între amplitudinea vibrației și între pulsația excitației, care va permite construirea curbei de răspuns amplitudine-frecvență.

În continuare, va fi prezentată cea mai des întîlnită dintre aceste metode și anume

— *Metoda Ritz.* Această metodă este folosită la integrarea ecuațiilor diferențiale neliniare cu funcțiile $G(w, \dot{w})$ și $F(t)$ de forma

$$G(w, \dot{w}) = 2\mu\, k\, h^*(\dot{w}) + k^2 g^*(w);$$

$$F(t) = -\, Q^0 \cos(pt), \qquad (27.598)$$

adică a ecuațiilor diferențiale de tipul

$$\ddot{w} + 2\mu k\, h^*(\dot{w}) + k^2 g^*(w) - Q^0 \cos(pt) = 0, \qquad (27.599)$$

corespunzătoare unor sisteme vibrante neliniare amortizate neautonome, excitate armonic.

Prin efectuarea schimbării de variabilă (27.594), (cu : $\dot{w} = pw'$; $\ddot{w} = p^2 w''$; $h^*(\dot{w}) = h^*(pw')$), ecuația (27.599) va lua forma

$$E(w, w', w'', \tau) = p^2 w'' + 2\mu k h^*(pw') + k^2 g^*(w) - Q^0 \cos \tau = 0. \qquad (27.600)$$

Adoptînd o soluție periodică de forma

$$w_1 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau = W \cos(\tau - \alpha), \qquad (27.601)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$C_1 = W\cos\alpha;\ C_2 = W\sin\alpha \tag{27.602}$$

și ale cărei derivate de ordinul unu și doi în raport cu variabila τ au expresiile

$$\begin{aligned} w_1' &= -C_1\sin\tau + C_2\cos\tau = -W\sin(\tau-\alpha);\\ w_1'' &= -[C_1\cos\tau + C_2\sin\tau] = -W\cos(\tau-\alpha), \end{aligned} \tag{27.603}$$

ei îi vor corespunde funcțiile pondere

$$\psi_1(\tau) = \cos\tau;\ \psi_2(\tau) = \sin\tau \tag{27.604}$$

și expresia

$$\begin{aligned} E(w_1, w_1', w_1'', \tau) = (-Q^0 - p^2C_1)\cos\tau - p^2C_2\sin\tau +\\ + 2\mu kh^*(w_1') + k^2g^*(w_1) \end{aligned} \tag{27.605}$$

pentru membrul sting al ecuației (27.600), astfel că înlocuirea expresiilor (27.603) și (27.604) în ecuațiile (27.597) va conduce la egalitățile

$$\int_0^{2\pi}[(-Q^0 - p^2C_1)\cos\tau - p^2C_2\sin\tau + 2\mu kh^*(w_1') + \\ + k^2g^*(w_1)]\cos\tau\,\mathrm{d}\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}[(-Q^0 - p^2C_1)\cos\tau - p^2C_2\sin\tau + 2\mu kh^*(w_1') + \\ + k^2g^*(w_1)]\sin\tau\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{27.605}$$

Sînt ușor de verificat, ținînd seama și de relațiile (27.602), semnificațiile de mai jos ale primelor două integrale din fiecare din ecuațiile (27.605):

$$\int_0^{2\pi}(-Q^0p^2C_1)\cos^2\tau\,\mathrm{d}\tau = (-Q^0 - p^2C_1)\pi = (-Q^0 - p^2W\cos\alpha)\pi;$$

$$-\int_0^{2\pi}p^2C_2\sin\tau\cos\tau\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi}(-Q^0 - p^2C_1)\cos\tau\sin\tau\,\mathrm{d}\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}p^2C_2\sin^2\tau\,\mathrm{d}\tau = \pi p^2C_2 = (p^2W\sin\alpha)\pi. \tag{27.606}$$

Scanned with CamScanner

Pe de altă parte, dacă se efectuează schimbarea de variabilă

$$\tau - \alpha = \sigma, \tag{27.607}$$

cu $d\tau = d\sigma$, ultima integrală din fiecare din relațiile (27.605) va putea fi scrisă sub forma

$$\int_0^{2\pi} k^2 g^*(w_1) \cos \tau \, d\tau = k^2 \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \cos(\sigma + \alpha) \, d\sigma =$$

$$= k^2 \cos \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \cos \sigma \, d\sigma - k^2 \sin \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma \, d\sigma;$$

$$\int_0^{2\pi} k^2 g^*(w_1) \sin \sigma \, d\sigma = k^2 \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \sin(\sigma + \alpha) \, d\sigma =$$

$$= k^2 \sin \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \cos \sigma \, d\sigma + k^2 \cos \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma \, d\sigma. \tag{27.608}$$

Se va observa acum că întrucît soluția w_1 este periodică, funcția $g^*(w_1)$ este și ea periodică și pară în argumentul σ și că, în consecință, și produsele $g^*(W \cos \sigma) \cos \sigma$ și $g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma$ sînt și ele periodice. Cum se știe că integrala pe durata unei perioade a unei funcții periodice este independentă de limita inferioară a integralei, vor putea fi scrise relațiile:

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \cos \sigma \, d\sigma = \int_0^{2\pi} g^*(W \cos \sigma) \cos \sigma \, d\sigma = P(W);$$

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = \int_{-\pi}^{+\pi} g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = 0, \tag{27.609}$$

ultima egalitate fiind justificată de faptul că funcția de sub semnul de integrare ($g^*(W \cos \sigma) \sin \sigma$) este o funcție impară în variabila σ.

În baza relațiilor (27.609), expresiile (27.608) iau formele

$$\int_0^{2\pi} k^2 g^*(w_1) \cos \tau \, d\tau = k^2 \cos \alpha \, P(W);$$

$$\int_0^{2\pi} k^2 g^*(w_1) \sin \tau \, d\tau = k^2 \sin \alpha \, P(W). \tag{27.610}$$

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

În fine, trecînd și la calculul penultimelor integrale din membrul stîng al egalităților (27.605), se va observa mai întîi că prin schimbarea de variabilă (27.607) (cu : $w_1' = -W \sin \sigma$), ele iau formele

$$\int_0^{2\pi} 2\mu k h^*(pw_1') \cos \tau \, d\tau = 2\mu k \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \cos (\sigma + \alpha) \, d\sigma =$$

$$= 2\mu k \cos \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \cos \sigma \, d\sigma -$$

$$- 2\mu k \sin \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma ;$$

$$\int_0^{2\pi} 2\mu k h^*(pw_1') \sin \tau \, d\tau = 2\mu k \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \sin (\sigma + \alpha) \, d\sigma =$$

$$= 2\mu k \sin \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \cos \sigma \, d\sigma +$$

$$+ 2\mu k \cos \alpha \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma. \qquad (27.611)$$

Este suficient acum să se observe că funcția $h^*(-pW \sin \sigma)$ a devenit funcție periodică impară în σ și că produsul $h^*(-pW \sin \sigma) \times$ $\times \cos \sigma$ este și el funcție priodică impară, în timp ce produsul $h^*(-pW \sin \sigma) \sin \sigma$ este funcție periodică pară de σ, pentru ca, ținînd seama și de faptul că integrala pe durata unei perioade a unei funcții periodice nu depinde de limita inferioară, să rezulte egalitățile

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \cos \sigma \, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} h^*(-pW \sin \sigma) \cos \sigma \, d\sigma = 0 ;$$

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} h^*(-pW \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = \int_0^{2\pi} h^*(-pW \sin \sigma) \sin \sigma \, d\sigma = R(W), \qquad (27.612)$$

Scanned with CamScanner

în baza cărora expresiile (27.611) vor lua formele

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} 2\mu k h^*(pw_1') \cos \tau \, d\tau = -2\mu k \sin \alpha \cdot R(W); \\ \int_0^{2\pi} 2\mu k h^*(pw_1') \sin \tau \, d\tau = 2\mu k \cos \alpha \cdot R(W). \end{cases} \quad (27.613)$$

Avînd în vedere relațiile (27.606) (27.610) și (27.612), se vor putea retranscrie egalitățile (27.605) sub forma

$$\pi(-Q^0 - p^2 W \cos \alpha) - 2\mu k \sin \alpha \cdot R(W) + k^2 \cos \alpha \cdot P(W) = 0;$$

$$-\pi p^2 W \sin \alpha + 2\mu k \cos \alpha \cdot R(W) + k^2 \sin \alpha \cdot P(W) = 0,$$

sau încă, împărțind prin π și introducînd notațiile

$$\frac{1}{\pi W} F(W) = \Phi(W); \quad \frac{1}{\pi k W} R(W) = \Psi(W), \qquad (27.614)$$

sub forma

$$\begin{aligned} &[k^2\Phi(W) - p^2] W \cos \alpha - 2\mu k^2 \Psi(W) W \sin \alpha = Q^0; \\ &[k^2\Phi(W) - p^2] W \sin \alpha + 2\mu k^2 \Psi(W) W \cos \alpha = 0. \end{aligned} \qquad (27.615)$$

Din ultima relație rezultă faza inițială α, determinată prin ecuația

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\mu k^2 \Psi(W)}{k^2\Phi(W) - p^2} = -\frac{2\mu \Psi(W)}{\Phi(W) - y^2}}, \qquad (27.615)$$

— cu $y = \dfrac{p}{k}$ reprezentînd pulsația relativă a excitației —, această fază depinzînd deci de amplitudinea W a vibrației.

De asemenea, înmulțind prima dintre ecuațiile (27.615) cu $\cos \alpha$ și pe cea de-a doua cu $\sin \alpha$ și adunîndu-le, se obține egalitatea

$$(k^2\Phi(W) - p^2]W = Q^0 \cos \alpha,$$

Scanned with CamScanner

care, prin ridicare la pătrat și exprimarea lui cos α în funcție de tgα, conduce la următoarea relație între amplitudinea W a vibrației și pulsația relativă a excitației :

$$\boxed{[\Phi(W) - y^2]^2 + 4\mu^2\Psi^2(W) = \left(\frac{H}{W}\right)^2}, \qquad (27.617)$$

cu

$$H = \frac{Q^0}{k^2},$$

această ultimă relație căpătînd următoarele forme particulare :

— forma :

$$\boxed{\Phi(W) - y^2 = 0}, \qquad (27.618)$$

pentru sistemele vibrante neliniare autonome neamortizate ($Q^0 = 0$; $\Psi(W) \equiv 0$) ;

— forma :

$$\boxed{[\Phi(W) - y^2]^2 + 4\mu^2\Psi^2(W) = 0}, \qquad (27.619)$$

pentru sistemele vibrante neliniare autonome amortizate ($Q^0 = 0$) ;

— forma :

$$\boxed{\Phi(W) - y^2 = \frac{H}{W}} \qquad (27.620)$$

pentru sistemele vibrante neliniare neautonome neamortizate ($\Psi(W) = 0$).

Reprezentarea, în baza relației (27.617), a variației pulsației relative y în funcție de amplitudinea W va conduce la o curbă (Γ_{W_a}), care va reprezenta curba de răspuns amplitudine-frecvență a sistemului vibrant neliniar considerat ; reprezentarea grafică, în baza relației (27.618), a variației pulsației relative y în funcție de ampli-

Scanned with CamScanner

tudinea W, va furniza o altă curbă, (Γ_{W_0}), care va fi numită *curba de răspuns a vibrației neliniare libere neamortizate.*

Curbele (Γ_{W_a}) și (Γ_{W_0}) au un punct comun, a cărei ordonată, W_{rez}, va putea fi obținută prin eliminarea lui y^2 între relațiile (27.617) și (24.618); rezultă astfel ecuația

$$2\mu\Psi(W_{rez}) = \frac{H}{W_{rez}}, \tag{27.621}$$

care va furniza valoarea W_{rez} a amplitudinii, numită *amplitudine la rezonanță* a vibrației neliniare determinată prin ecuația diferențială (27.599).

Se demonstrează [40] că în condițiile rezonanței în amplitudine faza α ia valoarea $\frac{\pi}{2}$.

În cazul cînd amortizarea este liniară, adică se pot scrie relațiile

$$h^*(\dot{w}) = h^*(pw') \equiv \dot{w} \equiv pw'$$

și

$$h^*(\dot{w}_1) = h^*(pw_1') = -pW\sin(\tau - \alpha) = -pW\sin\sigma,$$

funcțiile $R(W)$ și $\Psi(W)$, definite prin relațiile (27.612) și (27.614), iau expresiile concrete

$$R(W) = -\int_0^{2\pi} pW\sin^2\sigma\, d\sigma = -pW\pi, \tag{27.622}$$

respectiv

$$\Psi(W) = \frac{1}{\pi k W} R(W) = -\frac{p}{k} = -y, \tag{27.623}$$

iar ecuațiile (27.616) și (27.617), care dau faza și legătura dintre amplitudine și pulsația relativă, iar formele particulare

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\mu y}{\Phi(W) - y^2}}, \tag{27.624}$$

respectiv

$$\boxed{[\Phi(W) - y^2]^2 + 4\mu^2 y^2 = \left(\frac{H}{W}\right)^2} \cdot \qquad (27.625)$$

Rezolvînd ultima ecuație bipătrată în raport cu y^2, rezultă următoarea expresie a acestei mărimi

$$y^2 = [\Phi(W) - 2\mu^2] \pm \sqrt{\left(\frac{H}{W}\right)^2 - 4\mu^2[\Phi(W) - \mu^2]} \cdot \qquad (27.626)$$

Această din urmă relație permite reprezentarea grafică, în planul $\Omega W y^2$, a variației amplitudinii W cu pulsația relativă y, sub forma unei curbe (Γ_{W_a}), care, pentru o rigiditate neliniară cubică, va avea forma din fig. 27.34, a în cazul cuplajului elastic tare și forma din fig. 27.34 b, în cazul cuplajului elastic moale.

Condiția (27.621) de rezonanță în amplitudine va lua, în aceste condiții, forma particulară

$$2\mu y = \frac{H}{W_{rez}}, \qquad (27.627)$$

evidențiind existența unei legi hiperbolice în variația amplitudinii la rezonanță cu pulsația relativă; reprezentarea grafică, în același plan $\Omega W y^2$, (fig. 27.35), a variației modulului amplitudinii în funcție de pătratul pulsației relative va conduce la o curbă (Γ_{rez}), care va reprezenta locul geometric al punctelor de pe curbele de răspuns amplitudine-frecvență corespunzătoare rezonanței în amplitudine.

Întrucît punctul corespunzător rezonanței în amplitudine al curbei (Γ_{W_a}) este situat între punctele de intersecție ale curbei (Γ_{rez}) cu ramurile curbei de răspuns (Γ_{W_0}), corespunzătoare cazului cînd se neglijează amortizarea, (fig. 27.35), în practică acest punct se determină, de cele mai multe ori, intersectînd curba (Γ_{rez}) cu curba (Γ_{W_0}), mult mai ușor de construit decît curba (Γ_{W_a}), în baza relației (27.620).

Scanned with CamScanner

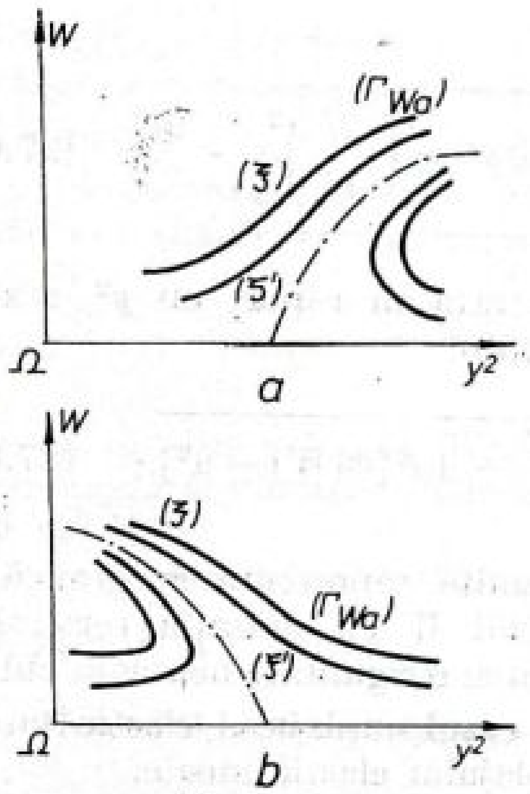


Fig. 27.34.

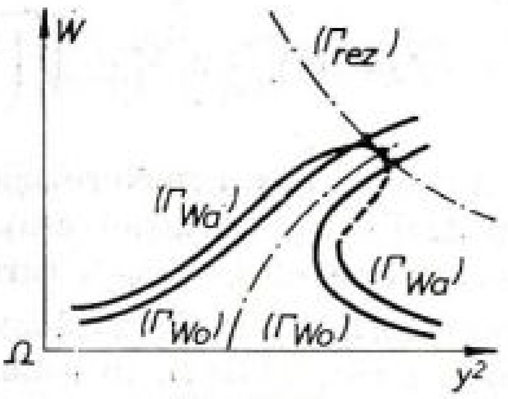


Fig. 27.35.

27.3. *Determinarea răspunsurilor sistemelor vibrante prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ale mișcărilor lor vibratorii*

Considerind, în cele ce urmează, numai cazul sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate, cu mișcarea descrisă deci prin o singură ecuație diferențială ordinară de ordinul doi în paramaterul lagrangeian w, această ecuație va putea fi scrisă sub următoarea formă generală

$$\ddot{w} = F(t, \dot{w}, w), \qquad (27.628)$$

în care se încadrează, ca forme particulare, toate tipurile de ecuații diferențiale examinate în cadrul subpunctelor precedente.

Pentru a obține o soluție determinată, corespunzătoare mișcării efective a sistemului vibrant considerat, ecuației diferențiale (27.628) trebuie să i se asocieze sistemul cunoscut de condiții inițiale

$$t = 0 \; \{w(0) = w^0;\; \dot{w}(0) = \dot{w}^0\}. \qquad (27.629)$$

Scanned with CamScanner

Prin introducerea notației

$$u = \dot{w} = \frac{dw}{dt}$$

pentru viteza generalizată a sistemului vibrant, ecuația diferențială (27.628) va putea fi înlocuită cu următorul sistem echivalent de două ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi în funcțiile necunoscute de timp u și w:

$$\dot{w} = u;$$
$$\dot{u} = F(t, u, w), \tag{27.630}$$

căruia i se va asocia sistemul de condiții inițiale

$$t = 0 \{w(0) = w^0;\ u(0) = u^0 = \dot{w}^0\}. \tag{27.631}$$

În principiu, integrarea numerică a ultimului sistem de ecuații constă în determinarea, pentru valori crescătoare succesive — plecîndu-se de la valoarea inițială $t_0 = 0$ a argumentului t, de forma

$$t_{i+1} = t_i + h,\quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{27.632}$$

unde h — de regulă, o constantă comună tuturor determinărilor — este *pasul de integrare*, a valorilor corespunzătoare ale funcțiilor $w(t)$ și $u(t)$, adică

$$w_{i+1} = w(t_{i+1});\ u_{i+1} = u(t_{i+1}),\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{27.633}$$

În funcție de procedeele folosite pentru evaluarea aproximativă a valorilor w_{i+1} și u_{i+1} ale celor două funcții necunoscute, metodele de integrare numerică se împart în următoarele două mari categorii:

— *Metode cu pași separați*, caracterizate prin elaborarea unor algortime de calcul al valorilor w_{i+1} și u_{i+1} ale funcțiilor $w(t)$ și $u(t)$ numai cu ajutorul pasului de integrare și ale valorilor w_i și u_i ale determinării precedente;

— *Metode cu pași legați*, la care algoritmele de calcul al valorilor w_{i+1} și u_{i+1} ale funcțiilor $w(t)$ și $u(t)$ folosesc un număr oarecare dintre valorile precedente succesive ale funcțiilor de integrat.

Cele mai des folosite, în ambele categorii de metode de integrare numerică, sînt *algoritmele explicite*, de forma

$$w_{i+1} = w_i + hg(t_i, u_i, w_i), \tag{27.634}$$

cu mărimea de calculat w_{i+1} figurînd numai în membrul stîng.

Scanned with CamScanner

Este ușor de înțeles că oricare va fi metoda de integrare numerică folosită, între valorile reale ale funcțiilor $w(t)$ și $u(t)$ corespunzătoare unui moment t_i și cele calculate cu ajutorul algoritmelor va exista o diferență, care este numită *eroare totală de pas* și care se compune din umătorii trei termeni :

— din *eroarea de aproximare*, datorată aproximărilor folosite în elaborarea algoritmului ; se demonstrează că această eroare este proporțională cu o anumită putere a pasului, ea putînd fi redusă deci prin micșorarea lui h ;

— din *eroarea de rotunjire*, datorită limitărilor numărului de zecimale în calculul diverselor mărimi ; se demonstrează că această componentă a erorii totale de pas crește odată cu creșterea numărului de pași folosiți în integrare ;

— din *eroarea de propagare*, datorată erorilor introduse în pașii precedenți.

Deoarece, așa cum rezultă din precizările de mai sus, măsurile de corectare a erorilor de aproximare și de rotunjire au consecințe contrarii — micșorîndu-se pasul, deci diminuînd eroarea de aproximare, crește numărul de pași, deci crește eroarea de rotunjire —, este necesară alegerea unei valori optime a pasului.

În mod obișnuit, această alegere se face prin repetarea calculului valorilor mărimilor w_{i+1} și u_{i+1} pentru mai multe valori ale pasului de integrare, plecîndu-se de la o valoare inițială h și reducînd apoi succesiv această valoare într-un raport determinat, obișnuit în raportul 1/2 ; în momentul în care, la trecerea de la o valoare la alta a pasului, se vor înregistra variații mici ale valorilor w_{i+1} calculate, se va putea considera că intervalul respectiv de variație a pasului este intervalul cu valori optime ale lui.

În cele ce urmează va fi prezentată una din cele mai cunoscute și mai des folosite dintre metodele de integrare numerică cu pași separați, cu algortim explicit, și anume

— *Metoda Runge-Kutta*. În principiu, *algoritmul Runge-Kutta de ordinul n* folosit la integrarea sistemului de ecuații diferențiale (27.630) este reprezentat prin relațiile

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=1}^{n} a_j k_{ij} ; \quad w_{i+1} = w_i + \sum_{j=1}^{n} a_j q_{ij}, \qquad (27.635)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

Scanned with CamScanner

unde k_{ij} și q_{ij} sînt niște funcții — determinate pe baza unor calcule de aproximare — de valorile t_i, u_i și w_i corespunzătoare pasului precedent, ale argumentului t și funcțiilor $u(t)$ și $w(t)$ și de niște coeficienți care, împreună cu coeficienții a_j, vor putea fi determinați din condițiile de identitate a expresiilor (27.635) cu expresiile

$$u_{i+1} = u(t_i + h) = u(t_i) + h\dot{u}(t_i) + \frac{h^2}{2!}\ddot{u}(t_i) + \cdots ;$$

$$w_{i+1} = w(t_i + h) = w(t_i) + h\dot{w}(t_i) + \frac{h^2}{2!}\ddot{w}(t_i) + \cdots , \qquad (27.636)$$

rezultînd din dezvoltarea în serii Taylor a funcțiilor $u(t_i + h)$ și $w(t_i + h)$ în jurul valorii t_i.

În mod curent, se lucrează cu *algoritmul Runge-Kutta de ordinul patru*, care oferă o precizie satisfăcătoare în cele mai multe din situațiile întîlnite în aplicațiile practice și care are forma

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4});$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(q_{i1} + 2q_{i2} + 2q_{i3} + q_{i4}), \qquad (27.637)$$

cu mărimile k_{ij} și q_{ij} date de relațiile [9]

$$k_{i1} = hF(t_i, u_i, w_i);$$

$$k_{i2} = hF\left(t_i + \frac{h}{2};\ u_i + \frac{k_{i1}}{2};\ w_i + \frac{q_{i1}}{2}\right);$$

$$k_{i3} = hF\left(t_i + \frac{h}{2};\ u_i + \frac{k_{i2}}{2};\ w_i + \frac{q_{i2}}{2}\right);$$

$$k_{i4} = hF(t_i + h;\ u_i + k_{i3};\ w_i + q_{i3}), \qquad (27.638)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\begin{cases} q_{i1} = h u_i ; & q_{i3} = h\left(u_i + \dfrac{k_{i2}}{2}\right); \\ q_{i2} = h\left(u_i + \dfrac{k_{i1}}{2}\right); & q_{i4} = h(u_i + k_{i3}). \end{cases} \tag{27.639}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Introducind ultimele expresii în relațiile (27.638), se obțin următoarele formule de recurență pentru calculul direct al mărimilor k_{ij} :

$$k_{i1} = hF(t_i, u_i, w_i);$$

$$k_{i2} = hF\left(t_i + \frac{h}{2};\ u_i + \frac{k_{i1}}{2};\ w_i + \frac{h}{2} u_i\right);$$

$$k_{i3} = hF\left(t_i + \frac{h}{2};\ u_i + \frac{k_{i2}}{2};\ w_i + \frac{h}{2} u_i + \frac{h}{4} k_{i1}\right);$$

$$k_{i4} = hF\left(t_i + h;\ u_i + k_{i3};\ w_i + hu_i + \frac{h}{2} k_{i2}\right) \tag{27.640}$$

De asemenea, introducerea expresiilor (27.639) în cea de-a doua dintre relațiile (27.637) face ca acest sistem să capete forma finală

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4});$$

$$w_{i+1} = w_i + hu_i + \frac{1}{6}(k_{i1} + k_{i2} + k_{i3}), \tag{27.641}$$

în baza căruia se va putea efectua acum integrarea numerică a sistemului (27.632) de ecuații diferențiale, fiecare pas de ordinul (i + 1) al integrării realizîndu-se prin următoarele două operații :

— Calculul, în baza relațiilor (27.649), a mărimilor k_{ij} corespunzătoare pasului considerat;

— Calculul valorilor $u_{i+1} = u(t_{i+1})$ și $w_{i+1} = w(t_{i+1})$ ale funcțiilor $u(t)$ și $w(t)$ corespunzătoare pasului considerat prin utilizarea formulelor (27.641).

Se înțelege că operația de integrare numerică va trebui începută cu primul pas (i = 0), în care scop vor trebui calculate mărimile k_{0j} introducîndu-se în relațiile (27.640) condițiile inițiale (27.631), rezultînd astfel expresiile

$$k_{01} = hF(0, u^0, w^0);$$

$$k_{02} = hF\left(0 + \frac{h}{2};\ u^0 + \frac{k_{01}}{2};\ w^0 + \frac{h}{2}\,u^0\right);$$

$$k_{03} = hF\left(0 + \frac{h}{2};\ u^0 + \frac{k_{02}}{2};\ w^0 + \frac{h}{2}\,u^0 + \frac{h}{4}\,k_{01}\right);$$

$$k_{04} = hF\left(0 + h;\ u^0 + k_{03};\ w^0 + hu^0 + \frac{h}{2}\,k_{02}\right) \qquad (27.642)$$

și deci valorile

$$u_1 = u^0 + \frac{1}{6}(k_{01} + 2k_{02} + 2k_{03} + k_{04});$$

$$w_1 = w^0 + hu^0 + \frac{1}{6}(k_{01} + k_{02} + k_{03}), \qquad (27.643)$$

ale funcțiilor $v(t)$ și $w(t)$; această etapă a procesului de integrare este numită *autopornirea metodei Runge-Kutta*.

De la pasul unu se va trece apoi la pasul doi, calculîndu-se mărimile k_{1j} și valorile corespunzătoare u_2 și w_2 ale funcțiilor $u(t)$ și $w(t)$ ș.a.m.d., procesul de integrare continuînd pînă la ultimul pas, $(i = n - 1)$.

Deși metoda Runge-Kutta este destul de laborioasă, ea necesitînd un volum apreciabil de calcule la fiecare pas al integrării, totuși ea este mai totdeauna preferată celorlalte metode de integrare numerică, datorită următoarelor avantaje incontestabile ale ei:

— Este o metodă cu autopornire, adică permite determinarea soluției numerice plecîndu-se de la un singur set de valori cunoscute ale mărimilor t, u și w, cel corespunzător condițiilor inițiale;

— pentru algortimul de ordinul patru, permite determinarea soluției numerice cu un înalt grad de precizie;

— aplicarea ei nu prilejuiește apariția aspectelor de instabilitate în determinarea soluției.

Scanned with CamScanner

§ 28. Răspunsurile sistemelor vibrante liniare supuse la excitații aleatoare

Considerînd și aici numai cazul sistemelor vibrante liniare cu un singur grad de libertate, cu mișcarea vibratorie proprie descrisă deci prin ecuația diferențială

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = 0, \tag{28.1}$$

care, așa cum s-a arătat la sfîrșitul subpunctului 27.1.2. al paragrafului 27, coincide și cu ecuația diferențială în coordonate principale, studiul răspunsului unui asemenea sistem vibrant supus la o excitație aleatoare staționară ergodică va consta în determinarea funcțiilor statistice ale răspunsului, răspuns care, în cazul sistemelor vibrante liniare, are și el caracter aleatoriu staționar ergodic.

Pentru a se putea efectua un asemenea studiu este absolut necesar să se rezolve în prealabil următoarele două probleme:

— definirea caracteristicilor dinamice de răspuns ale sistemelor vibrante liniare, prin intermediul cărora se poate face legătura între excitație și răspuns;

— stabilirea relațiilor între caracteristicile statistice ale excitației și răspunsului.

În cele ce urmează, vor fi prezentate rezolvările acestor două probleme de bază ale studiului răspunsurilor sistemelor vibrante liniare la excitații aleatoare, precum și modalitatea de a efectua un asemenea studiu.

28.1. *Caracteristicile dinamice de răspuns ale sistemelor vibrante liniare*

Aceste caracteristici au fost deja definite, sub forma generală, în cadrul subpunctului 27.1.2.2 al paragrafului 27, ele fiind reprezentate prin cele două funcții de răspuns ale sistemului vibrant:

— funcția de răspuns în frecvență;

— funcția de răspuns în timp, (la impulsul unitate).

Scanned with CamScanner

Întrucît în această parte a lucrării se impun unele noi precizări în legătură cu cele două noțiuni menționate mai sus, aceste precizări vor fi făcute în continuare.

28.1.1. Funcția de răspuns în frecvență a unui sistem vibrant liniar

În paragraful 27.1.2 funcția de răspuns în frecvență a fost definită pentru un sistem vibrant liniar excitat periodic și pentru un mod propriu de vibrație de ordinul i, ecuația de definiție a ei fiind reprezentată prin relația (27.363); această noțiune poate fi extinsă însă și la cazul unei excitații oarecare, $Q_\alpha = Q(t)$, cînd mișcarea sistemului vibrant liniar cu un singur grad de libertate va fi descrisă prin ecuația

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = Q(t). \tag{28.2}$$

Într-adevăr, aplicînd ambilor membri ai ecuației precedente transformarea Fourier (se înmulțesc ambii membri ai ei cu $e^{-ipt}\,dt$ și se integrează de la $-\infty$ la $+\infty$), rezultă, ținînd seama și de proprietățile transformatelor Fourier ale derivatelor unei funcții, relația

$$\mathcal{F}[w(t)]\{a(ip)^2 + (ip)\,b + c\} = \mathcal{F}[Q(t)],$$

sau încă, notînd cu

$$\mathcal{W}(p) = \mathcal{F}[w(t)];\ \mathcal{Q}(p) = \mathcal{F}[Q(t)] \tag{28.3}$$

transformatele Fourier ale răpunsului și excitației, se mai poate scrie

$$\mathcal{W}(p) = \frac{1}{a(ip)^2 + ipb + c}\,\mathcal{Q}(p) = \overline{H}(p)\,\mathcal{Q}(p), \tag{28.4}$$

unde mărimea

$$\overline{H}(p) = \frac{1}{c - ap^2 + ibp} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{k^2 - p^2 + i2\mu p} = H(p)e^{-i\beta(p)} \tag{28.5}$$

va reprezenta funcția complexă de răspuns în frecvență a sistemului vibrant liniar considerat, iar mărimile

$$H(p) = |\overline{H}(p)| = \frac{1}{a\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4\mu^2p^2}};\ \beta(p) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\mu p}{k^2 - p^2}\right), \tag{28.6}$$

CamScanner
Scanned with CamScanner

cu semnificațiile cunoscute ale simbolurilor μ și k $\left(\mu = \frac{b}{2a};\ k^2 = \frac{c}{a}\right)$, vor reprezenta caracteristica amplitudine și caracteristica fază a sistemului vibrant; se observă că în condițiile sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate ($a = \varepsilon$; $b = \eta$; $c = \varkappa$), expresiile (28.5) și (28.6) ale funcției complexe de răspuns în frecvență și ale caracteristicilor amplitudine și fază coincid cu expresiile acelorași mărimi definite prin relațiile (27.363), respectiv (27.340) și (27.341).

Întrucît dependența, sub forma (28.4), a răspunsului de excitație nu este influențată de forma excitației, rezultă că ea se va păstra și în cazul unei excitații aleatoare, determinînd, în acest caz, un caracter aleatoriu și răspunsului; mai mult chiar, relația (28.4) permite să se tragă concluzia că forma funcției de distribuție a probabilității de amplitudine va fi aceeași la răspuns, ca și la excitație.

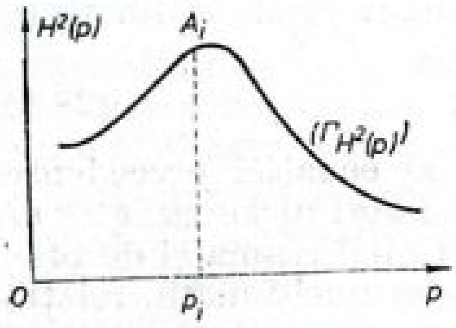


Fig. 28.1

Din precizările de mai sus rezultă că pentru a se putea studia răspunsul unui sistem vibrant liniar la o excitație aleatoare, este absolut necesară stabilirea, în prealabil, a expresiei funcției de răspuns în frecvență a sistemului vibrant respectiv; din motive ce-și vor găsi justificarea ulterior, se preferă ca această funcție să fie reprezentată prin diagrama variației patratului caracteristicii amplitudine în funcție de pulsația excitației, grafic avînd o formă ca cea din fig. 28.1.

28.1.2. Funcția de răspuns în timp

Funcția de răspuns în timp, sau funcția pondere cum a mai fost numită ea, a unui sistem vibrant liniar este funcția de răspuns al lui la o excitație impuls unitate

$$Q(t) = \delta(t),$$

unde $\delta(t)$ este cunoscuta funcție simbol a lui Dirac, introdusă în § 23 și utilizată și în subpunctul 27.1.2 c) și a fost definită, pentru un mod propriu de vibrație de ordinul i, prin relația (27.410); în cazul unui sistem vibrant cu un sungur grad de libertate, cînd ecuația diferențială în coordonata principală corespunzătoare unui astfel de sistem coincide cu ecuația diferențială în parametrul lagrangean

obişnuit $\left(\xi = w;\ \varepsilon = a;\ \eta = b;\ \varkappa = c;\ X(t) = Q(t);\ k = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{c}{a}};\quad \zeta = \frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon\varkappa}} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \frac{\mu}{k};\quad k_a = k\sqrt{1-\zeta^2}\right)$, expresia (27.410) a funcţiei pondere va lua forma

$$\pi(t) = \frac{1}{ak_a} e^{-k\zeta t} \sin(k_a t), \tag{28.7}$$

cu graficul reprezentat în fig. 28.2.

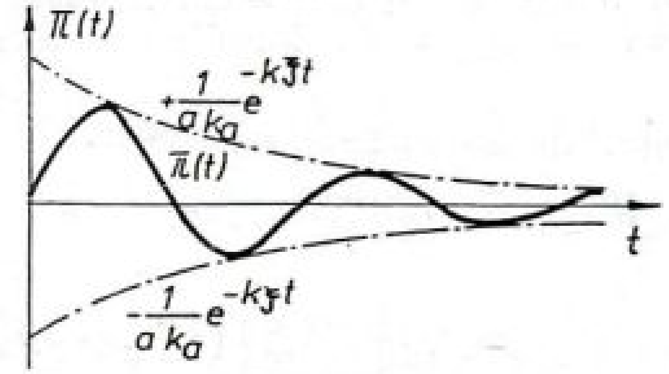


Fig. 28.2.

Această funcţie se bucură de următoarea proprietate:

— Transformata Fourier a funcţiei pondere este egală cu funcţia complexă de răspuns în frecvenţă a sistemului vibrant liniar, adică se poate scrie

$$\mathscr{F}[\pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \overline{H}(p). \tag{28.8}$$

Ultima relaţie poate fi demonstrată imediat, scriindu-se egalitatea (28.4) pentru răspunsul $\pi(t)$ şi pentru excitaţia $Q(t) = \delta(t)$ ($\mathscr{W}(p) = \mathscr{F}[w(t)] = \mathscr{F}[\pi(t)]$; $\mathscr{Q}(p) = \mathscr{F}[\delta(t)]$) şi ţinîndu-se seama şi de condiţia (27.296), adică scriind

$$\mathscr{F}[\pi(t)] = \overline{H}(p)\,\mathscr{F}[\delta(t)] = \overline{H}(p).$$

În legătură cu relaţia (28.8) se vor face următoarele două observaţii:

— Întrucît integrala definită nu depinde de modul de notare a variabilei de integrare, se vor putea face oricînd inlocuirile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\, e^{-ip\sigma}\, \mathrm{d}\sigma = \overline{H}(p). \tag{28.9}$$

Scanned with CamScanner

— Înlocuirea exponentului $(-ipt)$ cu exponentul (ipt) în integrala care definește transformarea Fourier a funcției pondere conduce la conjugata funcției complexe de răspuns în frecvență a sistemului vibrant, adică este valabilă relația

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{ipt}\, \mathrm{d}t = \bar{H}^*(p), \tag{28.10}$$

unde $\bar{H}^*(p)$ este conjugata lui $\bar{H}(p)$; ultima relație poate fi verificată cu ușurință descompunîndu-se integralele din membrul stîng al relațiilor (28.9) și (28.10) în cîte două integrale, prin înlocuirea exponențialelor $e^{\pm ipt}$ cu expresiile lor din cunoscutele formule ale lui Euler.

Sînt evidente, de asemenea, egalitățile

$$\bar{H}^*(p)\cdot\bar{H}(p) = |\bar{H}(p)|^2 = H^2(p) \tag{28.11}$$

și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, \mathrm{d}t = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t\right]_{p=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{ipt}\, \mathrm{d}t\right]_{p=0} = \bar{H}(0). \tag{28.12}$$

28.2. *Relațiile între caracteristicile statistice ale excitației și răspunsului la un sistem vibrant liniar cu un grad de libertate, excitat aleatoriu*

Se consideră cunoscute caracteristicile statistice ale excitației aleatoare $Q(t)$, presupusă staționară și ergodică, care acționează asupra unui sistem vibrant cu un grad de libertate și care este determinată printr-un număr de N realizări $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, aceste caracteristici fiind reprezentate prin următoarele mărimi statistice:

— *valoarea medie a excitației*, definită printr-o relație analogă relațiilor (25.37), adică

$$\overline{Q(t)} = \mu_Q = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} Q(t)\, \mathrm{d}t; \tag{28.13}$$

Scanned with CamScanner

— *funcția de autocorelație a excitației*, determinată prin relația

$$\mathscr{K}_Q(\tau) = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{+\frac{\mathscr{T}}{2}} Q(t)\, Q(t+\tau)\, \mathrm{d}t, \qquad (28.14)$$

analogă relațiilor (25.38);

— *densitatea spectrală a mediei patratice a excitației*, definită prin relația

$$S_Q(p) = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}[\mathscr{K}_Q(\tau)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}_Q(\tau)\, e^{-ip\tau}\, \mathrm{d}\tau, \qquad (28.15)$$

analogă relațiilor (25.39) și reprezentată grafic prin curba (Γ_{S_Q}), (fig. 28.3), trasată obișnuit prin puncte, în urma integrării numerice a membrului drept al relației (28.15);

— *media pătratică a excitației*, avînd expresia

$$\overline{Q^2(t)} = \mathscr{K}_Q(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Q(p)\, \mathrm{d}p, \qquad (28.16)$$

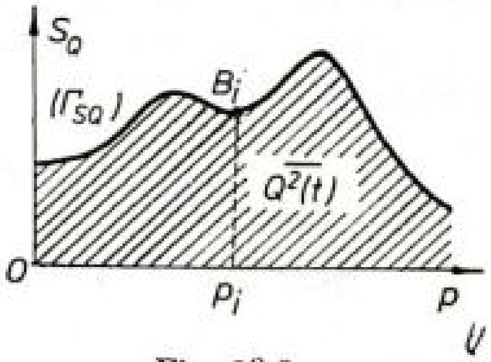


Fig. 28.3.

analogă expresiilor (25.40) și reprezentată prin aria hașurată din fig. 28.3, cuprinsă între curba (Γ_{S_Q}) și axa absciselor, arie determinată practic prin planimetrare;

— *densitatea de probabilitate a amplitudinilor excitației*, de regulă de tip Gauss, definită prin relație analoagă relațiilor (25.42) adică

$$p(Q) = \frac{1}{\sigma_Q \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(Q-\mu_Q)^2}{2\sigma_Q^2}}, \qquad (28.16)$$

cu σ_Q reprezentînd dispersia excitației, definită la rîndul ei prin relația

$$\sigma_Q = \sqrt{\overline{Q^2(t)} - \mu_Q^2}. \qquad (28.17)$$

Plecîndu-se de la aceste date cunoscute, precum și de la caracteristicile dinamice de răspuns $\overline{H}(p)$ și $\pi(t)$ ale sistemului vibrant

liniar cu un grad de libertate, se vor stabili, în continuare, expresiile caracteristicilor statistice ale răspunsului, în funcție de datele cunoscute, precizate mai sus. Aceste expresii vor fi deduse cu ajutorul relațiilor de definiție a caracteristicilor statistice ale răspunsului, înlocuindu-se însă răspunsul $w(t)$ cu cel dat de o integrală de tip Duhamel, de forma (27.412), considerîndu-se și aici, așa cum s-a procedat și în subpunctul 27.1.2.3. al paragrafului precedent, că răspunsul sistemului vibrant rezultă din însumarea unui număr infinit de răspunsuri excitații de tip impulsiv; singura deosebire față de modul de aplicare a acestei integrale prezentat în § 27 constă doar în faptul că integrarea se va efectua acum între limitele $-\infty$ și t în loc de 0 și t, ca urmare a faptului că realizarea $Q(t)$ se consideră definită pentru intervalul $(-\infty, +\infty)$ de variație a argumentului t.

În consecință, răspunsul sistemului vibrant liniar la excitația aleatoare $Q(t)$ va fi determinat prin relația

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} Q(\tau)\,\pi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{28.18}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$t - \tau = \sigma,$$

cu $\mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}\sigma$ și cu noile limite pentru integrală de la 0 la $+\infty$, expresia (28.18) a răspunsului va mai putea fi scrisă sub forma

$$w(t) = -\int_{\infty}^{0} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{0}^{\infty} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{28.19}$$

Întrucît și în noua variabilă funcția pondere satisface condiția

$$\pi(\sigma) \equiv 0 \quad \text{pentru} \quad \sigma < 0,$$

ca urmare a faptului că ea are sens numai pentru $\sigma > 0$, rezultă că expresia răspunsului nu se va modifica dacă se va înlocui limita inferioară a integralei din membrul drept al relației (28.19) cu $-\infty$, adică se va scrie

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{28.20}$$

Această expresie va fi introdusă în relațiile de definiție ale caracteristicilor statistice ale răspunsului.

Scanned with CamScanner

28.2.1. Valoarea medie a răspunsului

Înlocuind, în relația de definiție a valorii medii a răspunsului

$$\overline{w(t)} = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} w(t)\,dt$$

pe $w(t)$ cu expresia (28.20) se poate scrie șirul de relații

$$w(t) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,d\sigma\right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma) \left[\lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} Q(t-\sigma)dt\right] d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\,\overline{Q(t)}\,d\sigma$$

deoarece pentru $\mathcal{T}\to\infty$ expresia din cea de-a doua paranteză pătrată reprezintă valoarea medie a excitației definită prin relația (28.13). ($\overline{Q(t-\sigma)} = \overline{Q(t)}$ pentru procese staționare ergodice).

Observînd acum că $\overline{Q(t)}$, nedepinzînd de variabila σ, poate fi scos de sub semnul ultimei integrale și ținînd seama și de relațiile (28.12) (cu variabila de integrare t înlocuită cu σ) se obține relația căutată între valoarea medie a răspunsului și valoarea medie a excitației sub forma

$$\boxed{\overline{w(t)} = \overline{H}(0)\;\overline{Q(t)}}\,. \tag{28.21}$$

28.2.2. Funcția de autocorelație a răspunsului

Înlocuind în relația de definiție

$$\mathcal{K}_w(\tau) = \lim_{\mathcal{T}\to\infty} \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{+\frac{\mathcal{T}}{2}} w(t)\,w(t+\tau)\,d\tau$$

Scanned with CamScanner

CS CamScanner

a funcției de autocorelație a răspunsului pe $w(t)$ cu expresia (28.20 și pe $w(t+\tau)$ cu expresia

$$w(t+\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t+\tau-\rho)\pi(\rho)\,\mathrm{d}\rho, \qquad (28.22)$$

noua notație a variabilei de integrare fiind justificată de necesitatea înmulțirii între ele a integralelor (28.20) și (28.22), rezultă și aici șirul de egalități :

$$\mathscr{K}_w(\tau)=\lim_{\mathscr{T}\to\infty}\frac{1}{\mathscr{T}}\int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{\frac{\mathscr{T}}{2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t+\tau-\rho)\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\lim_{\mathscr{T}\to\infty}\frac{1}{\mathscr{T}}\int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{+\frac{\mathscr{T}}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[Q(t-\sigma)\,Q(t+\tau-\rho)][\pi(\sigma)\,\pi(\rho)]\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho\right\}\mathrm{d}t,$$

sau încă, observînd că se poate efectua mai întîi integrarea în timp, mai rezultă

$$\mathscr{K}_w(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\sigma)\,\pi(\rho)\left[\lim_{\mathscr{T}\to\infty}\frac{1}{\mathscr{T}}\int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{+\frac{\mathscr{T}}{2}} Q(t-\sigma)\times\right.$$

$$\left.\times\, Q(t+\tau-\rho)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho. \qquad (28.23)$$

Efectuînd în integrala din paranteza pătrată shimbarea de variabilă

$$t-\sigma=t',$$

cu $\mathrm{d}t=\mathrm{d}t'$ și introducînd notația

$$\tau'=\tau-\rho+\sigma,$$

Scanned with CamScanner

expresia din paranteza pătrată din membrul drept al relației (28.23) va căpăta semnificația

$$\lim_{\mathcal{T}\to\infty}\frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{\frac{\mathcal{T}}{2}} Q(t-\sigma)\,Q(t+\tau-\rho)\,\mathrm{d}t =$$

$$=\lim_{\mathcal{T}\to\infty}\frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\frac{\mathcal{T}}{2}}^{\frac{\mathcal{T}}{2}} Q(t')\,Q(t'+\tau')\,\mathrm{d}t' = \mathcal{K}_Q(\tau') = \mathcal{K}_Q(\tau-\rho+\sigma),$$

în baza căreia relația (28.23) va lua forma finală

$$\boxed{\mathcal{K}_w(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}_Q(\tau-\rho+\sigma)\,\pi(\sigma)\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho,} \tag{28.24}$$

ea furnizînd legătura dintre funcția de autocorelație a răspunsului și funcția de autocorelație a excitației.

Se face însă precizarea că datorită dificultăților matematice intîmpinate în evaluarea integralei duble din membrul drept al relației (28.24), în practică determinarea funcției de autocorelație a răspunsului se face, așa cum se va arăta mai tîrziu, cu ajutorul densității spectrale, în baza unei relații de forma (23.27).

28.2.3. Densitatea spectrală a mediei pătratice a răspunsului

Plecînd de la relația

$$S_w(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}_w(\tau)\,e^{-ip\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{28.25}$$

de definiție a densității spectrale a mediei pătratice a răspunsului și înlocuind în ea funcția de autocorelație $\mathcal{K}_w^{(\tau)}(\tau)$ cu expresia (28.24), se poate scrie șirul de relații:

$$S_w(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}_Q(\tau-\rho+\sigma)\,\pi(\sigma)\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tau}\,[\mathcal{K}_Q(\tau-\rho+\sigma)\,\pi(\sigma)\,\pi(\rho)]\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau,$$

sau încă, înmulțind expresia de sub semnele de integrare cu produsele

$$e^{ip\sigma}\, e^{-ip\sigma} = 1\,;\; e^{ip\rho}\, e^{-ip\rho} = 1,$$

se mai obține

$$S_w(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{[e^{-ip\tau}\, e^{-ip\sigma}\, e^{ip\rho}\mathscr{K}_Q(\tau-\rho+\sigma)]\cdot$$

$$\cdot[e^{ip\sigma}\pi(\sigma)]\cdot[e^{-ip\rho}\,\pi(\rho)]\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau.$$

Observînd acum că integralele după variabilele σ și ρ pot fi efectuate independent de integrarea după variabila τ, se mai poate scrie

$$S_w(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\sigma}\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\rho}\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\rho\,\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(\tau-\rho+\sigma)}\,\mathscr{K}_Q(\tau-\rho+\sigma)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (28.26)$$

Este suficient acum să se țină seama de relațiile (28.15), (28.9) și (28.10), pentru ca relația (28.26) să capete forma

$$S_w(p) = \overline{H}^*(p)\cdot\overline{H}(p)\, S_Q(p)$$

sau încă, luînd în considerație și relația (28.11), forma

$$\boxed{S_w(p) = H^2(p)\, S_Q(p)}\,, \qquad (28.27)$$

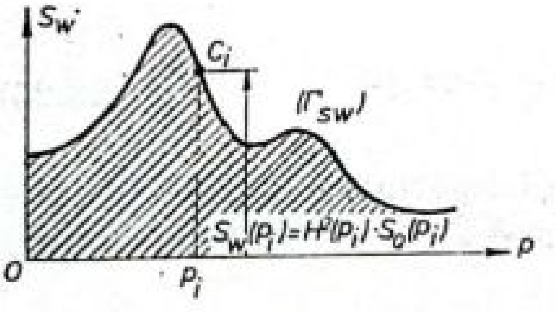


Fig. 28.4.

această ultimă relație exprimînd deci dependența densității spectrale a răspunsului de densitatea spectrală a excitației.

Relația (28.27) permite să se construiască curba (Γ_{S_w}), reprezentînd variația densității spectrale a mediei pătratice a răspunsului în funcție de pulsația excitației, prin puncte $C_i(p_i\,; S_w(p_i))$, ale căror ordonate se obțin prin înmulțirea ordonatelor punctelor A_i și B_i, corespunzătoare absciselor p_i, din graficele $(\Gamma_{H^2(p)})$ și (Γ_{S_Q}) din figurile 28.1 și 28.3, (fig. 28.4).

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

Aria hașurată cuprinsă între curba (Γs_w) și axa absciselor, (fig. 28.4), determinată practic prin planimetrare, va reprezenta și aici media pătratică a răspunsului, în baza relației evidente

$$\boxed{\overline{w^2(t)} = \mathscr{K}_w(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(p)\,\mathrm{d}p.} \tag{28.28}$$

De asemenea, prin aplicarea transformării Fourier inverse, egalitatea (28.25) permite, odată cunoscută funcția $S_w(p)$, să se determine și funcția de autocorelație a răspunsului, în baza relației

$$\boxed{\mathscr{K}_w(\tau) = \mathscr{F}^{-1}[2\pi S_w(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(p)\, e^{ip\tau}\,\mathrm{d}p}\,, \tag{28.29}$$

evitîndu-se astfel calculul integralei duble din membrul drept al relației (28.24).

28.2.4. Densitatea de probabilitate a amplitudinilor răspunsului

Datorită dependenței de forma (28.4) între răspuns și excitație, forma funcției de densitate a probabilității amplitudinilor se va păstra aceeași la răspuns, ca și la excitație; în consecință, dacă funcția de densitate a probabilității amplitudinilor excitației este de tip Gauss, atunci și funcția de densitate a probabilității amplitudinilor răspunsului este și ea de tip Gauss, fiind exprimată deci prin relația

$$\boxed{p(w) = \frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{[w-\overline{w(t)}]^2}{2\sigma_w}}}\,, \tag{28.30}$$

unde valoarea medie a răspunsului va fi dată de relația (28.21), iar disperisa σ_w a răspunsului va avea, în baza relațiilor (28.28) și (28.21), expresia

$$\sigma_w = \overline{w^2(t)} - [\overline{w(t)}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(p)\,\mathrm{d}p - [\overline{H}(0)\,\overline{Q(t)}]^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H^2(p)\,S_Q(p)\,\mathrm{d}p - [\overline{H}(0)\,\overline{Q(t)}]^2. \tag{28.31}$$

Scanned with CamScanner

28.3. *Studiul răspunsului unui sistem vibrant liniar excitat aleatoriu*

Întrucît un sistem vibrant liniar poate fi supus la mai multe excitații aleatoare simultane, dintre care însă numai una cu caracter predominant în provocarea răspunsului sistemului, o primă problemă care se pune la efectuarea studiului unui asemenea răspuns este aceea de a se verifica dacă excitația pentru care au fost calculate, așa cum s-a arătat în subpunctul precedent, caracteristicile statistice ale răspunsului este cea predominantă, sau, cum se mai spune, dacă *excitația considerată este corelată cu răspunsul*; această primă etapă a determinării răspunsului aleator al unui sistem vibrant liniar se efectuează prin calculul funcțiilor statistice de intercorelație dintre răspuns și excitația aleatoare aplicat sistemului vibrant liniar.

După confirmarea existenței corelației între răspuns și excitație, se va putea trece apoi la prelucrarea și interpretarea datelor statistice ale răspunsului, în vederea caracterizării unei evoluții probabile a acestuia.

Modul de desfășurare a acestor două etape distincte ale studiului răspunsului unui sistem vibrant liniar excitat aleatoriu va fi prezentat mai jos.

28.3.1. Determinarea funcțiilor statistice de intercorelație între răspuns și excitație

După cum s-a arătat în § 23, intercorelația între două procese aleatoare staționare ergodice este scoasă în evidență prin următoarele două funcții statistice :

— Prin *funcția de intercorelație* a celor două mărimi aleatoare, care permite stabilirea corelației lor în timp ;

— prin *densitatea interspectrală a mediei pătratice* dintre mărimile aleatoare considerate, care permite să se stabilească măsura corelației lor în domeniul frecvențelor, așa cum se va arăta în continuare.

CS CamScanner

Scanned with CamScanner

1°. Funcția de intercorelație a răspunsului cu excitația. Această funcție va fi definită prin relația

$$\mathscr{K}_{Qw}(\tau) = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{+\frac{\mathscr{T}}{2}} Q(t)\, w(t+\tau)\, dt, \qquad (28.32)$$

care, prin înlocuirea răspunsului $w(t+\tau)$ cu o expresie analogă expresiei (28.20), adică

$$w(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t+\tau-\sigma)\, \pi(\sigma)\, d\sigma,$$

va mai putea fi scrisă sub formele

$$\mathscr{K}_{Qw}(\tau) = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{\frac{\mathscr{T}}{2}} Q(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t+\tau-\sigma)\, \pi(\sigma)\, d\sigma\right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma) \left[\lim_{\mathscr{T}\to\infty} \frac{1}{\mathscr{T}} \int_{-\frac{\mathscr{T}}{2}}^{\frac{\mathscr{T}}{2}} Q(t)\, Q(t+\tau-\sigma)\, dt\right] d\sigma,$$

sau încă, observînd că expresia din ultima paranteză pătrată reprezintă funcția de autocorelație a excitației, $\mathscr{K}_Q(\tau')$, cu $\tau' = \tau - \sigma$, mai rezultă

$$\boxed{\mathscr{K}_{Qw}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\, \mathscr{K}_Q(\tau-\sigma)\, d\sigma}\,. \qquad (28.33)$$

Se va arăta ulterior că funcția de intercorelație va putea fi determinată mai simplu, cu ajutorul densității interspectrale a mediei pătratice dintre răspuns și excitație.

Reprezentarea grafică a variației funcției de intercorelație

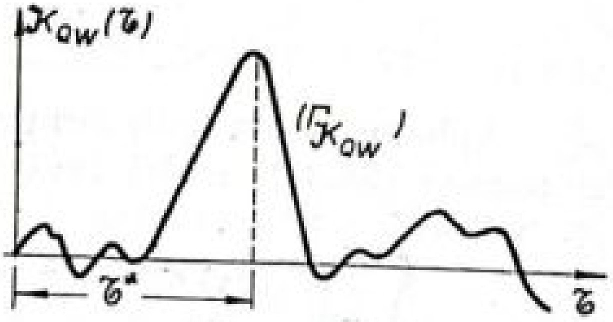


Fig. 28.5.

Scanned with CamScanner

$\mathscr{K}_{Qw}(\tau)$ în funcție de τ conduce la o curbă (Γ_{Qw}) (fig. 28.5), al cărui maxim absolut va furniza valoarea τ^* a lui τ pentru care se realizează cea mai bună corelare a răspunsului cu excitația.

2°. **Densitatea interspectrală a mediei pătratice dintre răspuns și excitație.** Această mărime statistică va fi definită prin relația

$$S_{Qw}(p) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathscr{K}_{Qw}(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_{Qw}(\tau)\, e^{-ip\tau}\, d\tau. \qquad (28.34)$$

Înlocuind, în ultima relație, funcția de intercorelație $\mathscr{K}_{Qw}(\tau)$ cu expresia (28.33), se va mai putea scrie

$$S_{Qw}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\sigma)\,\mathscr{K}_Q(\tau-\sigma)\,d\sigma\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\tau}\, e^{-ip\sigma}\, e^{-ip\sigma}\pi(\sigma)\,\mathscr{K}_Q(\tau-\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

sau încă, integrînd mai întîi după τ și apoi după variabila σ, mai rezultă

$$S_{Qw}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\sigma)\, e^{-ip\sigma}\,d\sigma\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(\tau-\sigma)}\,\mathscr{K}_Q(\tau-\sigma)\,d\tau. \quad (28.35)$$

Este suficient să se observe acum că expresia din paranteze reprezintă, în baza relației (28.15), densitatea spectrală a excitației și să se țină seama și de relația (28.8), pentru a se obține astfel expresia de mai jos a densității interspectrale a mediei pătratice dintre excitație și răspuns :

$$\boxed{S_{Qw}(p) = \bar{H}(p)\, S_Q(p)}\,. \qquad (28.36)$$

Aplicînd acum transformarea Fourier inversă ambilor membri ai relației (28.34), scrisă încă sub forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}_{Qw}(\tau)\, e^{-ip\tau}\, d\tau = \mathscr{F}[\mathscr{K}_{Qw}(\tau)] = 2\pi\, S_{Qw}(p),$$

Scanned with CamScanner

se obține relația

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\mathcal{K}_{Qw}(\tau)]] = 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}[S_{Qw}(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{Qw}(p)\, e^{ip\tau}\, \mathrm{d}p, \quad (28.37)$$

sau încă, ținînd seama de semnificația (21.266) a membrului stîng și de expresia (28.36) a densității interspectrale, se mai poate scrie

$$\mathcal{K}_{Qw}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}(p) S_Q(p)\, e^{ip\tau}\, \mathrm{d}p, \quad (28.38)$$

această ultimă relație permițînd, în unele cazuri concrete, să se obțină funcția de intercorelație atunci cînd se cunoaște densitatea interspectrală a mediei pătratice dintre răspuns și excitație și funcția complexă de răspuns în frecvență a sistemului vibrant liniar, evitîndu-se astfel efectuarea integralei din membrul drept al relației (28.33).

Gradul de corelare a răspunsului cu excitația va fi determinat prin *funcția de coerență dintre răspuns și excitație*, definită prin relația

$$\gamma_{Qw}^2(p) = \frac{|S_{Qw}(p)|^2}{S_Q(p)\, S_w(p)}, \quad (28.39)$$

(cu $\gamma_{Qw} < 1$); pentru valoarea $\gamma_{Qw} = 0$ răspunsul și excitația sînt total independente între ele, iar pentru valoarea $\gamma_{Qw} = 1$, răspunsul și excitația sînt total coerente.

Se reamintește faptul că în practica densitatea interspectrală se determină de obicei experimental, cu ajutorul filtrelor „trece bandă', prin cele două funcții care intră în componența ei:

— *funcția densității co-spectrale*, definită prin relația

$$C_{Qw}(p) = \mathrm{Re}\,\{S_{Qw}(p)\}; \quad (28.40)$$

— *funcția densității cvadrispectrale*, determinată prin relația

$$Q_{Qw}(p) = \mathrm{Im}\,\{S_{Qw}(p)\}. \quad (28.41)$$

În această situație, densitatea interspectrală va fi calculată cu ajutorul relației

$$S_{Qw}(p) = C_{Qw}(p) - iQ_{Qw}(p) = |\, S_{Qw}(p)\, e^{-i\varphi(p)} \quad (28.42)$$

Scanned with CamScanner

cu

$$|S_{Qw}(p)| = \sqrt{[C_{Qw}(p)^2 + [Q_{Qw}(p)]^2}; \quad \varphi(p) = \text{arctg}\, \frac{Q_{Qw}(p)}{C_{Qw}(p)}. \quad (28.43)$$

28.3.2. Prelucrarea și interpretarea datelor statistice ale răspunsului

În § 23 s-a arătat că orice vibrație deterministă neperiodică poate fi reprezentată, sub aspectul evidențierii componentelor sale spectrale, printr-o vibrație periodică cu perioadă inifinită înlocuindu-se spectrul discret al vibrației periodice cu un spectru continuu, pe baza următoarelor transformări efectuate în seria Fourier complexă care reprezenta o vibrație periodică :

— înlocuirea pulsației fundamentale cu pulsația elementară, a pt care permite construcția spectrului vibrației plecîndu-se de la o pulsație arbitrară, variată apoi prin adăugarea, sau scăderea, unor termeni multipli întregi ai pulsației elementare;

— înlocuirea coeficienților finiți ai seriei cu coeficienți elementari, proporționali la rîndul lor cu modulii transformatei Fourier ai vibrației, corespunzători diverselor valori ale pulsației;

— înlocuirea semnelor de sumare din serii cu integrala efectuată în intervalul de variație de la $-\infty$ la $+\infty$ a pulsației.

Concluziile precedente au fost extinse ulterior și la variabilele aleatoare, astfel că atît excitația, cît și răspunsul unui sistem vibrant liniar excitat aleatoriu vor putea fi exprimate prin serii Fourier de forma celor introduse pentru vibrațiile deterministe neperiodce.

Astfel, excitația aleatoare $Q(t)$ va putea fi exprimată, (cu : $k \to p$), sub una din formele

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}[Q(t)]\, e^{ipt}\, \mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(ip)\, e^{ipt}\, \mathrm{d}p \quad (28.44)$$

și va fi evaluată, practic, prin suma

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(ip)\, e^{ip_\lambda t}\, \Delta p, \quad (28.45)$$

Scanned with CamScanner

corespunzătoare succesiunii de pulsații cuprinse în intervalele $\left[p_\lambda - \frac{1}{2}\Delta p;\ p_\lambda + \frac{1}{2}\Delta p\right]$, $(\lambda = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty)$, încadrate în benzi de pulsații de lățime Δp.

Introducînd notațiile

$$\frac{\Delta p}{2\pi}\mathscr{F}(ip_\lambda) = C_\lambda;\ p_\lambda = \lambda p, \tag{28.46}$$

p fiind o pulsație fundamentală, a cărei valoare va depinde de pulsația de la care se pleacă în construcția spectrului excitației, expresia (28.45) a excitației va mai lua, (cu $k \to p$; $\varphi(k) \to \beta(p) = \beta$), precum și de faptul că $Q(t)$ este mărime reală, una din formele

$$Q(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_\lambda e^{i\lambda pt} = C_0 + \mathrm{Re}\left\{2\sum_{\lambda=1}^{\infty}|C_\lambda|\,e^{i(\lambda pt-\beta_\lambda)}\right\} =$$
$$= C_0 + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}|C_\lambda|\cos(\lambda pt - \beta_\lambda), \tag{28.47}$$

cu

$$|C_\lambda| = \frac{\Delta p}{2\pi}|\mathscr{F}(ip)| = \frac{\Delta p}{2\pi}F(p_\lambda);\ \beta_\lambda = \beta(p_\lambda). \tag{28.48}$$

În această situație, media pătratică a excitației va fi determinată printr-o relație analoagă relației stabilită anterior, $\left(\text{cu}: \frac{a_0}{2} \to C_0 \text{ și cu factorul 2 în fața sumei}\right)$, adică se va scrie

$$\overline{Q^2(t)} = C_0^2 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}|C_\lambda|^2, \tag{28.49}$$

iar densitatea spectrală a excitației va fi legată de media pătratică $\overline{Q^2(t)}$ prin relația (28.16), adică

$$Q^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Q(p)\,\mathrm{d}p. \tag{28.50}$$

Relațiile precedente dau posibilitatea determinării experimentale a celor două mărimi statistice principale ale excitației — valoa-

Scanned with CamScanner

rea medie pătratică și densitatea spectrală a mediei pătratice — acest mod de determinare, foarte des folosit în aplicațiile curente ale tehnicii vibrațiilor, realizîndu-se prin următoarele operații:

— înregistrarea excitației aleatoare, considerată staționară ergodică, pe o bandă magnetică de lungime arbitrară, care, prin lipirea extremităților ei este transformată apoi într-o bandă inelară închisă (BI), (fig. 28.6);

— introducerea benzii inelare într-un analizor de frecvență electronic (AFE), echipat cu filtre trece bandă de o lățime determinată Δp; prin faptul că banda magnetică este închisă, înregistrarea ei de către analizor poate fi repetată de un număr oarecare de ori, ceea ce face ca excitația să apară ca un fenomen periodic, cu preioada $\mathcal{T}_j$ depinzînd de lungimea arbitrară a benzii. Perioadei $\mathcal{T}_j$ îi va corespunde o pulsație fundamentală arbitrară $p_j = \dfrac{2\pi}{\mathcal{T}_j}$, considerată ca pulsație de plecare în determinarea densității spectrale a excitației.

Analizorul de frecvență va reține din înregistrarea excitației numai componentele ei cu pulsațiile cuprinse în intervalul $\left[p_j - \dfrac{\Delta p}{2};\ p_j + \dfrac{\Delta p}{2}\right]$, (fig. 28.7), cu coeficienții Fourier complecși considerați toți de același modul $|C_j|$, a cărui valoare, multiplicată prin constanta aparatului, este transmisă la ieșire sub forma unui semnal electric.

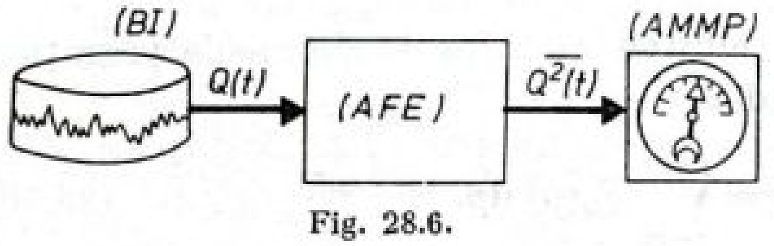


Fig. 28.6.

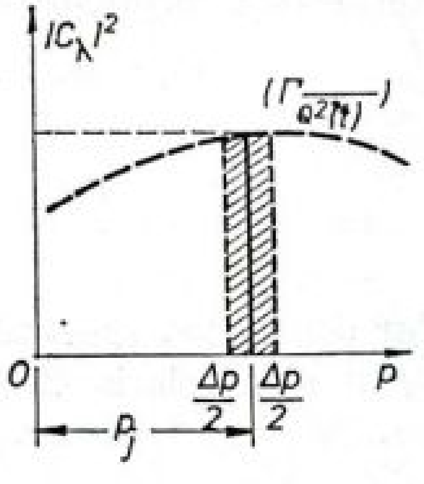


Fig. 28.7.

— Trecerea semnalului de ieșire din analizor printr-un aparat de măsură a mediei patratice (AMMP), (fig. 28.6), care va furniza

valoarea mediei pătratice a excitației corespunzătoare pulsației p_j, adică mărimea

$$\Delta\overline{Q^2(t)}_{(j)} = |C_j|^2. \tag{28.51}$$

Prin variația pulsației p_j, realizată prin modificarea lungimii benzii inelare a înregistrării excitației, se vor putea obține valorile patratelor modulilor coeficienților Fourier complecși pentru diverse valori ale pulsației, putîndu-se construi astfel curba $(\Gamma_{\overline{Q^2(t)}})$ (fig. 28.7), care va reprezenta spectrul densității de energie al excitației.

— Calculul, în baza relației (28.16), al densității spectrale a excitației.

Într-adevăr, prin diferențierea și apoi prin înlocuirea variațiilor elementare $d[\overline{Q^2(t)}]$ și dp cu creșterile finite $\Delta\overline{Q^2(t)}$ și Δp, relația (28.16) va lua forma

$$\Delta\overline{Q^2(t)} = S_Q(p)\,\Delta p, \tag{28.52}$$

permițînd determinarea valorii densității spectrale a excitației corespunzătoare pulsației p_j:

$$S_Q(p)_{(j)} = \frac{\Delta\overline{Q^2(t)}_{(j)}}{\Delta p}. \tag{28.53}$$

Repetînd calculul pentru diverse pulsații p_j și reprezentînd grafic dependența de pulsație a densității spectrale, se obține curba (Γ_{S_Q}) (fig. 28.8), a densității spectrale a excitației, curbă care scoate în evidență existența unui maxim, $(S_Q(p^*))$, al densității spectrale pentru o valoare $p = p^*$ a pulsației.

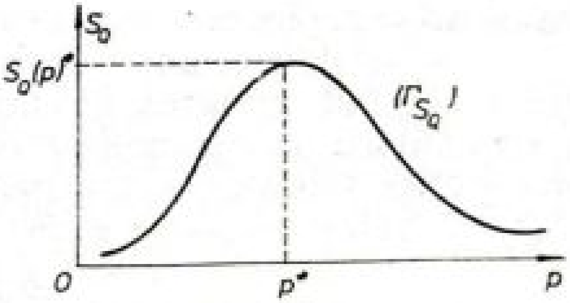


Fig. 28.8.

Înainte de a se trece la examinarea caracteristicilor statistice ale răspunsului unui sistem vibrant liniar excitat aleatoriu se va arăta că acest răspuns poate fi și el pus sub forma (28.47), ca și excitația. Într-adevăr, în baza relațiilor (28.20) și (28.47) (în ultima

Scanned with CamScanner

făcîndu-se înlocuirea lui t cu $t - \sigma$), răspunsul sistemului vibrant va putea fi scris sub forma

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\sigma)\,\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_\lambda e^{i\lambda p(t-\sigma)}\right]\pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_\lambda e^{i\lambda pt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\, e^{-i\lambda p\sigma}\right]\mathrm{d}\sigma,$$

sau încă, ținînd seama și de relația (28.8) (cu $t \to \sigma$), sub forma

$$w(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} C_\lambda \overline{H}(\lambda p)\, e^{i\lambda pt}, \tag{28.54}$$

care arată că valorile coeficienților Fourier complecși ai răspunsului sînt date de produsele dintre coeficienții Fourier complecși ai excitației și dintre valorile funcției de răspuns în frecvență a sistemului vibrant, corespunzătoare pulsațiilor la care se referă coeficienții.

Cunoscînd funcția de autocorelație $\mathcal{K}_Q(\tau)$ și densitatea spectrală a mediei pătratice, $S_Q(p)$, ale excitației, precum și funcția de răspuns în frecvență $\overline{H}(p)$ și funcția de răspuns în timp $\pi(t)$ ale sistemului vibrant, relațiile (28.27), (28.28) și (28.29) vor permite să se determine densitatea spectrală a mediei pătratice, media pătratică și funcția de autocorelație a răspunsului, mărimi care vor furniza informații în legătură cu evoluția probabilă a acestui răspuns.

Relația (28.28) permite să se prevadă și posibilitatea apariției *fenomenului de rezonanță* în răspunsul sistemului vibrant liniar excitat aleatoriu, fenomen care se manifestă vizibil în următoarele situații:

— cînd sistemul vibrant liniar are amortizare slabă ($\zeta \ll 1$);

— cînd valoarea densității spectrale a excitației corespunzătoare valorii $p = k$, unde k este pulsația proprie fără amortizare a sistemului vibrant — este foarte apropiată de valoarea sa maximă $S_Q(p^*)$, adică se poate scrie

$$S_Q(k) \approx S_Q(p^*). \tag{28.55}$$

În adevăr, în condițiile precizate mai sus, expresia (28.6) a modulului funcției de răspuns în frecvență a sistemului vibrant capătă, pentru $p = k$, valoarea

$$H(k) = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2\zeta k^2}, \tag{28.56}$$

Scanned with CamScanner

care, pentru $\zeta \ll 1$, poate fi considerată ca valoare maximă a lui $|\overline{H}(p)|$, astfel că densitatea spectrală a răspunsului, determinată prin relația (28.27), va lua valoarea maximă

$$S_w(k) = \frac{1}{4a^2\zeta^2k^4} S_Q(k) \tag{28.57}$$

corespunzătoare rezonanței.

Se mai demonstrează, [19], că media pătratică a răspunsului la rezonanță are valoarea

$$\overline{w^2(t)}_{rez} = \frac{\pi}{4\zeta} \frac{S_Q(k)}{k^3}. \tag{28.58}$$

Sistemele vibrante funcționînd în condițiile precizate mai sus sînt numite *sisteme vibrante cu bandă îngustă*, deoarece un asemenea sistem lasă practic că treacă numai pulsațiile cuprinse în intervalul $[k - \zeta k; k + \zeta k]$, (fig. 28.9), pentru care atît funcția $S_Q(p)$, cît și funcția $H(p)$ au ambele valori ridicate.

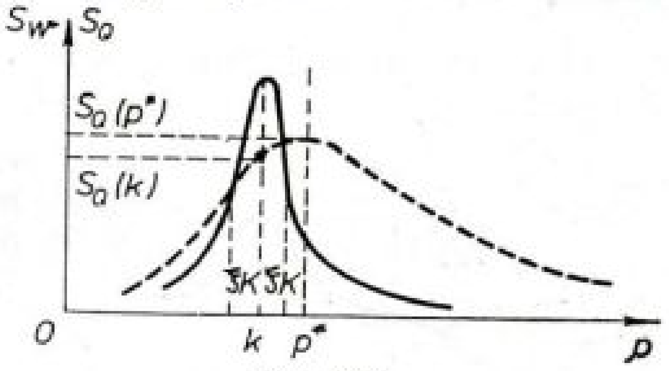


Fig. 28.9.

În continuare, se va efectua studiul răspunsului sistemului vibrant la o excitație de tip „zgomot alb", adică la o excitație care se caracterizează prin densitate spectrală constantă

$$S_Q(p) = S_Q^0, \tag{28.59}$$

reprezentată, în diagrama $S_Q(p) = f(p)$, prin o dreaptă paralelă la axa pulsațiilor (fig. 28.10), precum și prin funcția de autocorelație de forma

$$\mathscr{K}_Q(\tau) = \mathscr{K}_Q^0 \delta(t), \tag{28.60}$$

unde $\delta(t)$ este cunoscuta funcție simbol a lui Dirac, iar $\mathscr{K}_Q^0$ este o constantă avînd valoarea

$$\mathscr{K}_Q^0 = 2\pi S_Q^0. \tag{28.61}$$

Se vor considera cunoscute deci, în cele ce urmează, mărimile S_Q^0 și $\mathscr{K}_Q^0$, precum și funcția de răspuns în frecvență $\overline{H}(p)$, cu diagrama

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

reprezentată în fig. 28.10, și funcția de răspuns în timp $\pi(t)$, cu graficul reprezentat în fig. 28.11, ale sistemului vibrant.

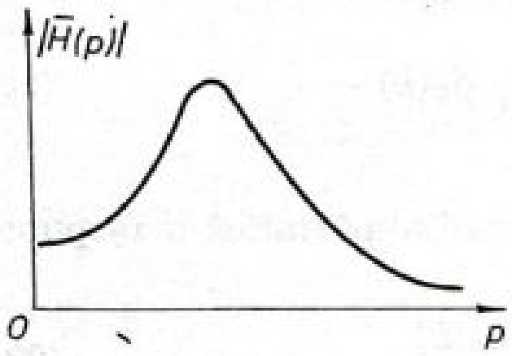


Fig. 28.10.

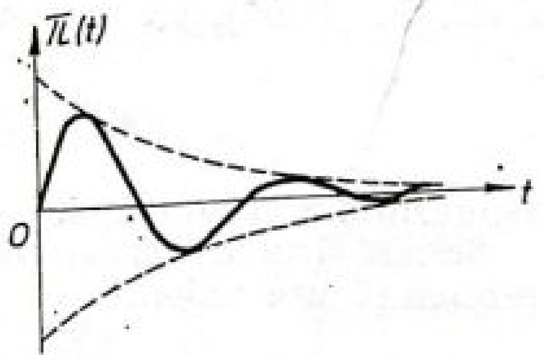


Fig. 28.11.

— *Densitatea spectrală a răspunsului* va avea, în baza relațiilor (28.28) și (28.59), expresia

$$S_w(p) = H^2(p)\, S_Q^0 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{S_Q}{(k^2 - p^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 p^2}, \qquad (28.62)$$

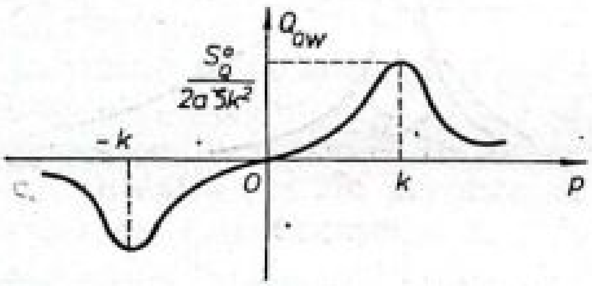


Fig. 28.12.

spectrul ei prezentînd două maxime pentru valori ale pulsației p date de relații analoge relației (27.347), adică

$$p_{1,2} \pm k\sqrt{1 - 2\zeta^2},$$

cu valorile particulare

$$p_{1,2} \approx \pm k$$

pentru amortizări slabe ($\zeta \ll 1$) și intersectînd axa ordonatelor în punctul de coordonate $\left(0; \frac{S_Q^0}{k^4}\right)$, (fig. 28.12).

— *Funcția de autocorelație a răspunsului*, definită prin relația (28.24) va avea în acest caz, ținîndu-se seama și de relațiile (28.60) și (28.61), expresia

$$\mathscr{K}_w(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}_Q(\tau - \rho + \sigma)\, \pi(\sigma)\, \pi(\rho)\, d\sigma d\rho =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\, S_Q^0 \delta(\tau - \rho + \sigma)\, \pi(\sigma)\, \pi(\rho)\, d\sigma d\rho,$$

Scanned with CamScanner

sau încă, integrînd mai intîi după variabila ρ și apoi după variabila σ, mai rezultă

$$\mathscr{K}_w(\tau) = 2\pi S_Q^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \rho + \sigma)\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\rho. \qquad (28.63)$$

Proprietatea funcției simbol a lui Dirac permite însă să se stabilească următoarea semnificație pentru ultima integrală din membrul drept al relației (28.63) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau + \sigma - \rho)\,\pi(\rho)\,\mathrm{d}\rho = [\pi(\rho)]_{\rho=\tau+\sigma} = \pi(\tau + \sigma),$$

în baza căreia expresia (28.63) a funcției de autocorelație a răspunsului va mai lua forma

$$\mathscr{K}_w(\tau) = 2\pi S_Q^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\sigma)\,\pi(\tau + \sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (28.64)$$

Înlocuind în ultima relație funcțiile pondere cu expresiile lor de forma (28.7), adică

$$\pi(\sigma) = \frac{1}{ak_a} e^{-\zeta k\sigma} \sin(k_a\sigma)$$

și

$$\pi(\tau + \sigma) = \frac{1}{ak_a} e^{-\zeta k(\tau+\sigma)} \sin[k_a(\tau + \sigma)] = \frac{1}{ak_a} \cdot e^{-\zeta k\tau} e^{-\zeta k\sigma} \cdot$$
$$\cdot [\sin(k_a\tau)\cos(k_a\sigma) + \cos(k_a\tau)\sin(k_a\sigma)]$$

și observînd că factorii ce conțin pe τ vor putea fi scoși de sub semnele de integrare și că răspunsul există fizic numai pentru τ pozitiv ($\tau = |\tau| > 0$), iar funcțiile pondere satisfac condiția $\pi(\sigma) \equiv 0$, $(\sigma < 0)$, mai rezultă următoarea formă pentru funcția de autocorelație a răspunsului :

$$\mathscr{K}_w(\tau) = \frac{2\pi S_Q^0}{a^2k_a^2} e^{-\zeta k|\tau|} \Big\{ \sin(k_a\tau) \int_0^{+\infty} e^{-2\zeta k\sigma} \sin(k_a\sigma)\cos(k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma +$$
$$+ \cos(k_a\tau) \int_0^{\infty} e^{-2\zeta k\sigma} \sin^2(k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \Big\}. \qquad (28.65)$$

Scanned with CamScanner

Folosind tabelele de integrale, [2], (formulele (1.65) și (1.66)) și ținînd seama și de legătura dintre pulsațiile k_a și k, ($k_a = k\sqrt{1-\zeta^2}$), se găsesc următoarele valori pentru cele două integrale din membrul drept al relației precedente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\zeta k\sigma}\sin(k_a\sigma)\cos(k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2\zeta k\sigma}\sin(2k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{-2\zeta k\sin(2k_a\sigma) - 2k_a\cos(2k_a\sigma)}{4\zeta^2k^2+4k_a^2}e^{-2\zeta k\sigma}\right|_0^{\infty} = \frac{k_a}{4k^2} = \frac{k_a\zeta}{4\zeta k^2}$$

și

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\zeta k\sigma}\sin^2(k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2\zeta k\sigma}[1-\cos(2k_a\sigma)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left|-\frac{1}{2\zeta k}e^{-2\zeta k\sigma}\right|_0^{+\infty} - \left|\frac{-2\zeta k\cos(2k_a\sigma)+2k_a\sin(2k_a\sigma)}{4\zeta^2k^2+4k_a^2}e^{-2\zeta k\sigma}\right|_0^{+\infty}\right\} =$$

$$= \frac{1-\zeta^2}{4\zeta k},$$

în baza cărora expresia (27.65) a funcției de autocorelație a răspunsului corespunzător excitației prin zgomot alb va lua forma finală

$$\boxed{\mathscr{K}_Q(\tau) = \frac{\pi}{2}\frac{S_Q^0}{a^2\zeta k^3}e^{-\zeta k|\tau|}\left[\cos(k_a\tau) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(k_a\tau)\right]}. \qquad (28.66)$$

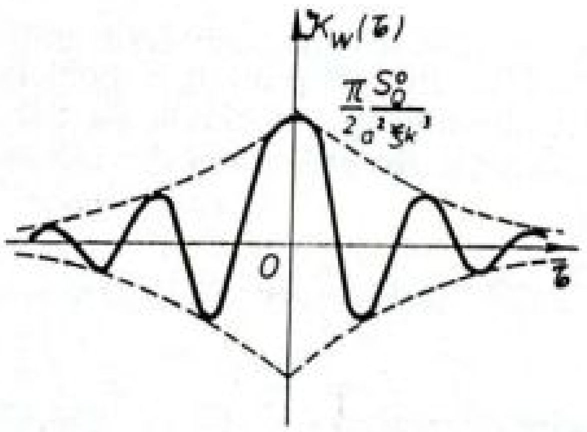


Fig. 28..13

Graficul acestei funcții, reprezentat în fig. 28.13, arată că viteza de descreștere a funcției $\mathscr{K}_Q(\tau)$ depinde de amortizarea sistemului vibrant.

— *Media pătratică a răspunsului*, calculată cu ajutorul relației (28.28), va avea valoarea

$$\boxed{\overline{w^2(t)} = \mathscr{K}_w(0) = \frac{\pi}{2}\frac{S_Q^0}{a^2\zeta k^3}}. \qquad (28.67)$$

Pentru a se verifica și intercorelația dintre răspuns și excitație, se vor calcula și cele două funcții statistice care o evidențiază, adică:

— ***Densitatea interspectrală a mediei pătratice dintre răspuns și excitație***, determinată prin relația (28.36); această mărime statistică va avea valoarea

$$S_{Qw}(p) = \bar{H}(p) S_Q^0 = \frac{1}{a} \frac{S_Q^0}{(k^2 - p^2)^2 + i2\zeta kp} = \frac{1}{a} \frac{S_Q^0}{[k^2 - p^2]^2 + 4\zeta^2 k^2 p^2} [(k^2 - p^2) - i2\zeta kp], \tag{28.68}$$

cu funcția densității co-spectrale determinată prin relația

$$C_{Qw}(p) = \mathrm{Re}\{S_{Qw}(p)\} = \frac{S_Q^0}{a} \frac{k^2 - p^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 p^2} \tag{28.69}$$

și reprezentată în fig. 28.14 și cu funcția densității cuad-spectrale determinată prin relația

$$Q_{Qw}(p) = \mathrm{Im}\{S_{Qw}(p)\} = \frac{S_Q^0}{a} \cdot \frac{2\zeta kp}{(k^2 - p^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 p^2} \tag{28.70}$$

și reprezentată grafic în fig. 28.15.

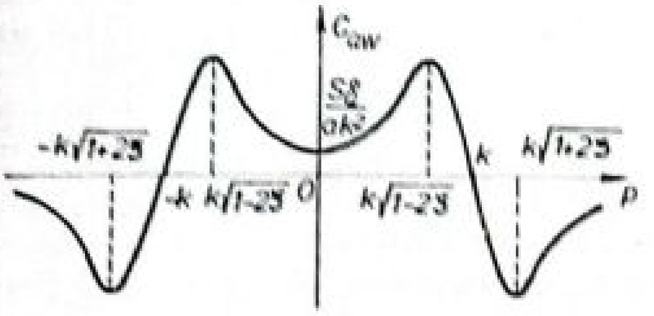


Fig. 28.14.

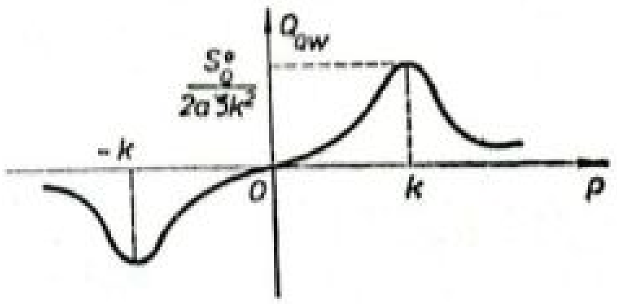


Fig. 28.15.

— ***Funcția de intercorelație dintre răspuns și excitație***, determinată prin relația (28.38), care va lua, în cazul de față, ($S_Q(p) = S_Q^0$), forma

$$\mathscr{K}_{Qw}(\tau) = S_Q^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}(p)\, e^{ip\tau}\, \mathrm{d}p.$$

sau încă, observînd că prin aplicarea transformării Fourier inverse ambilor membri ai relației (28.8) se obține egalitatea

$$\pi(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\pi(\tau)]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}(p)\, e^{ip\tau}\, dp$$

și ținînd seama și de relația (28.61), se mai poate scrie

$$\boxed{\mathcal{K}_{Qw}(\tau) = 2\pi S_Q^0 \pi(\tau) = \mathcal{K}_Q^0 \pi(\tau)}, \qquad (28.71)$$

ultima relație evidențiind proporționalitatea funcției de intercorelație dintre răspuns și excitație cu funcția pondere a sistemului vibrant.

Scanned with CamScanner

Capitolul XI

STABILITATEA MIŞCĂRILOR SISTEMELOR VIBRANTE

§ 29. Studiul stabilităţii mişcărilor vibratorii ale sistemelor mecanice

Noţiunea de stabilitate a mişcării unui sistem vibrant, definită în sensul lui A. M. Liapunov şi introdusă chiar din primul paragraf al acestui volum, caracterizează, după cum s-a arătat, capacitatea unui sistem mecanic de a evolua în mişcarea perturbată astfel incit valorile parametrilor lui lagrangeieni şi ale vitezelor sale generalizate să nu se îndepărteze nelimitat de cele corespunzătoare mişcării sale principale, respectiv poziţiei sale de echilibru static; în particular, dacă odată cu trecerea timpului, parametrii lagrangeieni şi vitezele generalizate ale sistemului vibrant tind să revină la valorile corespunzătoare mişcării principale, respectiv la cele corespunzătoare poziţiei de echilibru stabil, atunci o asemenea mişcare vibratorie a sistemului mecanic este numită *mişcare asimptotic stabilă*.

Studiul răspunsurilor sistemelor vibrante, efectuat în paragraful precendent, permite să se tragă însă concluzia că indepărtările nelimitate ale unui sistem vibrant de la configuraţia corespunzătoare mişcării sale principale sau poziţiei lui de echilibru static, adică, cu alte cuvinte, apariţiile aspectelor de instabilitate a mişcării vibratorii a sistemului, pot surveni in următoarele două situaţii :

— Cind sistemul vibrant, prin insăşi construcţia lui, funcţionează în condiţii de instabilitate chiar atunci cind nu este excitat şi cind parametrii lui constructivi nu variază in timp—cazul sistemelor vibrante autonome—, această situaţie reflectindu-se în soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale ce descriu mişcarea proprie a sistemului prin prezenţa unor termeni care cresc nelimitat cu timpul; în aceste cazuri, singura modalitate de evitare a aspectelor de instabilitate a mişcării o constituie modificarea convenabilă, prin reproiectare, a parametrilor constructivi ai sistemului vibrant, modificare care nu va putea fi efectuată însă fără un studiu prealabil al stabi-

Scanned with CamScanner

lității mișcării sistemului vibrant inițial, care, să precizeze parametrii cărora vor trebui să li se aplice corecții.

— Cînd sistemul vibrant este excitat — cazul sistemelor vibrante neautonome — și funcționează în condiții apropiate de cele ale rezonanței, această din urmă situație, întîlnită în deosebi la sistemele vibrante cu amortizare slabă sau neglijabilă, fiind scoasă în evidență prin valorile foarte mari ale amplitudinilor unora din termenii soluției generale a sistemului de ecuații diferențiale ce descriu mișcarea forțată a sistemului vibrant; cum la sistemele vibrante aflate în funcțiune frecvența excitației, de regulă constantă, nu poate fi schimbată, reducerea amplitudinilor apropiate de cele de rezonanță ale vibrațiilor va putea fi realizată numai prin modificarea fie a altor parametri ai excitației, fie a pulsațiilor proprii ale sistemului vibrant, ultima modificare devenind posibilă, după cum se va vedea ulterior, prin adăugarea unor mase auxiliare, fixate rigid sau cuplate elastic de anumite elemente ale sistemului mecanic; și într-un caz și în altul însă, modificările nu vor putea fi efectuate fără un studiu prealabil al stabilității mișcării sistemului vibrant inițial.

Odată justificată necesitatea studiului stabilității mișcărilor sistemelor vibrante, se va lua și acum în considerație numai cazul cel mai frecvent întîlnit în aplicațiile tehnice, al sistemelor mecanice ce execută mișcări vibratorii în jurul pozițiilor de echilibru stabil ($q_k \equiv 0$; $q_k^* = w_k$; $k = 1, 2, \ldots, r$) sub acțiunea unor solicitări active conservative și de excitație ($Q_{ck} = Q_{ak} + Q_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, r$) și a unor solicitări disipative, pentru care sistemul (26.1) de ecuații Lagrange de specia a doua va putea fi scris sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{w}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial w_k} = Q_{ck}(w, t) + Q_{dk}(w, \dot{w}, t) + Q_k(t), \qquad (29.1)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r),$$

corespunzătoare situației mai generale, cînd caracteristicile dinamice generalizate conservative și disipative ar depinde și de timp explicit.

După cum s-a arătat în subpunctul 26.2 din § 26. sistemul precedent de ecuații diferențiale ale mișcărilor sistemelor vibrante va putea fi înlocuit oricînd cu sistemul de ecuații de stare, avînd forma particulară în cazul sistemelor vibrante autonome.

Este ușor de înțeles că datorită totalei echivalențe a sistemului de ecuații de stare ale unui sistem mecanic în mișcare vibratorie cu sistemul de ecuații diferențiale scrise în coordonate generalizate obiș-

Scanned with CamScanner

nuite, studiul stabilităţii mişcării lui va putea fi efectuat şi pe baza ecuaţiilor de stare ale sistemului, procedeu care, aşa cum se va arăta ulterior, se va dovedi mult mai comod.

În principiu, studiul stabilităţii mişcării unui sistem vibrant va consta in compararea soluţiei generale a sistemului de ecuaţii de stare cu soluţia generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare, care modelează intr-o primă aproximaţie, mişcarea reală a sistemului mecanic, comparaţie care va permite să se facă aprecieri privind stabilitatea mişcării reale pe baza următoarelor două concluzii ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare:

1°. Dacă sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare asociat sistemului de ecuaţii de stare admite o soluţie asimptotic stabilă, atunci şi sistemul de ecuaţii de stare admite o soluţie asimptotic stabilă.

2°. Dacă sistemul de ecuaţii diferenţiale asociat sistemului de ecuaţii de stare admite o soluţie instabilă, atunci şi sistemul de ecuaţii şde stare admite o soluţie instabilă.

Deşi concluziile precedente nu precizează ce se intimplă cu soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale de stare atunci cind soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale asociat este simplu stabilă, totuşi ele permit cel puţin să se verifice dacă o mişcare vibratorie dată este asimptotic stabilă, sau dacă este instabilă, lucru care prezintă o importanţă deosebită in multe cazuri intilnite in aplicaţiile tehnice.

Acest mod de studiere a stabilităţii mişcării unui sistem vibrant este cunoscut in literatura de specialitate sub denumirea de *analiza stabilităţii mişcării in primă aproximaţie.*

Întrucit metodele de studiere a stabilităţii mişcării in primă aproximaţie depind de caracterul — autonom, sau neautonom — al sistemului vibrant, prezentarea lor va trebui făcută distinct pentru fiecare din cele două situaţii.

29.1. *Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante autonome*

În mod obişnuit, studiul, in primă aproximaţie, al stabilităţii mişcării unui sistem vibrant autonom, cu mişcarea descrisă prin ecuaţiile de stare

$$\dot{u}_j = U_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}), \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2r), \tag{29.2}$$

Scanned with CamScanner

se efectuează prin una din următoarele două metode principale:

— *Prin metoda algebrică*, considerîndu-se sistemul de ecuații diferențiale liniare asociat sistemului de ecuații de stare care descrie mişcarea reală a sistemului vibrant și analizîndu-se stabilitatea soluției generale a sistemului asociat în funcție de natura rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului, aplicîndu-se apoi concluziile 1° și 2° pentru aprecierea caracterului mişcării reale a sistemului mecanic.

Observînd că pentru poziția de echilibru static a sistemului vibrant ($w_{st} = 0$; $\dot{w}_{st} = 0$) rezultă condițiile

$$u_{j_{st}} = 0; \; \dot{u}_{j_{st}} = 0; \; U_{j_{st}} = U_j(u_{st}) = 0, \tag{29.3}$$

se vor putea dezvolta funcțiile $U_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r})$ în serii Taylor în jurul valorilor $u_i = 0$ corespunzătoare poziției de echilibru static, scriindu-se expresiile

$$U_j = \sum_{i=1}^{2r} \left(\frac{\partial U_j}{\partial u_i}\right)_0 u_i + V_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r}), \tag{29.4}$$

unde $\left(\frac{\partial U_j}{\partial u_i}\right)_0$ sînt valorile derivatelor parțiale $\frac{\partial U_j}{\partial u_i}$ corespunzătoare valorilor $u_i = 0$ ale variabilelor de stare, iar mărimile $V_j(u_1, u_2, \ldots, u_{2r})$ reprezintă sumele celorlalți termeni ai dezvoltărilor.

Introducînd notațiile

$$A_{ji} = \left(\frac{\partial U_j}{\partial u_i}\right)_0, \tag{29.5}$$

unde A_{ji} vor reprezenta niște constante, sistemul (29.4) de relații va mai putea fi scris sub forma

$$U_j = \sum_{i=1}^{2r} A_{ji}\, u_i + V_j(u_1, \ldots, u_{2r}), \tag{29.6}$$

iar înlocuirea acestor expresii în sistemul (29.2) de ecuații de stare va aduce acest sistem la forma

$$\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{2r} A_{ji}\, u_i + V_j(u_1, \ldots, u_{2r}). \tag{29.7}$$

Scanned with CamScanner

Prin neglijarea, în ecuaţiile precedente, a termenilor neliniari $V_j(u_1, \ldots, u_{2r})$, se obţine sistemul de ecuaţii

$$\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{2r} A_{ji} u_i, \tag{29.8}$$

care va reprezenta *sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare asociat sistemului de ecuaţii de stare* (29.2).

Analizîndu-se aşa cum se va arăta în continuare, forma soluţiei generale a ultimului sistem de ecuaţii diferenţiale în funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice a sistemului, se va aprecia, pe baza concluziilor 1° şi 2°, prezentate la începutul paragrafului, ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, caracterul asimptotic stabil, sau nestabil, al mişcării reale a sistemului vibrant.

— *Prin metoda topologică*, utilizată îndeosebi în cazul sistemelor vibrante cu un singur grad de libertate, pentru care sistemele (29.2) şi (29.7) de ecuaţii de stare iau formele concrete

$$\dot{u}_1 = U_1(u_1, u_2); \quad \dot{u}_2 = U_2(u_1, u_2), \tag{29.9}$$

respectiv

$$\dot{u}_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + V_1(u_1, u_2); \qquad \dot{u}_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + V_2(u_1, u_2), \tag{29.10}$$

iar sistemul de ecuaţii diferenţiabile liniare asociat ecuaţiilor de stare (29.10) va avea forma

$$\dot{u}_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2; \ \dot{u}_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2. \tag{29.11}$$

Interpretîndu-se soluţia generală a ultimului sistem de ecuaţii diferenţiale liniare, de forma

$$u_1 = U_1(t); \quad u_2 = U_2(t) \tag{29.12}$$

ca reprezentînd ecuaţiile parametrice ale unei traiectorii (Γ_p) — numită *traiectorie de fază* — a unui punct figurativ $P(u_1, u_2)$ în mişcare într-un plan de coordonate Ou_1u_2 — numit *planul fazelor* —, se va studia mişcarea punctului figurativ pe această traiectorie de fază atunci cînd timpul variază de la zero la infinit, analizîndu-se, pe baza unor proprietăţi ale traiectoriilor de fază ce vor fi prezentate ulterior, caracterul stabil, sau nestabil, al soluţiei (25.12); pe baza concluziilor 1° şi 2° menţionate la începutul paragrafului se vor putea face apoi şi aprecieri în legătură cu stabilitatea, sau instabilitatea mişcării reale a sistemului vibrant.

Scanned with CamScanner

Se face mențiunea că uneori este mai comodă studierea stabilității mișcării cu ajutorul unei alte traiectorii de fază, construită într-un alt plan al fazelor $\Omega\xi\eta$, efectuîndu-se o schimbare convenabilă de variabile de forma

$$\xi = \xi(u_1, u_2); \quad \eta = \eta(u_1, u_2). \tag{29.13}$$

Întrucît, așa cum rezultă din precizările precedente, studiul, în primă aproximație, al stabilității mișcării unui sistem vibrant autonom se reduce, în ultimă instanță, la cel al stabilității unui sistem vibrant autonom liniar, este firesc ca prezentarea celor două metode principale de studiere a stabilității să înceapă cu sistemele vibrante liniare.

29.1.1. Analiza stabilității mișcării sistemelor vibrante liniare

În cazul sistemelor vibrante liniare, sistemul asociat de ecuații diferențiale liniare va coincide, evident, chiar cu ecuațiile de stare, care vor putea fi scrise deci sub una din formele de mai jos

$$\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{2r} E_{ji}\, u_i = \sum_{i=1}^{2r} A_{ji}\, u_i, \tag{29.14}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 2r)$$

rezultînd de aici următoarele semnificații pentru coeficienții A_{ji}:

$$A_{ji} = E_{ji} \tag{29.15}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, 2r).$$

1°. **Studiul stabilității mișcării prin metoda algebrică.** Din teoria sistemelor de ecuații diferențiale liniare se știe că pentru a obține soluția generală a sistemului (29.14) de ecuații diferențiale trebuie să se plece de la un set de soluții particulare de forma

$$u_i = C_i\, e^{zt}, \tag{29.16}$$

Scanned with CamScanner

unde C_i sînt constante arbitrare, iar z este o constantă ce va putea fi determinată impunîndu-se condiţia ca soluţia (29.16) să verifice sistemul (29.14) de ecuaţii diferenţiale, ceea ce conduce la condiţiile

$$\left(\sum_{i=1}^{2r} E_{ji}\, C_i - zC_j\right) e^{zt} = 0, \tag{29.17}$$

cu consecinţele

$$\sum_{i=1}^{2r} E_{ji}\, C_i - z\, C_j = 0. \tag{29.18}$$

Introducînd cunoscutul simbol al lui Kronecker, definit prin relaţiile

$$\delta_{ji} \begin{cases} = 0 & \text{pentru} \quad j \neq i; \\ = 1 & \text{pentru} \quad j = i \end{cases} \tag{29.19}$$

şi care permite să facă înlocuirea

$$C_j = \sum_{i=1}^{2r} \delta_{ji}\; C_i, \tag{29.20}$$

sistemul (29.18) de ecuaţii va mai putea fi scris sub forma

$$\sum_{i=1}^{2r} (E_{ji} - \delta_{ji}\, z)\, C_i = 0, \tag{29.21}$$

reprezentînd un sistem de $2r$ ecuaţii algebrice liniare omogene în cele $2r$ constante arbitrare C_i, $(i = 1, 2, \ldots, 2r)$.

Pentru ca un asemenea sistem de ecuaţii să admită o soluţie nebanală trebuie să fie satisfăcută condiţia

$$\Delta = |E_{ji} - \delta_{ji} z| = \begin{Vmatrix} E_{11} - z & E_{12} & \ldots & E_{1i} & \ldots & E_{1,2r} \\ E_{21} & E_{22} - z & \ldots & E_{2i} & \ldots & E_{2,2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{j1} & E_{j2} & \ldots & E_{ji} - \delta_{ji} z & \ldots & E_{j,2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{2r,1} & E_{2r,2} & \ldots & E_{2r,i} & \ldots & E_{2r,2r} - z \end{Vmatrix} = 0, \tag{29.22}$$

echivalentă condiției (27.16); prin dezvoltarea determinantului și ordonarea termenilor după puterile lui z, se obține o ecuație algebrică de gradul $2r$ în z, de forma

$$\sum_{i=0}^{2r} a_{2r-i}\, z^{i} = a_0 z^{2r} + a_1 z^{2r-1} + \ldots + a_{2r-1} z + a_{2r} = 0, \quad (29.23)$$

cu

$$a_0 = 1, \quad (29.24)$$

echivalentă, evident, ecuației (27.17) și purtînd, din acest motiv, tot numele de *ecuație caracteristică a sistemului vibrant liniar*.

Celor $2r$ rădăcini ale ecuației caracteristice le va corespunde un set de $2r$ soluții particulare fundamentale ale sistemului (29.14) de ecuații diferențiale în funcție de care va putea fi exprimată soluția generală a sistemului; în cazul cînd toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt distincte, soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale (29.14) va avea forma

$$u_i = \sum_{j=1}^{2r} C_{ij}\, e^{z_j t}\ ; \quad (i = 1, 2, \ldots, 2r). \quad (29.25)$$

Dacă ecuația caracteristică admite și rădăcini duble, reale sau pur imaginare (conjugate), atunci soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare va conține și termeni ce vor avea timpul t ca factor.

Examinarea naturii rădăcinilor ecuației caracteristice (29.23) permite, așa cum se va arăta în continuare, să se facă o serie de observații în legătură cu apariția aspectelor de instabilitate a mișcării sistemului vibrant corespunzător, putîndu-se deosebi următoarele situații:

— *Ecuația caracteristică admite una, sau mai multe, rădăcini reale pozitive.* În această situație, fiecărei rădăcini reale pozitive, de forma

$$z_h = \mu_h > 0,$$

îi va corespunde, în soluția generală (29.25), cîte un termen de forma

$$u_{i(h)} = C_{ih}\, e^{\mu_h t},$$

care va crește nelimitat cu timpul, rezultînd de aici că *mișcarea sistemului vibrant este nestabilă*.

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

— *Ecuaţia caracteristică admite numai rădăcini reale şi negative.* În condiţiile

$$z_h = -\mu_h < 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, 2r)$$

soluţia generală (29.25) va lua forma

$$u_i = \sum_{j=1}^{2r} C_{ij}\, e^{-\mu_j t}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2r)$$

cu termenii ei tinzînd toţi spre zero pentru $t \to \infty$; în acest caz deci *mişcarea sistemului vibrant este aperiodică şi asimptotic stabilă.*

— *Ecuaţia caracteristică admite una sau mai multe perechi de rădăcini complexe conjugate, cu partea reală pozitivă.* Considerind o asemenea pereche de rădăcini:

$$z_h = \mu + ik^*;\ z_k = \mu - ik^*,$$

cu $\mu > 0$, ei îi va corespunde, în soluţia generală (29.25), suma de termeni

$$u_{i_{(hk)}} = C_{ih}\, e^{(\mu + ik^*)t} + C_{ik}\, e^{(\mu - ik^*)t},$$

cu constantele arbitrare de asemenea complexe şi conjugate, adică de forma

$$C_{ih} = \frac{1}{2}(A_i + iB_i); \quad C_{ik} = \frac{1}{2}(A_i - iB_i).$$

Se verifică cu uşurinţă că suma $u_{i_{(hk)}}$ ia în acest caz valoarea

$$u_{i_{(hk)}} = e^{\mu t}[A_i \cos(k^* t) - B_i \sin(k^* t)] = e^{\mu t}\, C_i \cos(k^* t + \alpha_i),$$

$\left(C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2};\ \alpha_i = \operatorname{arctg} \dfrac{B_i}{A_i}\right)$, tinzînd spre infinit pentru $t \to \infty$.

Mişcarea sistemului vibrant va fi deci nestabilă în condiţiile precizate mai sus.

— *Ecuaţia caracteristică admite numai rădăcini complexe conjugate cu partea reală negativă.* În această nouă situaţie, corespunzătoare condiţiilor

$$z_{2h-1} = -\mu_h + ik_h^*;\ z_{2h} = -\mu_h - ik_h^*,$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r),$$

cu $\mu_h > 0$, soluția generală (29.25) va conține numai perechi de termeni de forma

$$u_{i(2h-1)} = C_{i,2h-1}\, e^{(-\mu_h + ik_h^*)t} = e^{-\mu_h t}\, C_{i,2h-1}\, e^{ik_h^* t} \; ;$$

$$u_{i(2h)} = C_{i,2h}\, e^{(-\mu_h - ik_h^*)t} = e^{-\mu_h t}\, C_{i,2h}\, e^{-ik_h^* t} \, ,$$

cu constantele $C_{i,2h-1}$ și $C_{i,2h}$ tot complexe și conjugate, adică de forma

$$C_{i,2h-1} = \frac{1}{2}(A_{ih} + iB_{ih}) ; \quad C_{i,2h} = \frac{1}{2}(A_{ih} - i\, B_{ih})$$

și cu sumele acestor termeni :

$$u_{i,2h-1} + u_{i,2h} = e^{-\mu_h t}\, [A_{ih} \cos (k_h^*\, t) - B_{ih} \sin (k_h^* t)] =$$
$$= e^{-\mu_h t}\, C_{ih} \cos (k_h^* t + \alpha_h)$$

tinzînd spre zero pentru $t \to \infty$.

Deci în condițiile precizate mai sus, *mișcarea sistemului vibrant va fi asimptotic stabilă.*

— *Ecuația caracteristică are numai rădăcini pur imaginare conjugate.* În acest caz, caracterizat prin condițiile

$$z_{2h-1} = ik_h ; \; z_{2h} = -ik_h ,$$

soluția generală (29.25) va conține numai perechi de termeni de forma

$$u_{i,2h-1} = C_{i,2h-1}\, e^{ik_h t} \; ; \quad u_{i,2h} = C_{i,2h}\, e^{-ik_h t} \, ,$$

cu constantele $C_{i,2h-1}$ și $C_{i,2h}$ complexe și conjugate

$$C_{i,2h-1} = A_{ih} + iB_{ih} ; \; C_{i,2h} = A_{ih} - iB_{ih} ,$$

rezultînd astfel, in soluție, numai sume de termeni de forma

$$u_{i,2h-1} + u_{i,2h} = A_{ih} \cos (k_h\, t) - B_{ih} \sin (k_h\, t) = C_{ih} \cos (k_h\, t + \alpha_h),$$

sume care rămîn mărginite pentru orice valoare a timpului.

În condițiile menționate mai sus, *mișcarea sistemului vibrant este numită simplu stabilă sau marginal stabilă.*

Scanned with CamScanner

— *Ecuaţia caracteristică admite o rădăcină dublă pur imaginară.* În această situaţie, corespunzătoare condiţiilor

$$z_h = z_{h+2} = ik\,;\ z_{h+1} = z_{h+3} = -\,ik,$$

soluţia generală a sistemului 29.14 de ecuaţii diferenţiale va conţine un grup de termeni de forma

$$u_{i(*)}(C_{ih} + C_{i,h+2}\,t)e^{ikt} + (C_{i,h+1} + C_{i,h+3}\,t)\,e^{-ikt},$$

cu constantele C_{ih} şi $C_{i,h+1}$, respectiv $C_{i,h+2}$ şi $C_{i,h+3}$, complexe şi conjugate, adică de forma

$$C_{ih} = \frac{1}{2}\,(A_{ih} + iB_{ih})\,;\quad C_{i,h+1} = \frac{1}{2}(A_{ih} - iB_{ih})\,;$$

$$C_{i,h+2} = \frac{1}{2}\,(A_{i,h+2} + i\,B_{i,h+2})\,;\quad C_{i,h+3} = \frac{1}{2}\,(A_{i,h+2} - iB_{i,h+2}),$$

ceea ce face ca acest grup de termeni să capete valoarea

$$u_{i(*)} = (A_{ih} + A_{i,h+2}\,t)\cos(kt) - (B_{ih} + B_{i,h+2}t)\sin(kt),$$

care evidenţiază faptul că în condiţiile precizate *mişcarea sistemului vibrant este instabilă.*

— *Ecuaţia caracteristică admite o rădăcină egală cu zero.* În această situaţie, corespunzătoare condiţiei

$$a_{2r} = 0,$$

rădăcinii

$$z_1 = 0$$

îi va corespunde, în soluţia generală a sistemului (29.14) de ecuaţii diferenţiale un termen de forma

$$u_{i(1)} = C_{i1} = \text{const.}$$

Dacă toate celelalte rădăcini ale ecuaţiei caracteristice sînt reale şi negative, sau complexe şi conjugate cu partea reală negativă, cărora le corespund, în soluţia generală, termeni tinzînd spre zero pentru $t \to \infty$, rezultă că în soluţia generală va persista, după un anumit timp, numai termenul mărginit C_{i1}; *mişcarea sistemului vibrant este deci tot simplu stabilă, sau marginal stabilă.*

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

— *Ecuația caracteristică admite o rădăcină dublă egală cu zero.* În această ultimă situație, care va putea fi intîlnită în condițiile

$$a_{2r-1} = a_{2r} = 0,$$

rădăcinilor

$$z_1 = z_2 = 0$$

le va corespunde, în soluția generală a sistemului (29.14) de ecuații diferențiale, grupul de termeni

$$u_{i_{(1,2)}} = C_{i1} + C_{i2}\,t,$$

care scoate în evidență faptul că în condițiile precizate *mișcarea sistemului vibrant este instabilă.*

Discuțiile precedente permit să se tragă următoarele concluzii finale privind stabilitatea mișcării unui sistem vibrant liniar :

— mișcarea vibratorie a unui sistem vibrant liniar este asimptotic stabilă numai în cazurile cînd toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale și negative, sau complexe conjugate cu partea reală negativă ;

— mișcarea vibratorie a unui sistem vibrant liniar este simplu stabilă, sau marginal stabilă, atunci cînd ecuația caracteristică admite o pereche de rădăcini pur imaginare (conjugate), sau o singură rădăcină egală cu zero, toate celelalte rădăcini fiind fie reale și negative, fie complexe (conjugate), cu partea reală negativă ;

— mișcarea unui sistem vibrant liniar este instabilă atunci cînd ecuația caracteristică admite fie o rădăcină reală pozitivă, fie o pereche de rădăcini complexe (conjugate) cu partea reală pozitivă, fie rădăcini duble pur imaginare (conjugate), fie o rădăcină dublă egală cu zero.

Din expunerea precedentă rezultă că pentru aprecierea stabilității mișcării unui sistem vibrant liniar va trebui examinată doar natura rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului, fără a fi necesară rezolvarea efectivă a ecuației, rezolvare care devine foarte dificilă în cazul sistemelor vibrante cu mai multe grade de libertate ; această concluzie este cu atît mai importantă, cu cît în practică nu se pune, de cele mai multe ori, problema determinării ecuațiilor finite ale mișcării vibratorii a unui sistem mecanic dat, ci aceea a verificării stabilității mișcării lui vibratorii.

Scanned with CamScanner

Pentru stabilirea directă a naturii rădăcinilor ecuaţiei caracteristice, în vederea aprecierii stabilităţii mişcării unui sistem vibrant liniar fără a-i scrie în prealabil soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării lui, au fost elaborate diverse criterii, dintre care vor fi prezentate mai jos următoarele două, folosite cel mai des în aplicaţiile tehnice:

a) *Criteriul Routh-Hurwitz*. Notînd cu

$$\mathcal{P}_{2r}(z) = \sum_{i=0}^{2r} a_{2r-i}\, z^i = a_{2r} + a_{2r-1}\, z + \ldots + a_1\, z^{2r-1} + a_0\, z^{2r} \tag{29.26}$$

polinomul de gradul $2r$ în z din membrul sting al ecuaţiei caracteristice (29.23), se formează cu coeficienţii puterilor lui z ai acestui polinom o matrice pătratică de tip $2r \times 2r$, după următoarele reguli:

— Elementul de la intersecţia liniei $h \leqslant r$ cu coloana $j \leqslant 2h$ este reprezentat prin coeficientul a_{2h-j};

— elementele situate la intersecţia liniei h cu coloanele $j > 2h$ sînt reprezentate prin cifra zero;

— elementele situate la intersecţiile liniilor $h > r$ cu coloanele $j < 2(h-r)$ sînt reprezentate, de asemenea, prin cifra zero.

Această matrice va avea deci forma de mai jos

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc|c}
(1) & (2) & (3) & \ldots (j) & \ldots (h) & \ldots (2h) & \ldots (2r) & \\
\hline
a_1 & a_0 & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & (1) \\
a_3 & a_2 & a_1 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & (2) \\
a_5 & a_4 & a_3 & \ldots a_{6-j} & \ldots a_{6-h} & \ldots 0 & \ldots 0 & (3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2h-1} & a_{2h-2} & a_{2h-3} & \ldots a_{2h-j} & \ldots a_h & \ldots a_0 & \ldots 0 & (h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2r-1} & a_{2r-2} & a_{2r-3} & \ldots a_{2r-j} & \ldots a_{2r-h} & \ldots a_{2(r-h)} & \ldots 0 & (r) \\
0 & a_{2r} & a_{2r-1} & \ldots a_{2(r+1)-j} & \ldots a_{2(r+1)-h} & \ldots a_{2(r+1)-2h} & \ldots 0 & (r+1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots a_{2r} &
\end{array} \tag{29.27}$$

Scanned with CamScanner

Cu elementele primelor h linii și h coloane ai acestei matrice pătratice se pot forma determinanții

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \ldots & 0 & \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \ldots & 0 & \ldots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 \ldots & a_{6-j} & \ldots a_{6-h} \\ \vdots & & & & \\ a_{2h-1} & a_{2h-2} & a_{2h-3} \ldots & a_{2h-j} & \ldots a_h \end{vmatrix}, \quad (h = 1, 2, \ldots, 2r) \tag{29.28}$$

ultimul determinant satisfacind relația evidentă

$$\Delta_{2r} = a_{2r}\Delta_{2r-1}, \tag{29.29}$$

ca urmare a faptului că ultima linie a matricei **M** conține numai elementul a_{2r}.

Cu aceste precizări, se poate da următoarea formulare a criteriului lui Routh-Hurwitz:

Rădăcinile ecuației caracteristice a unui sistem vibrant liniar au partea reală negativă în următoarele condițiuni:

1°. Polinomul $\mathscr{P}_{2r}(z)$ trebuie să conțină toate puterile lui z, adică trebuie să fie valabile condițiile

$$a_{2r-i} \neq 0, (i = 0, 1, 2, \ldots, 2r). \tag{29.30}$$

2°. Coeficienții a_i ai puterilor lui z din ecuația caracteristică trebuie să fie toți pozitivi, adică trebuie să fie valabile inegalitățile

$$a_{2r-i} > 0, \; (i = 0, 1, 2, \ldots, 2r). \tag{29.31}$$

3°. Toți determinanții Δ_h, $(h = 1, 2, \ldots, 2r)$, de forma (29.28), trebuie să fie pozitivi, adică trebuie să aibă loc inegalitățile

$$\Delta_h > 0, \; (h = 1, 2, \ldots, 2r). \tag{29.32}$$

Prin folosirea criteriului Routh-Hurwitz, studiul stabilității mișcării unui sistem vibrant liniar este redus deci doar la stabilirea ecuației caracteristice (29.23), la formarea matricei **M** și la calculul determinanților Δ_h, verificindu-se apoi satisfacerea condițiilor (29.30), (29.31) și (29.32).

Aplicind criteriul la studiul sistemelor vibrante liniare cu un singur grad de libertate, rezultă că mișcarea lor în jurul poziției de

Scanned with CamScanner

echilibru stabil va fi stabilită atunci cînd ecuaţia caracteristică va avea forma

$$\mathscr{P}_2(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \tag{29.33}$$

şi cînd vor fi satisfăcute condiţiile

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,;\ \Delta_2 = a_2\Delta_1 > 0, \tag{29.34}$$

echivalente condiţiilor

$$a_1 > 0\,;\ a_2 > 0. \tag{29.35}$$

Pentru sistemele vibrante liniare cu două grade de libertate, asigurarea caracterului stabil al mişcării lor vibratorii în jurul poziţiilor de echilibru static implică forma

$$\mathscr{P}_4(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0 \tag{29.36}$$

pentru ecuaţia caracteristică şi satisfacerea condiţiilor

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,; \qquad\qquad \Delta_4 = a_4\Delta_3 > 0, \tag{29.37}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,;$$

echivalente condiţiilor

$$a_1 > 0\,;\ a_2 > 0\,;\ a_3 > 0\,;\ a_4 > 0\,;$$

$$a_1 a_2 - a_3 > 0\,;\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0. \tag{29.38}$$

b) *Criteriul Nyquist.* Încadrînd în cazul rădăcinilor complexe ale ecuaţiei caracteristice şi cazurile rădăcinilor reale şi pur imaginare — corespunzătoare situaţiilor particulare, cînd fie partea imaginară, fie partea reală, este egală cu zero —, se va putea considera că variabila z din polinomul $\mathscr{P}_{2r}(z) \equiv \mathscr{P}(z)$ este complexă, de forma

$$z = \mu + ik^* \tag{39.39}$$

şi că polinomul $\mathscr{P}(z)$ este o funcţie de variabilă complexă, el însuşi, în general, de forma

$$\mathscr{P}(z) = \mathscr{P}(\mu + ik^*) = \mathrm{Re}\,(\mathscr{P}(z)) + i\mathrm{Im}(\mathscr{P}(z)). \quad 29.40)$$

Scanned with CamScanner

Folosind reprezentarea în planul complex $\Omega\mu ik \equiv (\pi_z)$, (fig. 29.1), unei perechi (μ, k^*) de valori ale celor două părți ale numărului complex z îi va corespunde în planul (π_z) un punct $Z(\mu, ik^*)$, determinat în raport cu originea planului prin vectorul complex z.

Situarea punctului reprezentativ Z în semiplanul drept $(\mu > 0)$, corespunde unei valori a numărului complex cu partea reală pozitivă, iar situarea lui în semiplanul sting $(\mu < 0)$ corespunde unei valori a aceluiași număr complex z cu partea reală negativă; situarea punctului $Z(z)$ pe axa reală corespunde unui număr real $(k^* = 0)$, iar situarea sa pe axa imaginară corespunde unui număr pur imaginar $(\mu = 0)$.

Dacă se notează cu

$$z_i = \mu_i + ik_i \tag{29.41}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2r),$$

rădăcinile ecuației caractderistice (29.23) — acestea fiind, evident, două cîte două conjugate, deoarece coeficienții ecuației sînt reali —, atunci polinomul $\mathscr{P}(z)$ poate fi scris sub forma

$$\mathscr{P}(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_i) \ldots (z - z_{2r}), \tag{29.42}$$

iar valorile lui z egale cu cîte una din cele $2r$ rădăcini z_i, care anulează polinomul, se numesc *zero-urile* funcției $\mathscr{P}(z)$.

Funcției $\dot{\mathscr{P}}(z)$ i se asociază obișnuit inversa sa:

$$G(z) = \frac{1}{\mathscr{P}(z)} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{2r})} \tag{29.43}$$

iar valorile lui z egale cu rădăcinile ecuației caracteristice, care fac în acest caz infinită funcția $G(z)$, poartă numele de *polii* funcției $G(z)$.

Folosind și pentru funcția $G(z)$ reprezentarea în planul complex $ORiI \equiv (\pi_G)$, (fig. 29.2), unei valori a variabilei $z = \mu + ik^*$, care nu coincide cu una din rădăcinile ecuației caracteristice, îi va corespunde o valoare

$$G(z) = R(\mu, k^*) + iI(\mu, k^*) \qquad 29.44)$$

a funcției $G(z)$ și un punct $K(R, I) \equiv K(G)$ din planul complex, determinat prin vectorul complex $G(z)$.

Scanned with CamScanner

La o variație continuă a lui z, punctul reprezentativ $Z(z)$ va descrie o curbă (Γ_Z) în planul (π_Z), iar punctul K o curbă (Γ_K) în planul (π_G); în cazul funcțiilor de variabilă complexă $G(z)$ univoce, unui contur închis (Γ_Z) descris în sens indirect (orar) de punctul

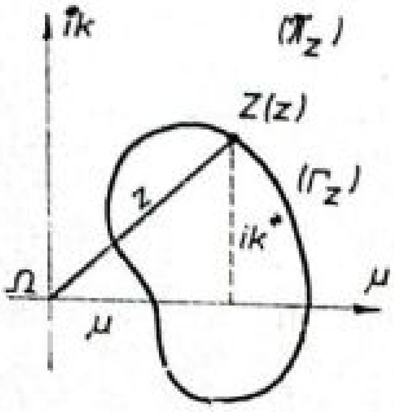


Fig. 29.1.

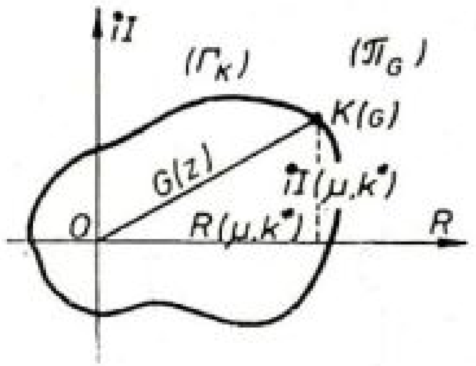


Fig. 29.2.

$Z(z)$ în planul (π_Z) îi va corespunde un contur tot închis (Γ_K), descris de punctul K în planul (π_G), într-un sens care va depinde de valorile coeficienților polinomului $\mathscr{P}(z)$.

În cazul sistemelor vibrante reale, funcția $G(z)$ este, de regulă, analitică, adică satisface cunoscutele condiții Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} = \frac{\partial I}{\partial k^*}; \quad \frac{\partial R}{\partial k^*} = -\frac{\partial I}{\partial \mu}, \tag{29.45}$$

fapt care face posibilă utilizarea următoarei teoreme din teoria funcțiilor de variabilă complexă, fundamentală pentru reprezentarea conformă:

„Dacă o funcție $G(z)$ este analitică atît pe un contur (Γ_Z) dat, cît și în interiorul conturului, cu excepția unui număr determinat n_p de poli, atunci, în timp ce punctul reprezentativ al variabilei complexe parcurge conturul respectiv din planul (π_Z) în sens indirect, punctul reprezentativ al funcției $G(z)$ înconjoară originea planului complex al funcției de un număr de

$$n = n_p - n_z \tag{29.46}$$

ori, unde n_z este numărul de zero-uri al funcției $G(z)$, aflați, ca și cei n_p poli, în interiorul conturului — fiecare zero și fiecare pol fiind considerat cu ordinul său de multiplicitate —, acest înconjur efectuindu-se

Scanned with CamScanner

în sens direct pentru $n>0$ şi în sens invers pentru $n<0$; dacă $n=0$, atunci originea planului complex nu intră în conturul funcţiei $G(z)$".

Această teoremă a stat la baza elaborării criteriului Nyquist de studiere a stabilităţii mişcării unui sistem vibrant liniar.

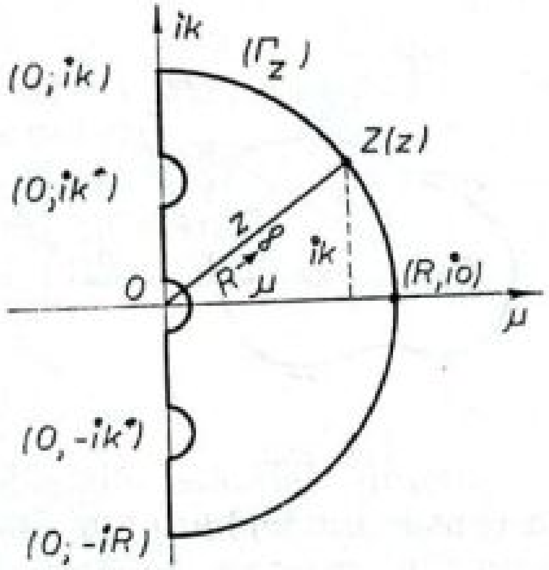


Fig. 29.3

Întrucît pentru verificarea stabilităţii mişcării unui asemenea sistem vibrant liniar interesează doar existenţa rădăcinilor ecuaţiei caracteristice situate în semiplanul drept al planului complex (π_z), existenţă indicînd instabilitatea mişcării, conturul (Γ_z) va fi luat astfel incît să fie format din axa imaginară – cu ocolirea, ca în fig. 29.3, a eventualilor poli aflaţi pe această axă (de ex., cu ocolirea originii, dacă există o rădăcină simplă $z_1 = 0$ şi cu ocolirea punctelor $(0; -ik^*)$ şi $(O; +ik^*)$, dacă există o pereche de rădăcini pur imaginare $z_h = ik^*$ şi $z_{h+1} = -ik^*$), ocoliri efectuate prin semicercuri de raze foarte mici – şi dintr-un semicerc situat în semiplanul drept, cu centrul în origine şi de rază arbitrară, dar suficient de mare pentru ca în conturul format astfel să fie incluse toate eventualele rădăcini ale ecuaţiei caracteristice cu partea reală pozitivă (practic se consideră raza infinită).

La parcurgerea acestui contur (Γ_z) în sens orar de către punctul reprezentativ $Z(z)$, de la punctul $(0; -iR)$ spre punctul $(0; iR)$ şi apoi, pe semicerc, de la punctul $(0; iR)$ spre punctul $(0; -iR)$, punctul reprezentativ al funcţiei $G(z)$, care are $n_z = 0$ zerouri, va inconjura originea planului (π_G),in sens direct $(n = n_p > 0)$, de un număr de n ori, egal cu numărul de poli ai funcţiei $G(z)$ aflaţi în semiplanul drept; se înţelege că dacă asemenea poli nu vor exista în conturul (Γ_z), $(n_p = 0; n = 0)$, conturul (Γ_K) nu va inconjura originea planului (π_G), adică această origine va rămine exterioară conturului, ceea ce va constitui dovada existenţei stabilităţii mişcării sistemului vibrant liniar considerat.

Înainte de a se trece la formularea criteriului de stabilitate Nyquist, se va mai observa că întrucît pentru sistemele vibrante reale coeficienţii ecuaţiei caracteristice sint şi ei reali şi că, în conse-

cinţă, rădăcinile complexe ale acestei ecuaţii sînt două cîte două conjugate, ceea ce înseamnă că orice rădăcină din cadranul IV al planului complex, îşi va avea conjugata plasată simetric faţă de axa reală în cadranul I, conturul (Γ_Z) va putea fi redus, pentru studierea stabilităţii mişcării unui sistem vibrant liniar, doar la cel format din semiaxa pozitivă reală, semiaxa pozitivă imaginară şi de sfertul de cerc din primul cadran; simpla constatare a înconjurării originii planului complex (π_G) de către conturul (Γ_K) descris de punctul figurativ K la parcurgerea în sens orar a conturului (Γ_Z) de către punctul reprezentativ $Z(z)$ va atesta existenţa instabilităţii mişcării sistemului vibrant respectiv.

Cu aceste precizări, se poate da următoarea formulare criteriului de stabilitate Nyquist:

„Mişcarea vibratorie în jurul poziţiei de echilibru static a unui sistem vibrant liniar este stabilă atunci cînd la parcurgerea de către punctul reprezentativ $Z(z)$, în sens orar, a conturului format din axa imaginară a planului complex (π_Z) şi din semicercul cu centrul în origine şi de rază infinită, punctul reprezentativ K parcurge conturul (Γ_K) din planul complex (π_G) astfel încît să nu cuprindă în interiorul lui originea planului; dacă mişcarea vibratorie este instabilă, atunci la un simplu înconjur al conturului (Γ_Z) de către punctul reprezentativ $Z(z)$, conturul (Γ_K) ocoleşte originea planului (π_G) de un număr n de ori, egal cu numărul rădăcinilor complexe cu partea reală pozitivă ale ecuaţiei caracteristice.

În unele cazuri variabila complexă z este notată cu s, iar funcţia $G(z)$ este scrisă sub forma

$$G(z) \equiv G(s) = k \frac{1}{1+g(s)}, \tag{29.47}$$

unde k este o constantă; se va observa că în această situaţie polii funcţiei $G(z) \equiv G(s)$ vor corespunde rădăcinilor ecuaţiei

$$1 + g(s) = 0, \tag{29.48}$$

existenţa unei valori s_i a variabilei complexe s pentru care este satisfăcută condiţia

$$g(s_i) = -1 \tag{29.49}$$

indicînd deci caracterul instabil al mişcării vibratorii a sistemului vibrant respectiv.

Scanned with CamScanner

În aceste situații, stabilitatea mișcării sistemului vibrant va putea fi studiată prin reprezentarea, în planul complex $ORiI \equiv (\pi_g)$, a funcției $g(s)$; trecerea conturului (Γ_g), corespunzător acestei reprezentări, în condițiile parcurgerii de către variabila complexă a unui contur $(\Gamma_z) \equiv (\Gamma_s)$ identic celui reprezentat în fig. 29.3, prin punctul $(-1; iO)$, (fig. 29.4 ,*a*) sau situarea acestui punct în interiorul conturului (Γ_g), (fig. 29.4, *b*), va evidenția existența unei mișcări instabile a sistemului vibrant, în timp ce situarea punctului $(-1, iO)$ în afara conturului (Γ_g), (fig. 29.4, *c*) va scoate în evidență caracterul stabil al mișcării.

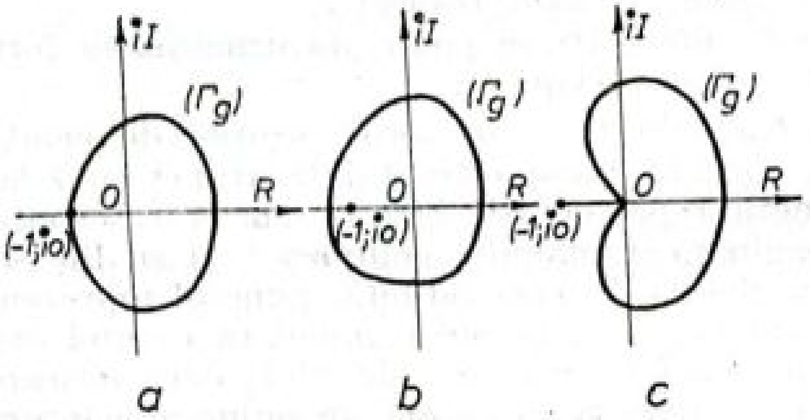


Fig. 29.4.

În aceste condiții, criteriul lui Nyquist va căpăta următoarea formulare:

La parcurgerea, în sens orar, de către punctul reprezentativ al variabilei complexe s, a conturului (Γ_s), format din axa imaginară și dintr-un semicerc aflat în semiplanul drept, cu centrul în origine și de rază infinită, punctul reprezentativ al funcției

$$g(s) = \text{Re}\,[g)(s)] + i\,\text{Im}\,[g(s)] \tag{29.50}$$

descrie în planul complex $ORiI \equiv (\pi_g)$ un contur (Γ_g), care înconjoară în sens direct punctul $(-1; iO)$ de un număr de ori egal cu numărul de zero-uri ale funcției $(1 + g(s))$; dacă punctul $(-1; iO)$ rămîne exterior conturului (Γ_g), mișcarea sistemului vibrant este stabilă.

Prin trasarea conturului (Γ_g) și aplicarea criteriului Nyquist este posibilă deci nu numai aprecierea caracterului stabil, sau nestabil, al mișcării unui sistem vibrant liniar, ci să se determine chiar și numărul de rădăcini ale ecuației caracteristice cu partea reală pozitivă.

2°. **Studiul stabilităţii mişcărilor sistemelor vibrante liniare prin metoda topologică.** Considerînd numai cazul sistemelor vibrante liniare cu un singur grad de libertate, mişcarea lor vibratorie va fi descrisă prin următoarele două ecuaţii de stare:

$$\dot{u}_1 = E_{11}u_1 + E_{12}u_2;\ \dot{u}_2 = E_{21}u_1 + E_{22}u_2, \tag{29.51}$$

cu semnificaţiile de mai jos ale variabilelor de stare

$$u_1 = w;\ u_2 = h = a_{11}\dot{w} = a\dot{w} \tag{29.52}$$

şi cu coeficienţii E_{ij} avînd, în baza relaţiilor stabilite dinainte şi a expresiei pentru coeficientul α_{11} $\left(\alpha_{11} = \frac{\dot{w}}{h} = \frac{1}{a}\right)$, valorile

$$E_{11} = 0;\quad E_{12} = \frac{1}{a};\quad E_{21} = -c;\quad E_{22} = -\frac{b}{a}. \tag{29.53}$$

Sistemul (29.51) de ecuaţii de stare va lua deci următoarea formă concretă:

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{a}u_2;\qquad \dot{u}_2 = -cu_1 - \frac{b}{a}u_2. \tag{29.54}$$

Se va remarca că dacă se înlocuieşte variabila u_2 cu variabila u, definită prin relaţia $u_2 = au$, sistemul precedent de ecuaţii de stare va mai putea fi scris sub forma

$$\dot{w} = u;\quad \dot{u} = -\frac{c}{a}w - \frac{b}{a}u = -k^2w - 2\mu u, \tag{29.55}$$

care putea fi dedusă direct din ecuaţia diferenţială liniară

$$a\ddot{w} + b\dot{w} + cw = 0, \tag{29.56}$$

introducîndu-se variabila $\dot{w} = u$ şi ţinîndu-se seama de notaţiile introduse în § 27 $\left(k^2 = \frac{c}{a}\right.$ este pulsaţia proprie fără amortizare a sistemului vibrant, iar $\mu = \frac{b}{2a}$ este coeficientul de amortizare$\left.\right)$.

Scanned with CamScanner

Considerind, în continuare, ecuațiile de stare scrise sub forma (29.55), cea mai des intilnită în aplicații, se face precizarea că studiul stabilității mișcării sistemului vibrant va putea fi efectuat cu ajutorul traiectoriei de fază pe baza următoarelor proprietăți ale acesteia :

— Originea planului fazelor este un punct singular al traiectoriei de fază (tangenta în acest punct al traiectoriei nu este determinată) și corespunde poziției de echilibru static a sistemului vibrant.

Într-adevăr, poziția de echilibru static a sistemului vibrant liniar cu un grad de libertate va fi caracterizată prin condițiile

$$w_{st} = 0\,;\ \dot{w}_{st} = u_{st} = 0, \tag{29.57}$$

în baza cărora panta tangentei geometrice dusă în origine la traiectoria de fază

$$u = f(w) \tag{29.58}$$

va lua valoarea

$$m_0 = \operatorname{tg} \varphi_{st} = \frac{\mathrm{d}u_{st}}{\mathrm{d}w_{st}} = \frac{\dot{u}_{st}}{\dot{w}_{st}} = -\frac{k^2 w_{st} + 2\mu u_{st}}{u_{st}} = \frac{0}{0}, \tag{29.59}$$

care justifică caracterul de punct singular al originii O.

— Sensul de parcurs, pe traiectoria de fază, a punctului reprezentativ $P(w, u)$ este totdeauna de la stinga la dreapta în semiplanul $u>0$ și de la dreapta la stinga în semiplanul $u<0$.

Proprietatea enunțată mai sus apare evidentă dacă se observă că ecuațiile parametrice

$$w = w(t)\,;\ u = u(t), \tag{29.60}$$

reprezentînd soluția generală a sistemului (29.55) de ecuații diferențiale, definesc mișcarea punctului reprezentativ $P(w, u)$ în planul fazelor și că viteza de deplasare a acestui punct, avind expresia

$$\overline{V} = \dot{w}\bar{\imath}_w + \dot{u}\bar{\imath}_u, \tag{29.61}$$

unde $\bar{\imath}_w$ și $\bar{\imath}_u$ sint versorii axelor Ow, respectiv Ou, are următoarea proiecție pe axa Ow :

$$V_w = \dot{w} = u, \tag{29.62}$$

Scanned with CamScanner

cu consecinţele

$$V_w > 0 \text{ pentru } u > 0;$$
$$V_w < 0 \text{ pentru } u < 0, \qquad (29.63)$$

(fig. 29.5,a); în mod obişnuit, aceste sensuri de parcurs sînt indicate, în planul fazelor, prin săgeţi curbilinii, ca în fig. 29.5, b.

— În punctele ordinare de pe axa Ow, $(u = 0)$, traiectoriile de fază intersectează această axă sub unghi drept.

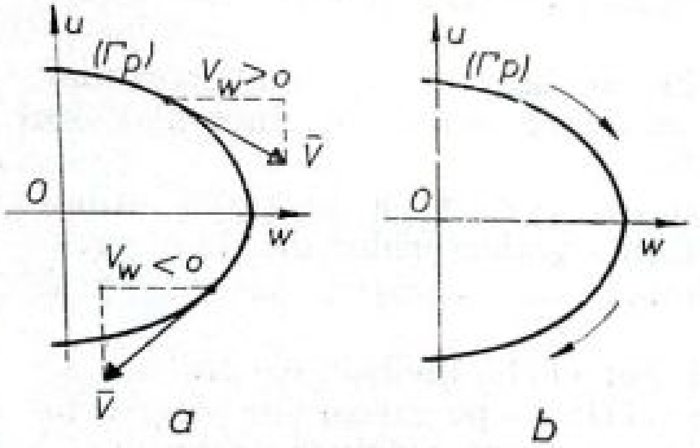


Fig. 29.5

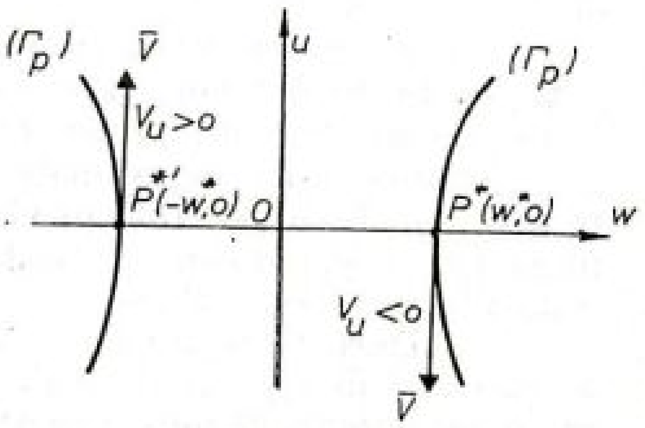


Fig. 29.6

Într-adevăr, într-un asemenea punct $P^*(w^*, 0)$ vor fi valabile, în baza relaţiilor (29.55) şi (29.61), condiţiile

$$\bar{V} = \dot{u}\bar{i}_u = -\frac{c}{a}w^*\bar{i}_u = -k^2 w^* \bar{i}_u = V_u \bar{i}_u, \qquad (29.64)$$

cu

$$V_u < 0 \text{ pentru } : w^* > 0;$$
$$V_u > 0 \text{ pentru } : w^* < 0, \qquad (29.65)$$

în condiţiile rigidităţilor liniare obişnuite $(c > 0)$, (fig. 29.6).

— Traiectoriile de fază corespunzătoare diverselor condiţii iniţiale ale unui sistem vibrant liniar dat fac parte din aceeaşi familie de curbe şi nu se intersectează în punctele ordinare.

Prin împărţirea celei de-a doua dintre ecuaţiile (29.55) la prima şi prin efectuarea substituţiei evidente

$$\frac{\dot{u}}{\dot{w}} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}$$

se obține relația

$$\frac{du}{dw} = -\frac{1}{a}\frac{cw + bu}{u} = -\frac{k^2 w + 2\mu u}{u}, \tag{29.66}$$

care va reprezenta chiar *ecuația diferențială a traiectoriei de fază* în planul *Owu*.

Cea de-a patra proprietate este în acest caz o consecință directă a valabilității teoremei lui Cauchy, care afirmă că printr-un punct ordinar trece o singură curbă integrală a unei ecuații diferențiale de forma (29.66).

Se înțelege însă că traiectoriile de fază corespunzătoare unui sistem vibrant dat vor putea avea ca punct comun originea planului fazelor, care este un punct singular.

Proprietățile menționate mai sus permit să se tragă următoarele concluzii generale privind forma traiectoriilor de fază corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu mișcarea descrisă prin ecuațiile de stare (29.55):

— Dacă traiectoriile de fază sînt curbe închise, ele trebuie să se găsească de o parte și de alta a axei *Ow* — pe care o vor intersecta în două puncte dispuse simetric în raport cu originea planului —, iar mișcarea punctului reprezentativ este periodică.

— Dacă traiectoriile de fază sînt curbe deschise și admit asimptote, atunci aceste asimptote separă planul fazelor în domenii cu diverse familii de traiectorii de fază, corespunzătoare unor valori distincte ale parametrilor traiectoriilor; din acest motiv, asimptotele au mai primit denumirea de *separatoare*.

În încheierea prezentării proprietăților generale ale traiectoriilor de fază se va mai remarca faptul că prima dintre proprietățile menționate mai sus se păstrează și în cazul traiectoriilor de fază construite în planul $\Omega\xi\eta$ pe baza unei schimbări de variabile de forma (29.13), atunci cînd această schimbare reprezintă o transformare liniară cu coeficienții transformării constanți, adică este de forma

$$\xi = \alpha w + \beta u;\ \eta = \gamma w + \delta u,$$

cu

$$\dot{\xi} = \alpha \dot{w} + \beta \dot{u};\ \dot{\eta} = \gamma \dot{w} + \delta \dot{u},$$

deoarece în acest caz vor rezulta, pentru poziția de echilibru static a sistemului vibrant ($w_{st} = u_{st} = 0$; $\dot{w}_{st} = \dot{u}_{st} = 0$), condițiile

$$\xi_{st} = \eta_{st} = 0;\ \dot{\xi}_{st} = \dot{\eta}_{st} = 0,$$

Scanned with CamScanner

cu consecinţa

$$\frac{d\eta_{st}}{d\xi_{st}} = \frac{\dot{\eta}_{st}}{\dot{\xi}_{st}} = \frac{0}{0},$$

care atestă caracterul de punct singular şi al originii Ω pentru traiectorile de fază în planul $\Omega\xi\eta$. De asemenea îşi va păstra valabilitatea şi proprietatea 4°, dar menţinerea, în schimb, a celorlalte două proprietăţi va fi condiţionată de valorile coeficienţilor transformării liniare definite mai sus.

În ceea ce priveşte trasarea efectivă a traiectoriei de fază corespunzătoare unui sistem vibrant dat, ea va putea fi realizată în următoarele două moduri :

— prin reprezentarea grafică, în planul fazelor Owu, a ecuaţiei analitice directe (29.58) a traiectoriei, obţinută fie prin eliminarea timpului între ecuaţiile finite parametrice (29.60), reprezentînd soluţia generală a sistemului (29.55) de ecuaţii diferenţiale, fie prin integrarea ecuaţiei diferenţiale (29.66) a traiectoriei de fază ;

— prin trasarea aproximativă, cu ajutorul izoclinelor, a curbelor integrale ale ecuaţiei diferenţiale (29.66).

Se numesc *izocline* curbele din planul fazelor reprezentînd locul geometric al punctelor tuturor traiectoriilor de fază corespunzătoare unui sistem vibrant dat în care tangentele geometrice duse la acestea din urmă au toate aceeaşi pantă dată $\frac{du}{dw} = m$.

Pentru sistemele vibrante liniare, ecuaţia unei asemenea izocline se obţine înlocuindu-se în ecuaţia (29.59) derivata $\frac{du}{dw}$ cu valoarea m, adică scriind egalitatea

$$m = -\frac{k^2w + 2\mu u}{u}$$

şi explicitînd apoi pe u, ceea ce conduce la ecuaţia

$$u = -\frac{k^2}{m + 2\mu}w. \quad (29.67)$$

Scanned with CamScanner

După cum se observă, în cazul sistemelor vibrante liniare, izoclinele sînt drepte trecînd prin originea planului fazelor, de pante

$$p = -\frac{k^2}{m + 2\mu} = p(m), \tag{29.68}$$

axa Ow fiind izoclina corespunzătoare tangentelor de pantă infinită ($m = \infty$; $p = 0$).

Se va putea construi deci un fascicul de n asemenea izocline Δ_i, ($i = 1, 2, \ldots, n$), pentru un număr de n direcții — de pante m_i — ale tangentelor la traiectoriile de fază, indicîndu-se prin săgeți echidistante orientările acestor tangente, cu respectarea sensului de parcurs al traiectoriilor de fază, precizate prin proprietatea 2° (săgeți orientate de la stînga spre dreapta în semiplanul $u > 0$, săgeți orientate de la dreapta la stînga în semiplanul $u<0$ și săgeți normale la axa absciselor în punctele acestei axe), (fig. 29.7).

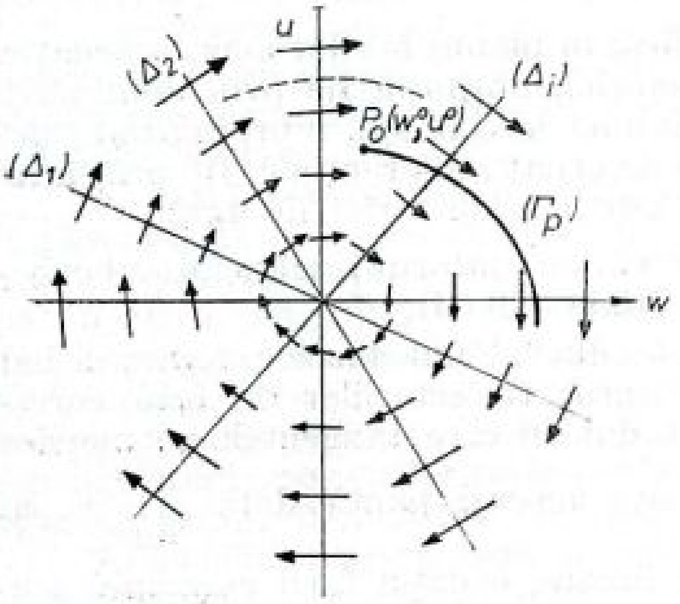


Fig. 29. 7.

Plecîndu-se de la o poziție inițială $P_0(w^\circ, u^\circ)$ — corespunzătoare unor date inițiale concrete $w^\circ = w(0)$ și $u^\circ = u(0)$ ale sistemului vibrant — a punctului reprezentativ $P(w, u)$, se va putea construi, din aproape în aproape, urmărindu-se orientările tangentelor din punctele de pe izocline, traiectoria de fază, cu o aproximație care poate fi oricît de mult îmbunătățită prin considerarea unui număr cît mai mare de izocline, (fig. 29.7).

În legătură cu trasarea traiectoriilor de fază prin metoda izoclinelor, mai trebuie semnalată posibilitatea ca unele dintre izocline să coincidă chiar cu unele dintre traiectoriile de fază, aceasta, evident, atunci cînd traiectoriile de fază sînt drepte care trec prin origine; în asemenea situații, panta m a tangentei la traiectoria de fază

va trebui să coincidă, pe de o parte, chiar cu panta traiectoriei de fază, care va trebui să fie determinată în acest caz prin ecuaţia

$$u = mw \tag{29.69}$$

şi, pe de altă parte, cu panta p a izoclinei, determinată prin relaţia (29.68); rezultă astfel ecuaţia

$$m = -\frac{k^2}{m + 2\mu},$$

sau încă, ecuaţia de ordinul doi în m:

$$m^2 + 2\mu m + k^2 = 0, \tag{29.70}$$

cu rădăcinile

$$m_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - k^2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \tag{29.71}$$

După cum se observă, coincidenţa unora dintre izocline cu unele dintre traiectoriile de fază este posibilă numai în condiţiile

$$\mu^2 - k^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \geqslant 0. \tag{29.72}$$

Cu precizările de mai sus, se poate trece la examinarea diverselor forme concrete posibile ale traiectoriilor de fază corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu un grad de libertate, cu mişcarea descrisă prin ecuaţiile de stare (29.55).

Pentru a obţine traiectorii de fază cît mai uşor de construit, ele vor fi considerate, în cele ce urmează, într-un alt plan de fază, decît planul Owu, acesta fiind, de regulă, planul $\Omega\xi\eta$ al variabilelor ξ şi η definite prin transformarea liniară

$$\xi = \alpha w + \beta u; \quad \eta = \gamma w + \delta u, \tag{29.73}$$

cu coeficienţii transformării constanţi, ceea ce permite să se scrie următoarele relaţii între diferenţialele celor două serii de variabile

$$d\xi = \alpha dw + \beta du; \quad d\eta = \gamma dw + \delta du. \tag{29.74}$$

Pentru ca relaţiile (29.73) să permită şi transformarea inversă, este necesar să fie satisfăcută condiţia

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{29.75}$$

Ecuația traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$ va putea fi obținută direct, prin împărțirea celei de-a doua dintre ecuațiile (29.74) la prima, adică scriindu-se relația

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma dw+\delta du}{\alpha dw+\beta du}=\frac{\gamma+\delta\dfrac{du}{dw}}{\alpha+\beta\dfrac{du}{dw}},$$

care, prin considerarea și a ecuației (29.66), mai poate fi adusă la forma

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma-\delta\dfrac{\dfrac{c}{a}w+\dfrac{b}{a}u}{u}}{\alpha-\beta\dfrac{\dfrac{c}{a}w+\dfrac{b}{a}u}{u}}=\frac{-\delta\dfrac{c}{a}w+\left(\gamma-\delta\dfrac{b}{a}\right)u}{-\beta\dfrac{c}{a}w+\left(\alpha-\beta\dfrac{b}{a}\right)u}, \tag{29.76}$$

în care variabilele w și u din membrul drept vor putea fi înlocuite, în baza transformării (29.73), cu variabilele ξ și η.

Pentru a se obține o ecuație diferențială cît mai simplă posibilă a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$, se vor alege astfel coeficienții transformării încît să fie satisfăcute identitățile

$$\begin{aligned}&-\beta\frac{c}{a}w+\left(\alpha-\beta\frac{b}{a}\right)u\equiv\lambda\xi=\lambda\alpha w+\lambda\beta u;\\&-\delta\frac{c}{a}w+\left(\gamma-\delta\frac{b}{a}\right)u\equiv\mu\eta=\mu\gamma w+\mu\delta u,\end{aligned} \tag{29.77}$$

λ și μ fiind două constante, care, după caz, vor putea fi reale sau complexe și care vor putea fi determinate prin identificarea coeficienților variabilelor w și u din cei doi membri ai identităților precedente; rezultă astfel următoarele două sisteme de ecuații algebrice liniare omogene în necunoscutele α și β, respectiv γ și δ:

$$\lambda\alpha+\frac{c}{a}\beta=0;\qquad \mu\gamma+\frac{c}{a}\delta=0; \tag{29.78}$$

$$-\alpha+\left(\frac{b}{a}+\lambda\right)\beta=0;\qquad -\gamma+\left(\frac{b}{a}+\mu\right)\delta=0,$$

sisteme care vor admite soluții nebanale numai în cazul satisfacerii condițiilor

$$\begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{c}{a} \\ -1 & \dfrac{b}{a}+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0, \tag{29.79}$$

respectiv

$$\begin{vmatrix} \mu & \dfrac{c}{a} \\ -1 & \dfrac{b}{a}+\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \frac{b}{a}\mu + \frac{c}{a} = 0. \tag{29.80}$$

Este ușor de observat că valorile constantelor λ și μ determinate din ecuațiile precedente pot fi considerate drept rădăcini ale ecuației algebrice de gradul doi

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0, \tag{29.81}$$

coincizind, după cum se vede, cu ecuația caracteristică a sistemului vibrant, rădăcini avînd valorile

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \tag{29.82}$$

În cele ce urmează, se va conveni ca prima rădăcină să fie considerată ca valoare a constantei μ și a doua ca valoare a constantei λ, rezultînd astfel condițiile

$$\lambda = z_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}; \quad \mu = z_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \tag{29.83}$$

Se înțelege însă că discuțiile ce vor urma vor putea fi refăcute și pentru cazul $\lambda = z_1$ și $\mu = z_2$.

În condițiile satisfacerii relațiilor (29.79) și (29.80), în fiecare din sistemele (29.78) numai una din ecuații va fi distinctă; considerind prima din ecuații ca independetă, vor rezulta următoarele relații intre cele două serii de coeficienți ai transformării (29.73):

$$\beta = -\frac{a}{c}\lambda\alpha; \quad \delta = -\frac{a}{c}\mu\gamma, \tag{29.84}$$

α și γ putind fi luați arbitrar.

Este ușor de ințeles de aici că forma ecuației diferențiale a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$ va depinde de natura rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului vibrant liniar, putindu-se deosebi deci următoarele trei cazuri distincte:

— *Cazul I: Rădăcinile z_1 și z_2 sînt reale și distincte*, caz caracterizat prin condiția

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}>0. \tag{29.85}$$

Notind cu $z_1 = \gamma_1$ și $z_2 = \gamma_2$ cele două rădăcini ale ecuației caracteristice (25.112) și cu

$$n = \frac{r_1}{r_2} = \frac{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}}{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}} \tag{29.86}$$

raportul lor și ținind seama și de identitățile (29. 77), în baza cărora au fost determinate valorile constantelor λ și μ, se va putea retranscrie ecuația diferențială (29.76) sub forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\eta}{\xi} = \frac{r_1\eta}{r_2\xi} = n\frac{\eta}{\xi}$$

sau incă, sub forma

$$\frac{d\eta}{\eta} = n\frac{d\xi}{\xi}, \tag{29.87}$$

rezultind de aici, prin integrare, relația

$$\ln|\eta| = n\ln|\xi| + \ln|C|, \tag{29.88}$$

care, scrisă încă sub forma finală

$$\boxed{\eta = C\,|\xi|^{n}}\qquad(29.89)$$

va reprezenta ecuaţia finită a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$ în condiţiile (29.85).

În ceea ce priveşte soluţia generală a sistemului (29.55) de ecuaţii diferenţiale, ea va avea, în condiţiile (29.85), forma

$$w = C_{11}\,e^{r_1 t} + C_{12}\,e^{r_2 t}\,;\ u = C_{21}e^{r_1 t} + C_{22}e^{r_2 t},\qquad(29.90)$$

C_{11}, C_{12}, C_{21} şi C_{22} fiind constante de integrare.

Pentru aprecierea formei concrete a traiectoriei de fază definite prin ecuaţia (25.89) vor trebui luate în consideraţie următoarele trei subcazuri:

α) *Rădăcinile r_1 şi r_2 sînt ambele pozitive,* adică

$$r = \mu_1 > 0\,;\ r_2 = \mu_2 > 0,\qquad(29.91)$$

această situaţie fiind posibilă numai în condiţiile

$$b < 0\,;\ c > 0,\qquad(29.92)$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate obişnuită şi cu amortizare negativă.

În acest caz, raportul rădăcinilor r_1 şi r_2 ia valoarea

$$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = p,\qquad(29.93)$$

cu

$$p > 1.\qquad(29.94)$$

iar ecuaţia (29.89) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\eta = C\,|\xi|^{p},}\qquad(29.95)$$

reprezentînd o familie de curbe (Γ_p), de forma celor din fig. 29.8, tangente în origine la axa $\Omega\xi$, aşa cum rezultă din valoarea coeficientului unghiular al tangentelor duse în origine la aceste curbe, calculată mai jos:

$$m_0 = \left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = p\,C\,|\xi|^{p-1}\Big|_{\xi=0} = 0.\qquad(29.96)$$

Scanned with CamScanner

Situarea curbelor (Γ_p) într-un cadran sau altul al planului fazelor va depinde de semnul constantei C, deci de condițiile inițiale impuse mișcării sistemului vibrant considerat.

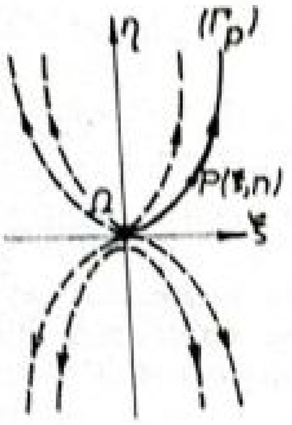


Fig. 29.8.

Întrucît în condițiile (29.91) factorii $e^{r_1 t} = e^{\mu_1 t}$ și $e^{r_2 t} = e^{\mu_2 t}$, care figurează în soluția generală (29.90), cresc nelimitat cu timpul, mișcarea sistemului vibrant va fi nestabilă; acest caracter de instabilitate a mișcării este reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(\xi, \eta)$ parcurge traiectoriile de fază îndepărtîndu-se mereu, pentru $t \to \infty$, de originea Ω a planului fazelor, origine purtînd în acest caz numele de *nod instabil*.

β) *Rădăcinile r_1 și r_2 sînt ambele negative*, adică

$$r_1 = -\mu_1 < 0; \quad r_2 = -\mu_2 < 0, \qquad (29.97)$$

situație posibilă numai în condițiile

$$b > 0; \quad C > 0, \qquad (29.98)$$

corespunzătoare sistemelor vibrante obișnuite, întîlnite în majoritatea aplicațiilor practice.

Pentru raportul rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului vibrant va rezulta acum valoarea

$$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = p, \qquad (29.99)$$

cu

$$0 < p < 1, \qquad (29.100)$$

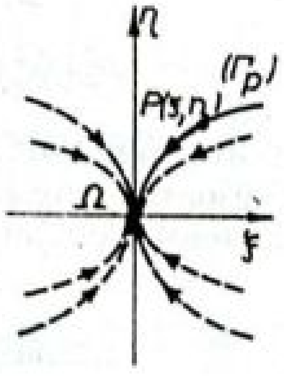


Fig. 29.9.

iar ecuația traiectoriei de fază va lua și acum forma

$$\boxed{\eta = C|\xi|^p}, \qquad (29.101)$$

reprezentînd de astă dată o familie de curbe (Γ_p) de forma celor din fig. 29.9, tangente în origine la axa $\Omega\eta$, așa cum rezultă din valoarea, calculată

mai jos, a coeficientului unghiular al tangentelor în acest punct la curbe:

$$m_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0} = pC|\xi|^{p-1}|_{\xi=0} = \left.\frac{pC}{|\xi|^{1-p}}\right|_{\xi=0} = \pm\infty. \quad (29.102)$$

Întrucît în condițiile (29.97) factorii $e^{r_1 t} = e^{-\mu_1 t}$ și $e^{r_2 t} = e^{-\mu_2 t}$, care figurează în soluția generală (29.90), tind spre zero pentru $t \to \infty$, mișcarea sistemului vibrant va fi stabilă; caracterul de stabilitate al acestei mișcări va fi reflectat în planul fazelor prin apropierea, pentru $t \to \infty$, a punctului reprezentativ $P(\xi, \eta)$ de originea Ω a planului, origine purtînd în acest caz numele de *nod stabil.*

γ) *Rădăcinile r_1 și r_2 sînt de semne contrare*, adică

$$r_1 = \mu_1 > 0;\ r_2 = -\mu_2 < 0, \quad (29.103)$$

această ultimă situație putînd fi întîlnită numai în condițiile

$$b \gtreqless 0;\ c < 0, \quad (29.104)$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate cu caracteristică negativă și cu amortizare pozitivă, negativă, sau chiar neglijabilă.

Pentru raportul r al rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului vibrant va rezulta în acest caz valoarea

$$r = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} = -p, \quad (29.105)$$

cu

$$p = 1 \quad (29.106)$$

în cazul neglijării amortizării, iar ecuația (29.89) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\eta = C|\xi|^{-p}}, \quad (29.107)$$

respectiv forma

$$\boxed{\xi\eta = C}, \quad (29.108)$$

Scanned with CamScanner

în condițiile neglijării amortizării, reprezentînd o familie de hiperbole (Γ_p), de forma celor din fig. 29.10, (hiperbole echilatere pentru $b = 0$).

Situarea traiectoriilor de fază în una, sau alta din perechile de cadrane ale planului fazelor va depinde și aici de semnul constantei C, deci de condițiile inițiale impuse mișcării sistemului vibrant.

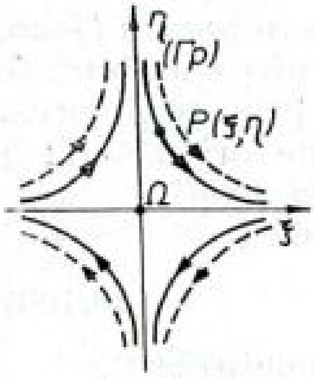


Fig.29.10.

Întrucît în condițiile (29.103) soluția generală (29.90) va conține un termen care va crește nelimitat cu timpul — termenul conținînd la exponentul lui e rădăcina pozitivă —, mișcarea sistemului vibrant va fi, evident, instabilă; acest caracter instabilal mișcării va fi reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ P(ξ, η), parcurgînd traiectoriile de fază, se îndepărtează continuu pentru $t \to \infty$, de originea planului, origine numită în acest caz *punct izolat*, sau *șa*.

— *Cazul II* : *Rădăcinile* z_1 *și* z_2 *sînt complexe conjugate*, corespunzător condiției

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} < 0, \tag{29.109}$$

pentru care rădăcinile ecuației (29.81) iau valorile

$$z_1 = r + ik^*;\ z_2 = r - ik^*, \tag{29.110}$$

cu

$$r = -\frac{b}{2a};\quad k^* = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}. \tag{29.111}$$

Așa cum rezultă din sistemele (29.78) de ecuații, în această situație și coeficienții transformării (29.73) vor fi complecși și deci că tot complexe vor fi și variabilele ξ și η.

Pentru a construi traiectoria de fază tot în planul real, va trebui efectuată o nouă schimbare de variabile, care să permită trecerea de la variabilele complexe ξ și η la două variabile reale X și Y.

Această schimbare de variabile va putea fi realizată observîndu-se că întrucît în relațiile (29.84) coeficienții α și γ sînt complecși

şi arbitrari, se va putea alege totdeauna coeficientul γ astfel incit să fie conjugatul lui $\alpha(\gamma = \overline{\alpha})$; este uşor de observat că in aceste condiţii coeficientul δ va deveni conjugatul lui β.

Într-adevăr, adoptind pentru coeficienţii α şi γ valorile arbitrare

$$\alpha = p + iq; \ \gamma = p - iq = \overline{\alpha}, \tag{29.112}$$

vor rezulta, din relaţiile (29.84), următoarele valori pentru ceilalţi doi coeficienţi ai transformării (29.73);

$$\beta = -\frac{a}{c} z_1 \alpha = -\frac{a}{c}(r + ik^*)(p + iq) = -\frac{a}{c}[(rp - k^*q) + \\ + i(rq + k^*p)], \tag{29.113}$$

respectiv

$$\delta = -\frac{a}{c} z_2 \gamma = -\frac{a}{c}(r - ik^*)(p - iq) = - \\ = -\frac{a}{c}[(rp - k^*q) - i(rq + k^*p)]. \tag{29.114}$$

În consecinţă, in aceste condiţii transformarea (29.73) va lua forma

$$\xi = \alpha w + \beta u; \ \eta = \overline{\alpha} w + \overline{\beta} u, \tag{29.115}$$

iar schimbarea de variabile care permite trecerea de la variabilele complexe ξ şi η la variabilele reale X şi Y va avea — lucru uşor de verificat — forma:

$$X = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad y = \frac{\xi - \eta}{2i}, \tag{29.116}$$

din care va rezulta şi transformarea inversă

$$\xi = X + iY; \ \eta = X - iY, \tag{29.117}$$

cu

$$d\xi = dX + i dY; \ d\eta = dX - i dY. \tag{29.118}$$

Scanned with CamScanner

Pe de altă parte, dacă se ține seama de faptul că și în acest caz sînt satisfăcute condițiile (29.77), care permit să se scrie și de astă dată ecuația diferențială (29.76) a traiectoriei de fază sub forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\eta}{\xi}, \tag{29.119}$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile (29.117) și (29.118) și de expresiile (29.110) ale celor două rădăcini, se va mai putea scrie

$$\frac{dX - i dY}{dX + i dY} = \frac{(r + ik^*)(X - iY)}{(r - ik^*)(X + iY)}. \tag{29.120}$$

Efectuînd calculele necesare, se va putea aduce ecuația precedentă la forma

$$dX(rY - k^*X) = dY(rX + k^*Y),$$

sau încă, scoțînd pe r și pe k^* în factori comuni și împărțind toți termenii ecuației prin $(X^2 + Y^2)$, se mai poate scrie

$$\frac{XdX + YdY}{X^2 + Y^2} = -\frac{r}{k^*}\frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \tag{29.121}$$

Este ușor de verificat că ultima ecuație mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{2} d \ln (X^2 + Y^2)] = d\left[-\frac{r}{k^*} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}\right], \tag{29.122}$$

rezultînd de aici, prin integrare, ecuația finită

$$\ln \sqrt{X^2 + Y^2}] = -\frac{r}{k^*} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} + \ln C = \ln\left[C e^{-\frac{r}{k^*} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}}\right],$$

sau încă

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = C e^{-\frac{r}{k^*} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}}. \tag{29.123}$$

Ultima ecuaţie a traiectoriei de fază din planul O^*XY va putea fi adusă la o formă care să permită aprecierea cu mai multă uşurinţă a tipului de traiectorie, efectuîndu-se trecerea de la coordonatele carteziene X şi Y la coordonatele polare ρ şi φ, adică efectuîndu-se în ecuaţia (29.123) înlocuirile

$$X = \rho \cos \varphi ; \quad Y = \rho \sin \varphi \tag{29.124}$$

şi deci

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \rho ; \quad \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} = \varphi, \tag{29.125}$$

înlocuiri care transformă ecuaţia menţionată în ecuaţia

$$\boxed{\rho = C\, e^{-\frac{r}{k^*}\varphi}}\,. \tag{29.126}$$

În ceea ce priveşte soluţia generală a sistemului (29.55) de ecuaţii diferenţiale, ea va avea, în condiţiile (29.110), forma

$$\begin{aligned} w &= C_{11}\, e^{z_1 t} + C_{12}\, e^{z_2 t} = e^{rt}\, [C_{11}\, e^{+k^* it} + C_{12}\, e^{-k^* it}]; \\ u &= C_{21}\, e^{z_1 t} + C_{22}\, e^{z_2 t} = e^{rt}\, [C_{21}\, e^{+k^* it} + C_{22}\, e^{-k^* it}], \end{aligned} \tag{29.127}$$

cu constantele de integrare complexe şi conjugate, adică de forma

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{2}(A_1 + iB_1); \quad C_{12} = \frac{1}{2}(A_1 - iB_1); \\ C_{21} &= \frac{1}{2}(A_2 + iB_2); \quad C_{22} = \frac{1}{2}(A_2 - iB_2). \end{aligned} \tag{29.128}$$

Este uşor de verificat, efectuîndu-se calculele necesare, că soluţia (29.127) mai poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} w &= e^{rt}[A_1 \cos(k^*t) - B_1 \sin(k^*t)] = e^{rt}\, C_1 \cos(k^*t + \alpha_1); \\ u &= e^{rt}[A_2 \cos(k^*t) - B_2 \sin(k^*t)] = e^{rt}\, C_2 \cos(k^*t + \alpha_2), \end{aligned} \tag{29.129}$$

cu

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2}; \quad C_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}; \\ \alpha_1 &= \operatorname{arc\,tg} \frac{B_1}{A_1}; \quad \alpha_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_2}{A_2}. \end{aligned} \tag{29.130}$$

Pentru stabilirea formei concrete a traiectoriei de fază definită prin ecuația (29.126) și pentru aprecierea modului de reflectare in planul fazelor a stabilității sau instabilității mișcării sistemului vibrant vor fi luate în considerație următoarele trei subcazuri :

α) *Rădăcinile z_1 și z_2 sînt pur imaginare*, adică

$$r = 0 \tag{29.131}$$

această situație putînd fi intîlnită numai în condițiile

$$b = 0\,;\; c > 0, \tag{29.132}$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate obișnuită ($c > 0$) și cu amortizare neglijabilă.

În condițiile precizate mai sus, ecuația (29.126) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\rho = C} \tag{29.133}$$

și va reprezenta o familie de cercuri concentrice, cu centrul in origine (fig. 29.11).

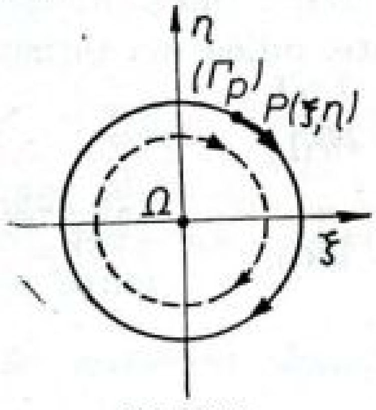


Fig.29.11.

De asemenea, in condițiile satisfacerii relației (29.131), soluția generală (29.129) va lua forma particulară

$$w = C_1 \cos(kt + \alpha_1)\,;\; u = C_2 \cos(kt + \alpha_2), \tag{29.134}$$

care evidențiază faptul că variabilele w și u vor lua numai valori cuprinse in intervalele $[-C_1; C_1]$, respectiv $[-C_2; C_2]$, dovedind astfel caracterul simplu stabil al mișcării sistemului vibrant; acest caracter simplu stabil al mișcării va fi reflectat in planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(X, Y) \equiv \equiv P(\rho, \varphi)$ parcurgînd traiectoriile de fază — curbe închise de astă dată — nu vor trece niciodată prin orginea planului fazelor, origine purtînd în acest caz numele de *focar central*, de *centru*, sau încă, numele de *turbion*.

β) *Rădăcinile z_1 și z_2 au partea reală pozitivă*, adică

$$r = \mu > 0, \tag{29.135}$$

situaţie posibilă numai în condiţiile

$$b<0\,; \quad c>0, \tag{29.136}$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate obişnuită şi cu anortizare nagativă.

În această situaţie, ecuaţia (29.126) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\rho = C\, e^{-\frac{\mu}{k^*}\varphi} = \frac{C}{e^{\frac{\mu}{k^*}\varphi}}} \tag{29.137}$$

şi va reprezenta o familie de spirale logaritmice (Γ_P), cu raza vectoare descrescătoare pentru φ crescător, (fig. 29.12).

În condiţiile (29.135), soluţia generală (29.129) va putea fi retranscrisă sub forma

$$w = e^{\mu t}\, C_1 \cos(k^*t + \alpha_1)\,;\ u = e^{\mu t}\, C_2 \cos(k^*t + \alpha_2), \tag{29.138}$$

care scoate în evidenţă creşterea nelimitată cu timpul a variabilelor w şi u, deci caracterul instabil al mişcării; acest caracter instabil al mişcării sistemului vibrant va fi reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(\rho, \varphi)$, parcurgînd traiectoriile de fază, se va îndepărta continuu, pentru $t \to \infty$, de originea planului fazelor, origine numită în aceste condiţiuni *focar instabil.*

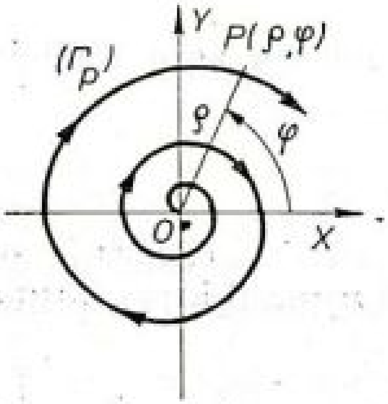


Fig. 29.12.

γ) *Rădăcinile* z_1 *şi* z_2 *au partea reală negativă*, adică

$$r = -\mu < 0, \tag{29.139}$$

o asemenea situaţie putînd fi intîlnită numai în condiţiile

$$b>0\,;\ c>0, \tag{29.140}$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate şi amortizare obişnuită.

În această ultimă situaţie, ecuaţia (29.126) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\rho = C\, e^{\frac{\mu}{k^*}\varphi}}\,. \tag{29.141}$$

Scanned with CamScanner

reprezentînd o familie de spirale logaritmice (Γ_ρ), cu raza vectoare crescătoare pentru φ crescător, (fig. 29.13).

Soluția generală (29.129) a sistemului (29.55) de ecuații diferențiale va lua, în condițiile (29.139), forma

$$w = e^{-\mu t}\, C_1 \cos(k^* t + \alpha_1)\,;\; u = e^{-\mu t}\, C_2 \cos(k^* t + \alpha_2), \qquad (29.142)$$

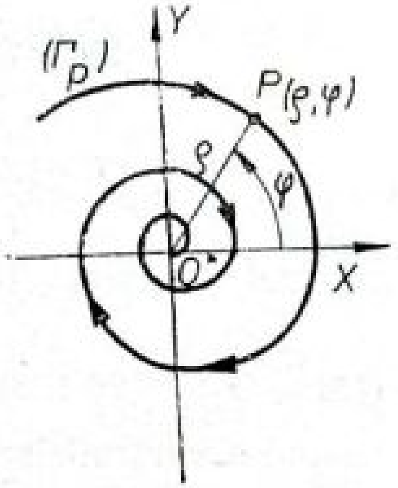


Fig. 29.13.

observîndu-se că pentru $t \to \infty$, variabilele w și u tind spre zero, fapt care atestă caracterul asimptotic stabil al mișcării sistemului vibrant; acest caracter stabil al mișcării va fi reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(\rho, \varphi)$, parcurgînd traiectoriile de fază, se apropie mereu, odată cu creșterea timpului, de originea planului fazelor, origine purtînd în aceste condițiuni numele de *focar stabil.*

— *Cazul III: Rădăcinile z_1 și z_2 sînt reale și confundate,* caz corespunzător condiției

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0, \qquad (29.143)$$

pentru care rădăcinile ecuației caracteristice (29.81) iau valoarea

$$z_1 = z_2 = r = -\frac{b}{2a}. \qquad (29.144)$$

Considerînd această valoare ca valoare a constantei λ în condițiile (29.77), prima dintre aceste condiții va lua forma

$$-\beta\frac{c}{a}w + \left(\alpha - \beta\frac{b}{a}\right)u \equiv \lambda\xi = r\xi = -\frac{b}{2a}(\alpha w + \beta u), \qquad (29.145)$$

conducînd, prin identificarea coeficienților variabilelor de stare din cei doi membri, la sistemul de ecuații

$$\frac{b}{2a}\alpha - \frac{c}{a}\beta = 0\,;\quad \alpha - \frac{b}{2a}\beta = 0, \qquad (29.146)$$

CS CamScanner
Scanned with CamScanner

ai căror coeficienţi ai necunoscutelor α şi β satisfac relaţia

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{2a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & -\frac{b}{2a} \end{vmatrix} = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0, \tag{29.147}$$

evidentă din condiţia (29.143).

Rezultă deci că numai prima dintre ecuaţiile (29.146) va fi distinctă — de ex., prima —, fapt care permite să se stabilească şi aici următoarea legătură între coeficienţii α şi β ai transformării (29.73):

$$\beta = \frac{b}{2c}\alpha, \tag{29.148}$$

cu una din necunoscutele α şi β arbitrare.

Adoptînd pentru α valoarea

$$\alpha = \frac{c}{a}, \tag{29.149}$$

rezultă pentru β valoarea

$$\beta = \frac{b}{2a} = -r. \tag{29.150}$$

Este uşor de observat acum că în această situaţie cea de-a doua dintre condiţiile (29.77) nu va mai putea fi folosită, deoarece prin considerarea ei determinantul coeficienţilor transformării (29.73) nu ar mai satisface condiţia (29.75).

Într-adevăr, dacă ar fi satisfăcută şi cea de-a doua dintre condiţiile (29.77), atunci între coeficienţii δ şi γ ai transformării va exista o relaţie de forma (29.84) — cu $\mu = r = -\frac{b}{2a}$ —, adică s-ar putea scrie

$$\delta = -\frac{a}{c}\left(-\frac{b}{2a}\right)\gamma = \frac{b}{2c}\gamma,$$

cu una din necunoscutele γ sau δ arbitrare.

Scanned with CamScanner

Luînd

$$\gamma = C,$$

se va putea exprima totdeauna constanta C ca un produs dintre o altă constantă, f, şi factorul $\frac{c}{a}$, adică se va putea scrie

$$\gamma = f\frac{c}{a}$$

şi deci

$$\delta = \frac{b}{2c}\cdot f\frac{c}{a} = f\frac{b}{2a}.$$

În această situaţie, determinantul coeficienţilor transformării (29.73) ar lua valoarea

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c}{a} & \frac{b}{2a} \\ f\frac{c}{a} & f\frac{b}{2a} \end{vmatrix} = 0,$$

care atestă nesatisfacerea condiţiei (29.75).

Rezultă de aici că în cazul rădăcinilor confundate ale ecuaţiei caracteristice a sistemului vibrant, cea de-a doua dintre condiţiile (29.77) va trebui înlocuită cu o alta, pentru care vor rezulta alte valori ale coeficienţilor γ şi δ, care nu vor mai satisface o relaţie de forma (29.84).

Cel mai simplu mod de a înlocui cea de-a doua dintre condiţiile (29.77) este acela de a se adopta valorile

$$\gamma = 0;\ \delta = 1, \tag{29.151}$$

pentru care este satisfăcută condiţia (29.75), aşa cum rezultă din şirul următor de relaţii:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c}{a} & \frac{b}{2a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{c}{a} \neq 0, \tag{29.152}$$

Scanned with CamScanner

iar transformarea (29.73) va lua forma particulară

$$\xi = \alpha w + \beta u = \frac{c}{a} w + \frac{b}{2a} u; \quad \eta = u. \tag{29.153}$$

În modul acesta, în timp ce numitorul din membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (29.76) ia, în baza condiţiei (29.145), valoarea $\varkappa\xi$, numărătorul aceluiaşi termen al ecuaţiei menţionate va avea, în baza condiţiilor (29.151), expresia

$$- \delta \frac{c}{a} w + \left(\gamma - \delta \frac{b}{a}\right) u = - \left(\frac{c}{a} w + \frac{b}{a} u\right) =$$

$$= - \left(\frac{c}{a} w + \frac{b}{2a} u\right) - \frac{b}{2a} u = - \xi - \frac{b}{2a} \eta = - \xi + r\eta. \tag{29.154}$$

În consecinţă, în această situaţie, ecuaţia diferenţială (29.76) va lua forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{r}, \tag{29.155}$$

reprezentînd, după cum se vede, o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi în funcţia $\eta = \eta(\xi)$, liniară şi neomogenă.

Considerînd mai întîi ecuaţia diferenţială omogenă corespunzătoare ecuaţiei (29.155), adică ecuaţia

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}, \tag{29.156}$$

sau încă

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{d\xi}{\xi}, \tag{29.157}$$

se obţine, prin integrarea ultimei, ecuaţia finită

$$\ln|\eta| = \ln|\xi| + \ln|C_1| = \ln|C_1\xi|,$$

care va mai putea fi scrisă încă sub forma

$$\eta = C_1\xi, \tag{29.158}$$

C_1 fiind, ca de obicei, o constantă de integrare.

Pentru a obține, în continuare, soluția generală a ecuației diferențiale (29.155) se va folosi metoda lui Lagrange, impunîndu-se condiția ca soluția (29.158), cu C_1 considerat însă ca funcție de variabila ξ, adică soluția

$$\eta = C_1(\xi)\xi, \tag{29.159}$$

cu

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dC_1}{d\xi}\xi + C_1(\xi), \tag{29.160}$$

să verifice ecuația (29.155); rezultă astfel egalitatea

$$\frac{dC_1}{d\xi}\xi + C_1(\xi) = C_1(\xi) - \frac{1}{r}, \tag{29.161}$$

care va conduce la o nouă ecuație diferențială, de astă dată în funcția $C_1(\xi)$, de forma

$$dC_1(\xi) = -\frac{1}{r}\frac{d\xi}{\xi}, \tag{29.162}$$

cu soluția

$$C_1(\xi) = -\frac{1}{r}\ln|\xi| + C, \tag{29.163}$$

C fiind constanta finală de integrare.

Înlocuirea expresiei (29.163) în relația (29.159) conduce la următoarea ecuație finită a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$, corespunzătoare condiției (29.143):

$$\boxed{\eta = -\frac{1}{r}\xi\ln|\xi| + C\xi} \tag{29.164}$$

În ceea ce privește soluția generală a sistemului (29.55) de ecuații diferențiale, ea va avea, în condițiile (29.143), forma

$$w = (C_{11} + C_{12}t)e^{rt}; \quad u = (C_{21} + C_{22}t)e^{rt}. \tag{29.165}$$

Scanned with CamScanner

C_1 fiind, ca de obicei, o constantă de integrare.

Pentru a obține, în continuare, soluția generală a ecuației diferențiale (29.155) se va folosi metoda lui Lagrange, impunîndu-se condiția ca soluția (29.158), cu C_1 considerat însă ca funcție de variabila ξ, adică soluția

$$\eta = C_1(\xi)\xi, \tag{29.159}$$

cu

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dC_1}{d\xi}\xi + C_1(\xi), \tag{29.160}$$

să verifice ecuația (29.155); rezultă astfel egalitatea

$$\frac{dC_1}{d\xi}\xi + C_1(\xi) = C_1(\xi) - \frac{1}{r}, \tag{29.161}$$

care va conduce la o nouă ecuație diferențială, de astă dată în funcția $C_1(\xi)$, de forma

$$dC_1(\xi) = -\frac{1}{r}\frac{d\xi}{\xi}, \tag{29.162}$$

cu soluția

$$C_1(\xi) = -\frac{1}{r}\ln|\xi| + C, \tag{29.163}$$

C fiind constanta finală de integrare.

Înlocuirea expresiei (29.163) în relația (29.159) conduce la următoarea ecuație finită a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$, corespunzătoare condiției (29.143):

$$\boxed{\eta = -\frac{1}{r}\xi\ln|\xi| + C\xi}. \tag{29.164}$$

În ceea ce privește soluția generală a sistemului (29.55) de ecuații diferențiale, ea va avea, în condițiile (29.143), forma

$$w = (C_{11} + C_{12}t)e^{rt}; \quad u = (C_{21} + C_{22}t)e^{rt}. \tag{29.165}$$

Pentru aprecierea formei concrete a traiectoriei de fază corespunzătoare acestei situaţii, vor trebui luate în consideraţie următoarele două subcazuri:

α) *Rădăcina dublă r este pozitivă*, adică

$$r = \mu > 0, \tag{29.166}$$

acest subcaz putînd fi întîlnit numai în condiţiile

$$b < 0; \quad c > 0, \tag{29.167}$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu rigiditate obişnuită şi cu amortizare negativă.

În această situaţie, ecuaţia finită (29.164) a traiectoriei de fază din planul $\Omega\xi\eta$ va lua forma

$$\boxed{\eta = -\frac{1}{\mu}\xi \ln|\xi| + C\xi} \tag{29.168}$$

şi va reprezenta o familie de curbe de forma celor din fig. 29.14, tangente în origine la axa $\Omega\eta$ ($d\eta/d\xi|_{\xi=0} = \infty$).

Situarea acestor curbe de o parte sau de alta a axei $\Omega\eta$ depinde de semnul constantei C, deci de condiţiile iniţiale impuse mişcării sistemului vibrant.

În cazul satisfacerii condiţiei (29.166) soluţia generală (29.165) a sistemului (29.55) de ecuaţii diferenţiale va lua forma

$$w = (C_{11} + C_{12}t)e^{\mu t}; \quad u = (C_{21} + C_{22}t)e^{\mu t}, \tag{29.169}$$

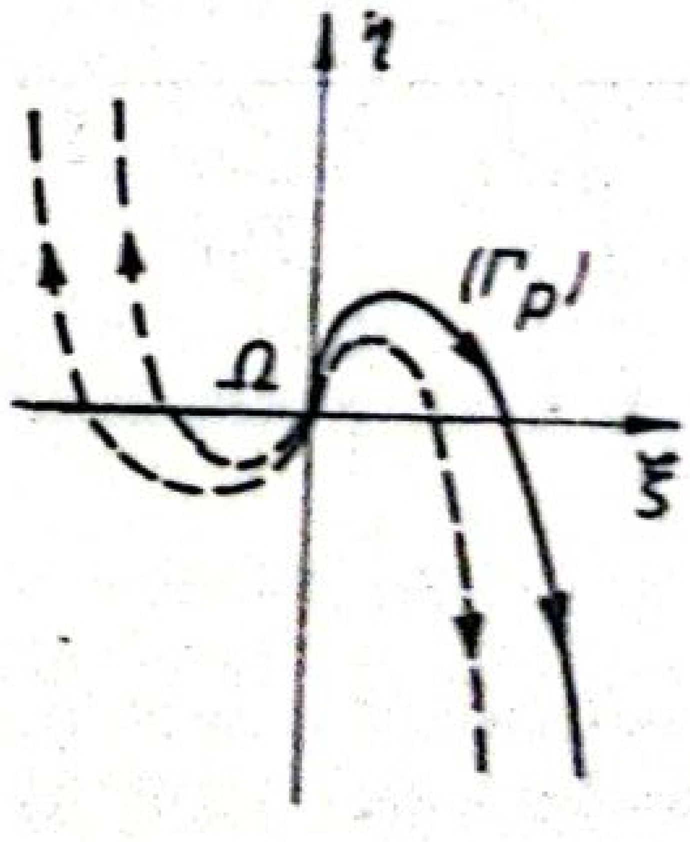


Fig. 29.14.

cu variabilele w şi u crescînd nelimitat cu timpul, ceea ce arată că mişcarea sistemului vibrant este în aceste condiţiuni instabilă; caracterul instabil al mişcării este reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(\xi, \eta)$ parcurgînd traiectoriile de fază, se îndepărtează continuu, pentru $t \to \infty$, de originea planului, origine purtînd şi în această situaţie denumirea de *nod instabil*.

β) *Rădăcina dublă r este negativă*, adică

$$r = -\mu < 0, \tag{29.170}$$

această ultimă situație putînd fi întîlnită numai în condițiile

$$b > 0\,;\ c > 0, \tag{29.171}$$

corespunzătoare sistemelor vibrante liniare întîlnite în mod obișnuit în aplicațiile practice.

În condițiile precizate mai sus, ecuația (29.164) a traiectoriei de fază va lua forma

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\mu}\,\xi \ln|\xi| + C\xi} \tag{29.172}$$

și va reprezenta o familie de curbe (Γ_P) de forma celor din fig. 29.15, tangente în origine la axa $\Omega\eta$; situarea curbelor de o parte, sau de alta, a axei $\Omega\eta$, va depinde și acum de semnul constantei C, deci de condițiile inițiale impuse mișcării sistemului vibrant liniar considerat.

În condițiile (29.171), soluția generală (29.165) a sistemului (29.55) de ecuații diferențiale va lua forma

$$w = (C_{11} + C_{12}t)e^{-\mu t}\,; \quad u = (C_{21} + C_{22}\,t)\,e^{-\mu t}, \tag{29.173}$$

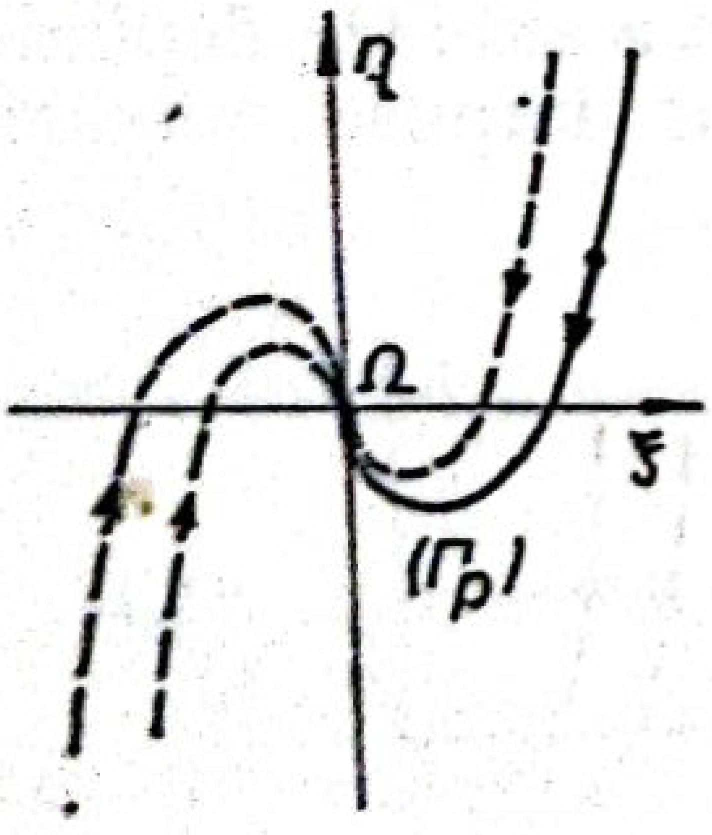


Fig. 29.15.

cu factorii $e^{-\mu t}$ și $te^{-\mu t}$ tinzînd ambii către zero pentru $t \to \infty$, ceea ce evidențiază caracterul asimptotic stabil al mișcării sistemului vibrant; acest caracter stabil este reflectat în planul fazelor prin aceea că punctul reprezentativ $P(\xi, \eta)$, parcurgînd traiectoriile de fază, se apropie mereu, pentru $t \to \infty$, de originea planului, origine numită și aici *nod stabil*.

Concluziile privind legătura dintre caracterul originii planului fazelor ca punct singular al traiectoriilor de fază și caracteristicile generalizate dinamice ale sistemului vibrant liniar pot fi recapitulate în tabelul de mai jos:

I. $\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a} > 0\,;$ $\begin{cases} b < 0\,;\ c > 0 & \textit{nod instabil} \\ b > 0\,;\ c > 0 & \textit{nod stabil} \\ b \lesseqgtr 0\,;\ c < 0 & \textit{şa}\,; \end{cases}$

$$\text{II.}\quad \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}<0;\ \begin{cases} b=0; & c>0 \quad \textit{centru (focar central)}\\ b<0; & c>0 \quad \textit{focar instabil}\\ b>0; & c>0 \quad \textit{focar stabil;}\end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=0;\ \begin{cases} b<0; & c>0 \quad \textit{nod instabil}\\ b>0; & c>0 \quad \textit{nod stabil.}\end{cases}$$

De asemenea, din analiza efectuată, pot fi trase următoarele concluzii privind studiul caracterului mişcării unui sistem vibrant liniar cu ajutorul traiectoriilor de fază:

— mişcarea sistemului vibrant liniar este asimptotic stabilă atunci cînd originea planului fazelor este un nod stabil, sau un focar stabil, al traiectoriilor de fază, adică atunci cînd acestea din urmă au una din formele de figurile 29.9, 29.15 sau 29.13;

— mişcarea sistemului vibrant liniar este simplu stabilă atunci cînd originea planului fazelor este un centru al traiectoriilor de fază, adică atunci cînd acestea din urmă sînt curbe închise de forma celor din fig. 29.11;

— mişcarea sistemului vibrant este instabilă, atunci cînd originea planului fazelor este un nod instabil, un focar instabil, sau o şa, adică atunci cînd traiectoriile de fază au una din formele din figurile 29.8, 29.14, 29.12, sau 29.10.

În legătură cu construcţia traiectoriilor de fază din planul $\Omega\xi\eta$ mai trebuie făcută observaţia că în cazul transformării (29.73) pot fi adoptate şi alte condiţii pentru coeficienţii transformării decît cele reprezentate prin relaţiile (29.77) sau (25.153); în aceste situaţii, traiectoriile de fază vor avea forme întrucîtva modificate, fără însă ca prin aceasta să se modifice şi proprietatea lor de a indica, prin modul de parcurgere a lor de către punctul reprezentativ $P(\xi, \eta)$, caracterul stabil, sau instabil, al mişcării.

De asemenea, mai trebuie precizat faptul că de foarte multe ori rămîne totuşi mai avantajoasă construcţia traiectoriilor de fază în planul *Owu*.

Astfel, în cazul rădăcinilor reale ale ecuaţiei caracteristice a sistemului vibrant, ecuaţia traiectoriei de fază din planul *Owu*, obţinută prin eliminarea timpului între ecuaţiile finite ale mişcării, reprezentînd soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale (25.55), va avea forma

$$\boxed{u-r_2 w = C(u-r_1 w)^n}, \tag{29.174}$$

Scanned with CamScanner

unde n reprezintă şi acum raportul (29.86) al rădăcinilor ecuației caracteristice.

Ecuația (29.174) va lua următoarele forme particulare:

— forma

$$\boxed{u = \mu_2 w = C(u - \mu_1 w)^n}, \tag{29.175}$$

(cu $n > 1$) pentru cazul rădăcinilor reale şi pozitive ($r_1 = \mu_1 > 0$; $r_2 = \mu_2 > 0$), traiectoria de fază corespunzătoare acestei situații fiind reprezentată în fig. 29.16;

— forma:

$$\boxed{u + \mu_2 w = C(u + \mu_1 w)^n}, \tag{29.176}$$

(cu $n < 1$) pentru cazul rădăcinilor reale şi negative ($r_1 = -\mu_1 < 0$; $r_2 = -\mu_2 < 0$), cu traiectoria de fază corespunzătoare reprezentată în fig. 29.17;

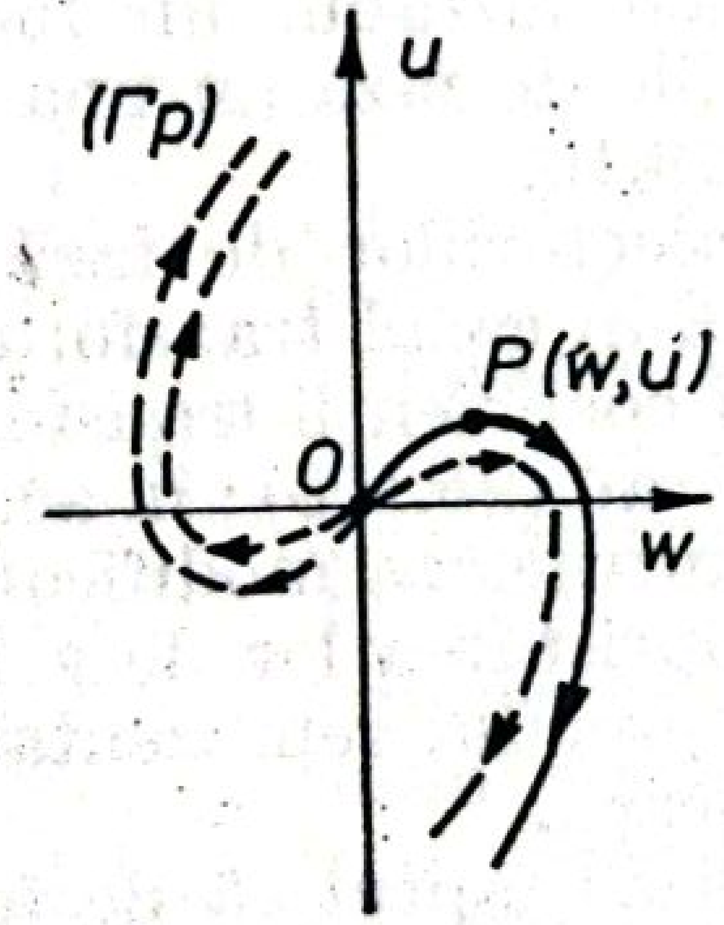


Fig.29.16.

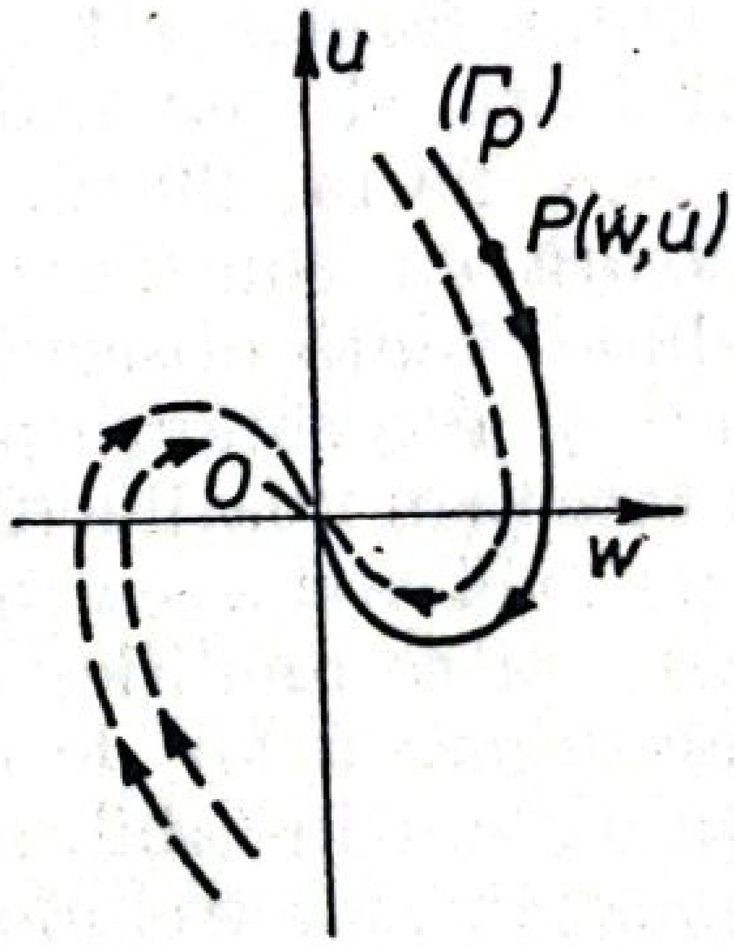


Fig.29.17.

— forma:

$$\boxed{u^2 - \mu^2 w^2 = C}, \tag{29.177}$$

pentru cazul cînd rădăcinile sînt de mărimi egale şi de semne contrare ($r_1 = \mu > 0$; $r_2 = -\mu < 0$), traiectoria de fază corespunzătoare acestei situații fiind reprezentată în fig. 29.18.

Scanned with CamScanner

De asemenea, în cazul rădăcinilor complexe conjugate, ecuaţia traiectoriei de fază din planul Owu va putea fi scrisă sub următoarea formă vectorială generală

$$\boxed{\bar{R} = w\bar{i}_w + u\bar{i}_u = e^{rt}[\bar{R}_1 \cos(k^*t) + \bar{R}_2 \sin(k^*t)]}, \quad (29.178)$$

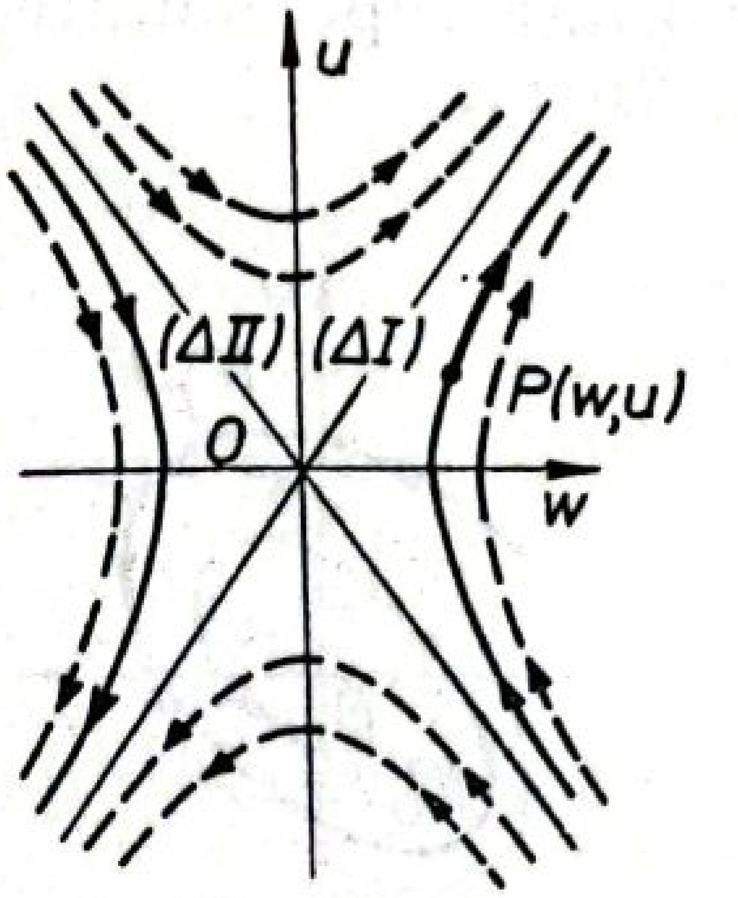


Fig. 29.18.

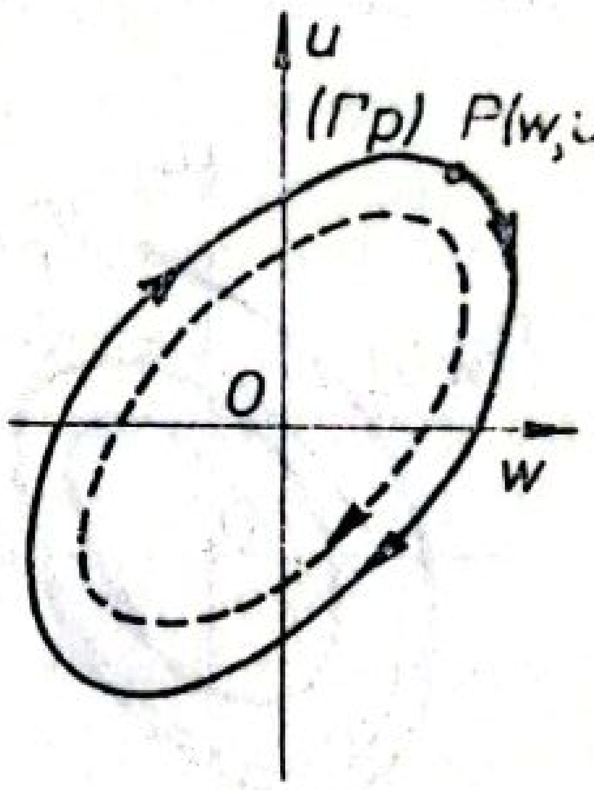


Fig. 29.19.

unde $\bar{i}_w$ şi $\bar{i}_u$ sînt versorii axelor Ow şi Ou, $\bar{R}_1$ şi $\bar{R}_2$ sînt doi vectori constanţi de integrare depinzînd de condiţiile iniţiale, iar r şi k^* sînt, ca de obicei, partea reală şi partea imaginară a rădăcinilor complexe.

Ecuaţia (29.178) capătă următoarele forme particulare:

— forma:

$$\boxed{\bar{R} = \bar{R}_1 \cos(kt) + \bar{R}_2 \sin(kt)}, \quad (29.179)$$

pentru cazul rădăcinilor pur imaginare ($r = 0$; $k^* = k$), cu traiectoriile de fază reprezentate prin o familie de elipse cu centrul în origine (fig. 29.19). (Cu ajutorul unei schimbări convenabile de variabilă, elipsele vor putea fi raportate chiar la axele lor);

— forma:

$$\boxed{\bar{R} = e^{\mu t}[\bar{R}_1 \cos(k^*t) + \bar{R}_2 \sin(k^*t)]}, \quad (29.180)$$

în cazul rădăcinilor complexe cu partea reală pozitivă ($r = \mu > 0$), cu traiectoriile de fază reprezentate printr-o familie de spirale de forma celor din fig. 29.20;

— forma:

$$\boxed{\bar{R} = e^{-\mu t}\left[\bar{R}_1 \cos(k^* t) + \bar{R}_2 \sin(k^* t)\right]}, \tag{29.181}$$

în cazul rădăcinilor complexe cu partea reală negativă $(r = -\mu < 0)$, cu traiectoriile de fază corespunzătoare reprezentate prin o familie de spirale de forma celor din fig. 29.21.

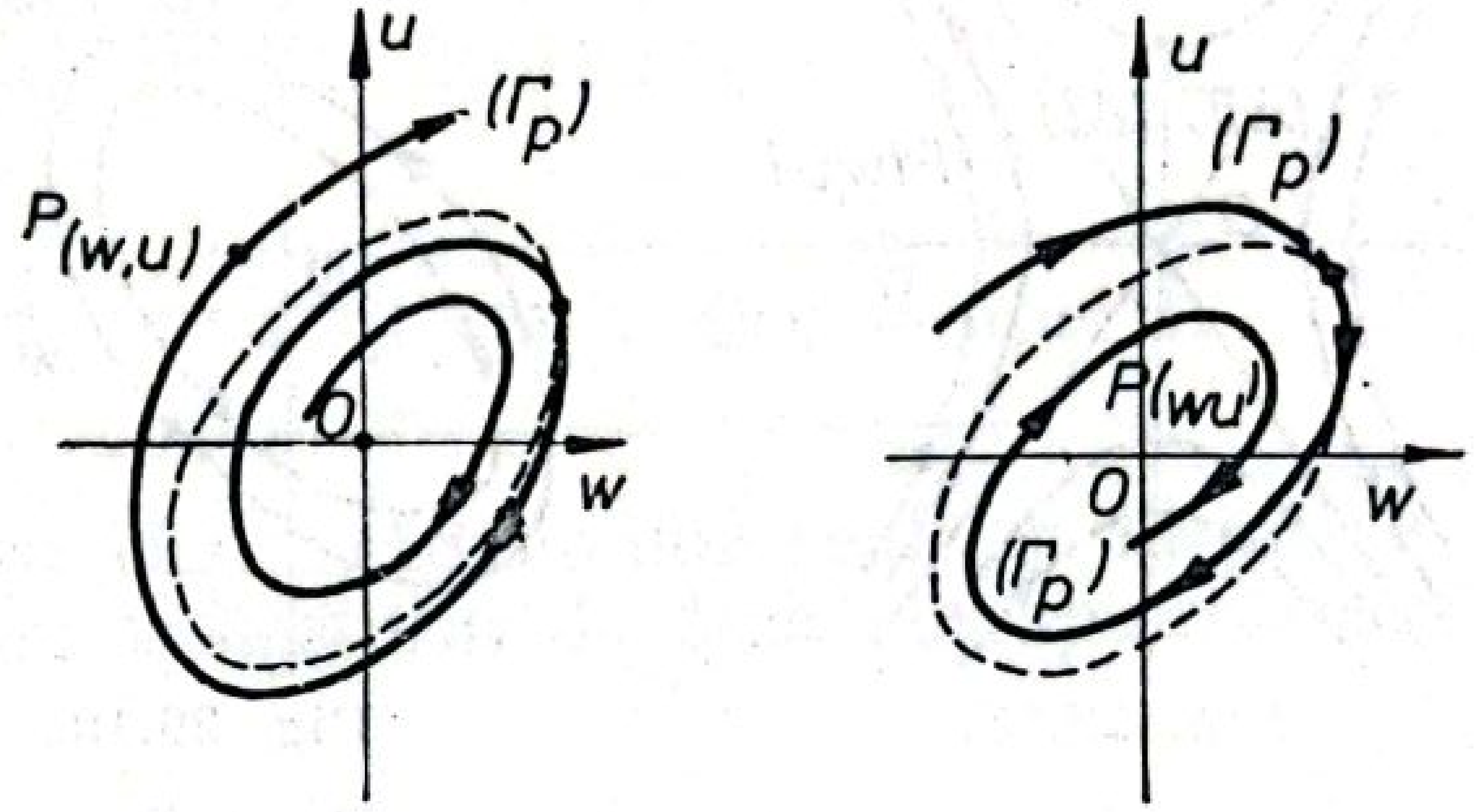


Fig.29.20. Fig.29.21.

În încheierea prezentării metodei topologice de studiere a stabilității mișcării sistemelor vibrante liniare, se va mai face observația că pentru această categorie de sisteme vibrante există 5 tipuri distincte de traiectorii de fază și anume:

— Taiectorii de fază deschise de tip cvasiparabolic, de forma celor din figurile (29.8), (29.9), (29.16) și (29.17);

— traiectorii de fază deschise de tip hiperbolic, de forma celor din figurile (29.10) și (29.18);

— traiectorii de fază închise — cercuri sau elipse —, cum sînt cele din figurile (29.11) și (29.19;)

— traiectorii deschise de tip spiralic, cum sînt cele din figurile (29.12), (29.13), (29.20) și (29.21);

— traiectorii de fază deschise de forma celor reprezentate în figurile (29.14) și (29.15).

Se va arăta ulterior că în cazul sistemelor vibrante neliniare va exista și un al șaselea tip de traiectorii de fază, reprezentate prin familii de drepte care trec prin originea planului fazelor.

Scanned with CamScanner

29.1.2. *Studiul stabilităţii sistemelor vibrante autonome neliniare*

Trecînd la analiza stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare autonome, trebuie de făcut de la început precizarea că extinderea — în baza concluziilor 1° şi 2° ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, prezentate la începutul paragrafului —, a metodelor de studiere a stabilităţii elaborate pentru sistemele vibrante liniare, la studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare este posibilă numai pentru condiţii iniţiale care nu îndepărtează sensibil sistemul vibrant din poziţia sa de echilibru static; pentru condiţii iniţiale crespunzătoare unor poziţii mai îndepărtate de poziţia de echilibru static este posibil ca mişcarea sistemului vibrant să capete aspecte de instabilitate, chiar dacă soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare asociat este stabilă.

Rezultă de aici că în cazul sistemelor vibrante neliniare caracterul stabil, sau instabil, al mişcării depinde nu numai de caracterul soluţiei generale a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare asociat, ci şi de valoarea condiţiilor iniţiale şi că, în consecinţă, studiul stabilităţii mişcării unui asemenea sistem vibrant prin metodele folosite pentru sistemele vibrante liniare va trebui efectuat numai în cazul cînd datele iniţiale permit utilizarea acestor metode.

În ipoteza că aceste condiţii privind datele iniţiale sînt satisfăcute, se va considera, ca de obicei, numai cazul sistemelor vibrante neliniare autonome cu un singur grad de libertate, ($r = 1$), a căror mişcare este descrisă de o ecuaţie diferenţială de forma (26.21), adică

$$\ddot{w} + G(w, \dot{w}) = 0, \tag{29.182}$$

care, prin introducerea variabilei

$$\dot{w} = u, \tag{29.183}$$

va putea fi înlocuită cu următorul sistem de ecuaţii de stare

$$\dot{w} = u; \ \dot{u} = -G(w, u) = U(w, u). \tag{29.184}$$

Efectuîndu-se o dezvoltare a funcţiei $U(w, u)$ analogă dezvoltărilor făcute anterior, sistemul precedent de ecuaţii diferenţiale va mai putea fi scris sub forma

$$\dot{w} = u; \ \dot{u} = Aw + Bu + V(w, u), \tag{29.185}$$

cu coeficienții A și B avînd semnificațiile

$$A = A_{11} = \left(\frac{\partial U}{\partial w}\right)_0 ; \quad B = A_{12} = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)_0 , \tag{29.186}$$

Sistemul de ecuații diferențiale liniare asociat sistemului (29.185) va avea deci forma

$$\dot{w} = u ; \quad \dot{u} = Aw + Bu, \tag{29.187}$$

analoagă formei (29.55) a sistemului de ecuații de stare corespunzătoare sistemelor vibrante liniare.

În consecință, efectuîndu-se înlocuirile

$$-k^2 = -\frac{c}{a} \to A ; \quad -2\mu = -\frac{b}{a} \to B,$$

toate concluziile privind stabilitatea soluției generale a sistemului de ecuații de stare corespunzătoare sistemelor vibrante liniare cu un grad de libertate, prezentate în subpunctele precedente, vor rămîne valabile și pentru soluția generală a sistemului (29.187) de ecuații diferențiale liniare, asociat sistemului (29.185) de ecuații de stare; considerarea apoi a concluziilor 1° și 2° ale teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale ordinare, menționate la începutul paragrafului, va permite să se tragă concluzii și în legătură cu stabilitatea, sau instabilitatea, mișcării reale a sistemului vibrant neliniar, mișcare descrisă prin ecuații de stare (29.185).

1°. Studiul stabilității mișcării sistemelor vibrante neliniare prin metoda algebrică. Adoptînd, pentru sistemul (29.187) de ecuații diferențiale liniare, o soluție particulară de forma

$$w = C_1 e^{zt} ; \quad u = C_2 e^{zt} \tag{29.187*}$$

și impunînd condiția ca această soluție să verifice sistemul, se obține, după simplificarea prin e^{zt}, următorul sistem de ecuații algebrice liniare omogene în constantele arbitrare C_1 și C_2:

$$-zC_1 + C_2 = 0 ; \quad AC_1 + (B - z)C_2 = 0, \tag{29.188}$$

cu coeficienții necunoscutelor satisfăcînd, pentru a exista o soluție nebanală a sistemului, condiția

$$\Delta = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ A & B - z \end{vmatrix} = 0, \tag{29.189}$$

sau încă

$$z^2 - Bz - A = 0, \tag{29.190}$$

această ecuaţie caracteristică fiind identică cu ecuaţia deja întîlnită dacă se fac înlocuirile

$$A = -a_2; \; B = -a_1. \tag{29.191}$$

În baza primei dintre cele trei concluzii privind stabilitatea mişcării unui sistem vibrant liniar, prezentate în subpunctul 29.1.1.1. al paragrafului, rezultă că soluţia generală a sistemului (29.187) de ecuaţii diferenţiale liniare va fi asimptotic stabilă atunci cînd rădăcinile ecuaţiei caracteristice (29.190), avînd expresiile

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left[B \pm \sqrt{B^2 + 4A}\right] \tag{29.192}$$

vor fi fie reale şi negative, fie complexe conjugate cu partea reală negativă; se verifică cu uşurinţă că aceste situaţii vor putea fi întîlnite numai în următoarele condiţii pentru coeficienţii A şi B:

$$A < 0; \; B < 0. \tag{29.193}$$

identice, dacă se ţine seama de notaţiile (29.191), cu condiţiile (29.35), stabilite pe baza aplicării criteriului de stabilitate Routh-Hurwitz.

Pe baza concluziilor 1° şi 2°, menţionate la începutul paragrafului ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, se va putea trage concluzia că mişcarea reală a sistemului vibrant neliniar, descrisă prin ecuaţiile de stare (29.185), va fi şi ea stabilă numai în cazul satisfacerii condiţiilor (29.193); dacă condiţiile nu sînt respectate şi $B \neq 0$, mişcarea sistemului vibrant neliniar va fi în mod cert instabilă.

2°. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare prin metoda topologică. Plecîndu-se fie de la ecuaţiile parametrice finite

$$w = w(t); \; u = u(t), \tag{29.194}$$

obţinute prin integrarea sistemului (29.187) de ecuaţii diferenţiale liniare asociat sistemului de ecuaţii de stare (29.185), fie de la ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} = \frac{Aw + Bu}{u}, \tag{29.195}$$

obținută prin împărțirea celei de-a doua dintre ecuațiile diferențiale liniare (29.187) la prima, se va putea construi în planul de fază Owu, sau $\Omega\xi\eta$, prin una din metodele menționate în subpunctul 1.1.2°. al paragrafului, traiectoria de fază corespunzătoare sistemului vibrant liniarizat, adică cu mișcarea descrisă prin sistemul asociat (29.187) de ecuații diferențiale.

În baza primei dintre concluziile teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale ordinare menționate la începutul paragrafului, se va putea afirma că mișcarea sistemului vibrant neliniar, descrisă prin ecuațiile de stare (29.185) și satisfăcînd restricțiile menționate privind datele inițiale, va fi asimptotic stabilă numai în următoarele două situații :

— *Cînd originea planului fazelor este un nod stabil*, această situație putînd fi întîlnită în următoarele două cazuri :

— în cazul cînd ecuația caracteristică (29.190) admite rădăcini reale și negative, caz care corespunde condițiilor

$$B < 0;\ A < 0;\ B^2 + 4A > 0 \qquad (29.196)$$

și pentru care traiectoria de fază are forma din fig. 29.9.

— în cazul cînd ecuația caracteristică admite o rădăcină dublă negativă, caz corespunzător condițiilor

$$B < 0;\ A < 0;\ B^2 + 4A = 0 \qquad (29.197)$$

și pentru care traiectoria de fază are forma din fig. 29.15.

— *Cînd originea planului de fază este un focar stabil*. Această de a doua situație corespunde numai cazului rădăcinilor complexe conjugate cu partea reală negativă ale ecuației caracteristice (29.190) și va putea fi întîlnită numai în condițiile

$$B < 0;\ A < 0;\ B^2 + 4A < 0, \qquad (29.198)$$

iar traiectoria de fază corespunzătoare acestor condiții va avea forma din fig. 29.13.

În cazul nesatisfacerii condițiilor (29.193) — care se repetă, de altfel, și în seturile (29.196), (29.197) și (29.198) de condiții —, originea planului de fază va fi, pentru $B \neq 0$, fie un nod instabil, fie un focar instabil, fie o șa, fapt care va atesta caracterul instabil, al soluției sistemului (29.187) de ecuații diferențiale liniare și deci, în baza celei de-a doua dintre concluziile teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale ordinare, și caracterul instabil al mișcării sistemului vibrant neliniar, mișcare descrisă prin ecuațiile de stare (29.185).

În legătură cu posibilitatea extinderii metodei topologice la studiul stabilităţii mişcării unui sistem vibrant neliniar, mai trebuie menţionat faptul că în unele situaţii este posibil ca ecuaţiile de stare ale unui asemenea sistem să aibă forma generală (29.9), respectiv (29.10), cu sistemul asociat de ecuaţii diferenţiale liniare de forma (29.11); în această situaţie, ecuaţia diferenţială a traiectoriei de fază, obţinută prin împărţirea celei de-a doua dintre ecuaţiile (29.11) la prima, va lua forma

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{A_{21}u_1 + A_{22}u_2}{A_{11}u_1 + A_{12}u_2}. \tag{29.199}$$

Repetîndu-se şi de astă dată calculele efectuate în subpunctul 29.1.1.2°, se vor putea regăsi şi acum cele cinci tipuri distincte de traiectorii de fază, întîlnite şi la sistemele vibrante liniare; în plus, pentru condiţiile

$$A_{11} = A_{22} = 1;\ A_{12} = A_{21} = 0, \tag{29.200}$$

va putea fi înregistrat şi un al şaselea tip de traiectorie de fază, specific sistemelor vibrante neliniare, reprezentat printr-un fascicul de drepte trecînd prin originea planului fazelor.

Într-adevăr, în această situaţie ecuaţia diferenţială (29.199) a traiectoriei de fază va lua forma particulară

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2}{u_1}, \tag{29.201}$$

care, scrisă încă sub forma

$$\frac{du_2}{u_2} = \frac{du_1}{u_1}, \tag{29.202}$$

va conduce, prin integrare, la ecuaţia finită

$$\ln|u_2| = \ln|u_1| + \ln C,$$

sau încă

$$\boxed{u_2 = C\,u_1}, \tag{29.203}$$

această din urmă ecuație reprezentînd un fascicul de drepte trecînd prin origine și de pantă egală cu constanta de integrare C (fig. 29.22), pantă depinzînd deci de condițiile inițiale impuse mișcării sistemului vibrant considerat.

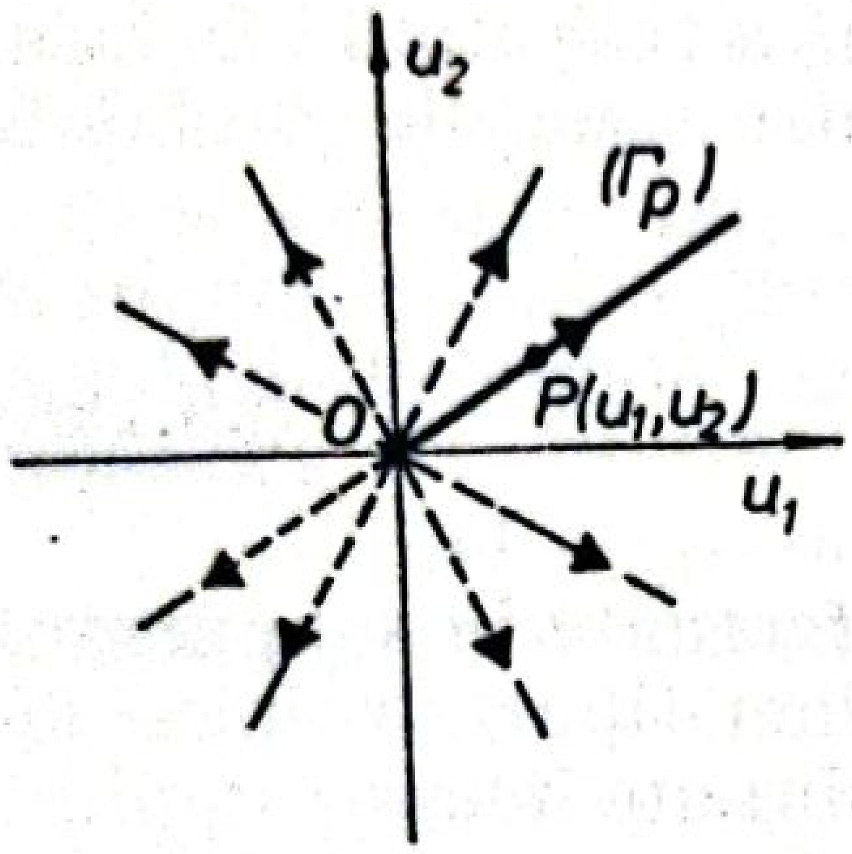


Fig. 29.22.

Nu este greu de verificat că soluția generală a sistemului (29.11) de ecuații diferențiale, sistem care va lua, în condițiile (29.200), forma particulară

$$\dot{u}_1 = u_1 ;\ \dot{u}_2 = u_2, \tag{29.204}$$

va avea forma

$$u_1 = C_1 e^t ;\ u_2 = C_2 e^t, \tag{29.205}$$

cu ambele variabile de stare crescînd nelimitat cu timpul pentru $t \to \infty$, fapt care evidențiază caracterul instabil al soluției (29.205) și deci și al mișcării sistemului vibrant neliniar; acest caracter instabil al mișcării va fi reflectat în planul fazelor Ou_1u_2 prin aceea că punctul reprezentativ $P(u_1, u_2)$ se îndepărtează continuu, pentru $t \to \infty$, de originea planului, (fig. 29.22).

3°. Cicluri limită. Revenind la cazul sistemelor vibrante neliniare care se deplasează din poziții inițiale mai îndepărtate de pozițiile de echilibru static și deci pentru care pot apărea aspecte de instabilitate a mișcării chiar atunci cînd sistemul de ecuații diferențiale liniare asociat admite o soluție stabilă, se face mențiunea că metoda cea mai comodă de studiere a stabilității mișcării în aceste situații rămîne tot metoda topologică, construindu-se traiectoria de fază corespunzătoare mișcării reale a sistemului vibrant, traiectorie a cărei ecuație diferențială, obținută prin împărțirea celei de-a doua dintre ecuațiile de stare (29.185) la prima, va avea forma

$$\frac{du}{dw} = \frac{Aw + Bu + V(w, u)}{u}. \tag{29.206}$$

Uneori este posibil ca pentru anumite condiții inițiale, sistemul (29.185) de ecuații de stare să admită o soluție periodică, cu aceeași perioadă a variabilelor de stare, în care situație traiectoria de fază corespunzătoare acelor condiții inițiale va fi o curbă închisă (Γ_{P_0}),

trasată prin linie continuă în fig. 29.23, această curbă — obişnuit eliptică — împărţind planul fazelor în două subdomenii, unul exterior şi altul interior curbei; pentru alte poziţii iniţiale, aflate în unul din cele două subdomenii separate prin curba (Γ_{P_0}), traiectoriile de fază vor putea avea forme spiralice care să se apropie asimptotic de curba (Γ_{P_0}) — curbele (Γ'_{P_1}) şi (Γ'_{P_2}) trasate prin linii şi puncte în fig. 29.23 —, sau să se îndepărteze continuu de curba (Γ_{P_0}) — curbele (Γ''_{P_1}) şi (Γ''_{P_2}), trasate prin linii întrerupte în fig. 29.23.

Curba (Γ_{P_0}) poartă în acest caz numele de *ciclu limită* şi acest ciclu poate fi de următoarele trei tipuri:

— *Ciclu limită stabil*, cînd traiectoriile de fază corespunzătoare poziţiilor iniţiale din ambele subdomenii tind asimptotic spre curba (Γ_{P_0}), (fig. 29.24, a), acest tip de ciclu limită corespunde unei mişcări simplu stabile a sistemului vibrant.

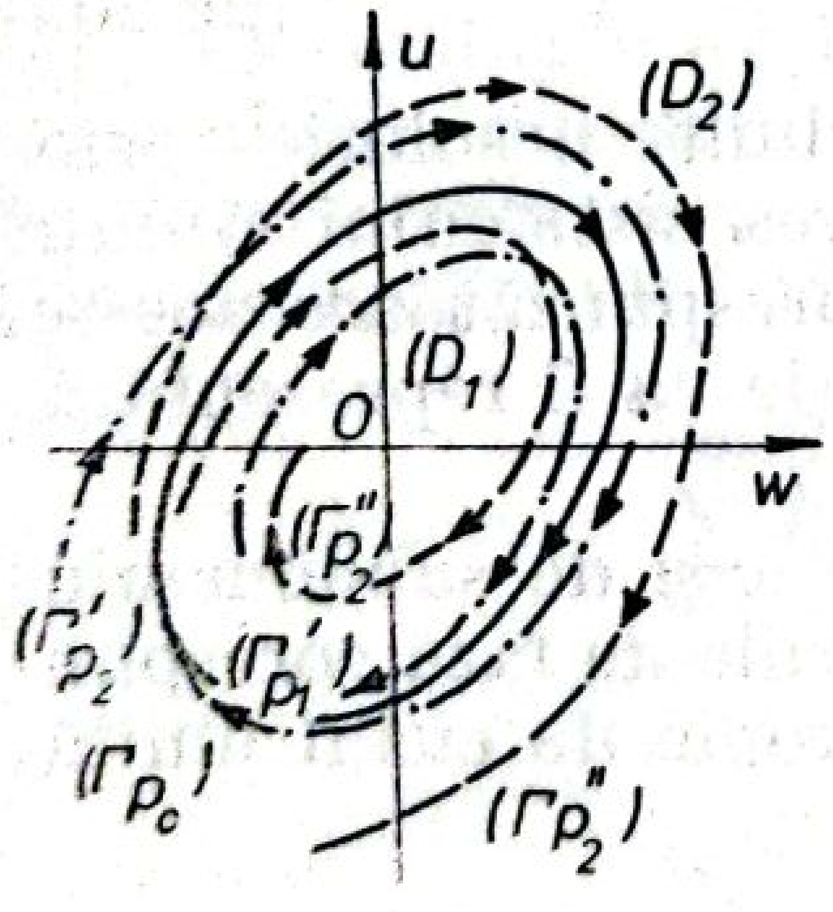


Fig. 29.23.

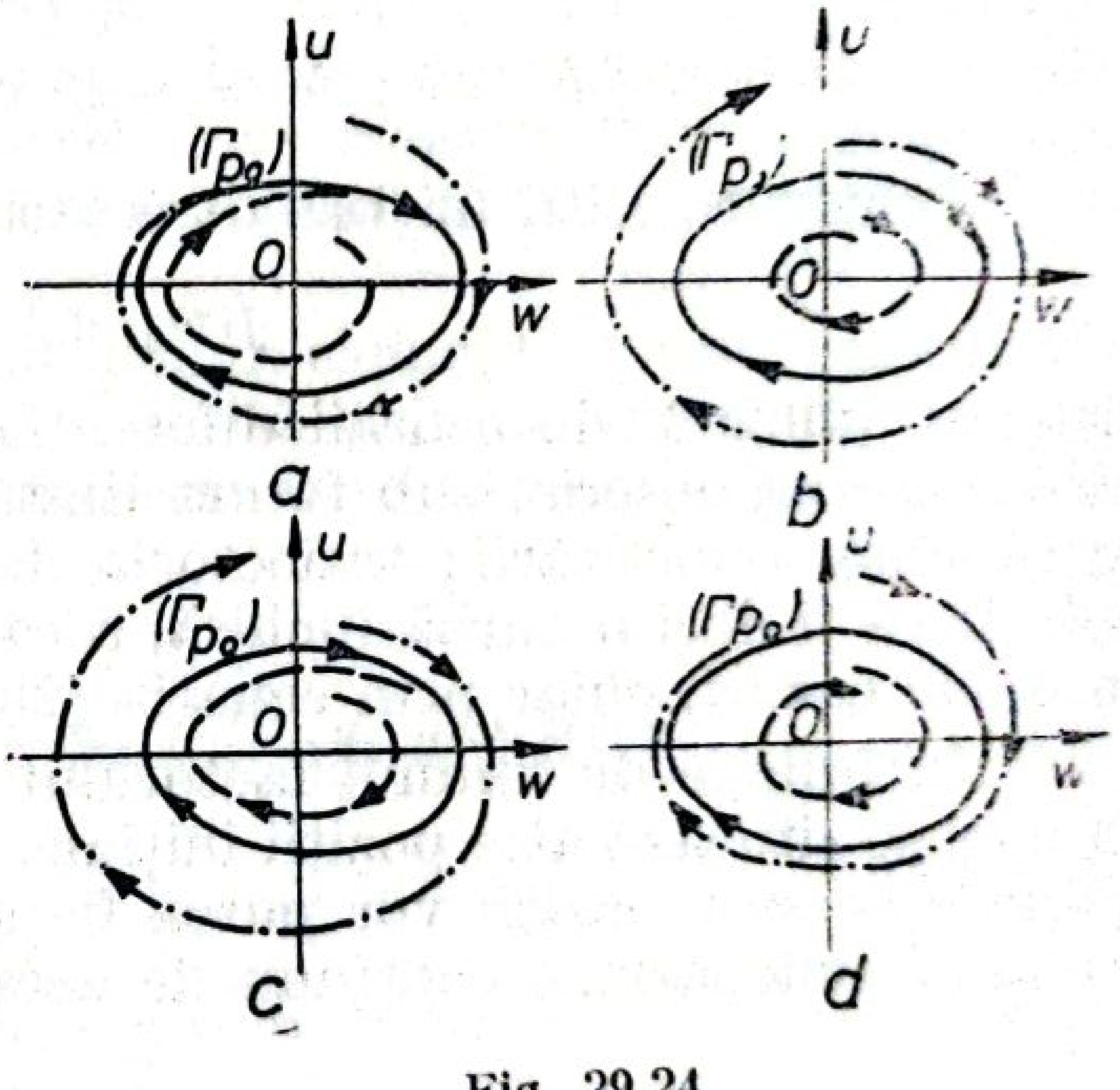


Fig. 29.24.

— *Ciclu limită instabil*, cînd traiectoriile de fază corespunzătoare poziţiilor iniţiale din ambele subdomenii ale planului fazelor se îndepărtează continuu de ciclul limită, fig. 29.24, b; acest tip de ciclu corespunde unei mişcări asimptotic stabilă în subdomeniul interior curbei (Γ_{P_0}) şi unei mişcări instabile în subdomeniul exterior.

— *Ciclu limită semistabil*, cînd traiectoriile de fază corespunzătoare poziţiilor iniţiale dintr-un subdomeniu se apropie asimptotic de ciclul limită, iar cele corespunzătoare poziţiilor iniţiale din cel

de-al doilea subdomeniu se îndepărtează continuu de ciclul limită, (fig. 29.24, c şi d); această ultimă situaţie reflectă existenţa unor mişcări simplu stabile într-unul din subdomenii şi a unor mişcări instabile în cel de-al doilea subdomeniu.

Originea planului fazelor este considerată ca un *ciclu limită degenerat*, corespunzînd unor mişcări stabile, sau instabile, numai în exterior.

Asemenea situaţii cu evoluţii în cicluri limită pot fi întîlnite în cazul sistemelor vibrante neliniare, cu neliniaritatea datorată numai amortizării, deci cu mişcarea descrisă de o ecuaţie de forma

$$\ddot{w} + \mu f(w, \dot{w})\dot{w} + k^2 w = 0, \tag{29.207}$$

unde $f(w,\dot{w})$ este funcţia care modelează neliniaritatea amortizării.

Prin introducerea variabilei $\dot{w} = u$, ecuaţia diferenţială (29.207) va putea fi înlocuită cu următorul sistem de ecuaţii de stare:

$$\dot{w} = u\,; \quad \dot{u} = -\mu f(w, u)u - k^2 w. \tag{29.208}$$

Pentru condiţii iniţiale care satisfac condiţia

$$f(w_0, u_0) = 0, \tag{29.209}$$

sistemul (29.208) de ecuaţii diferenţiale va admite o soluţie periodică, care va descrie, sub forma finită, mişcarea sistemului vibrant în absenţa amortizării; traiectoria de fază corespunzătoare acestei soluţii va fi deci o curbă închisă, a cărei ecuaţie va fi reprezentată, în unele cazuri, chiar prin ecuaţia (29.209).

În funcţie de semnul factorului numeric μ şi de subdomeniul în care se situează alte poziţii iniţiale, traiectoriile de fază corespunzătoare acestor poziţii vor putea fie să se apropie de ciclul limită, fie să se îndepărteze continuu de acesta.

29.2. *Studiul stabilităţii mişcărilor sistemelor vibrante neautonome*

După cum s-a mai spus, în cazul sistemelor vibrante neautonome apariţia aspectelor de instabilitate a mişcărilor se datorează funcţionării sistemelor în condiţii apropiate de cele ale rezonanţei de un ordin oarecare şi studiul stabilităţii mişcării unui asemenea

sistem implică stabilirea dependenţei dintre amplitudinile diverşilor termeni ai soluţiei ce descrie mişcarea forţată a sistemului vibrant şi pulsaţia excitaţiei, aceasta din urmă fiind, de regulă, o solicitare armonică aplicată unuia din elementele sistemului vibrant.

Întrucît principalele metode de studiere a stabilităţii mişcării sînt distincte pentru cele două categorii de sisteme vibrante neautonome — liniare şi neliniare —, se impune prezentarea separată a lor, prezentare care va fi făcută în cele ce urmează.

29.2.1. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neautonome liniare

1°. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante liniare neautonome cu ajutorul diagramei Nyquist. Principala metodă de studiere a stabilităţii mişcării sistemelor vibrante liniare neautonome este aceea a construcţiei *diagramei funcţiei de transfer*, sau a *diagramei Nyquist*, a unui sistem vibrant liniar excitat armonic, funcţie ce va fi definită în continuare.

În condiţiile excitării unui singur element al unui sistem vibrant liniar, mişcarea lui va fi descrisă prin sistemul de ecuaţii de stare, sistem care va fi retranscris în continuare, prin izolarea primei ecuaţii, sub forma

$$-\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, u_j = -\dot{u}_1 + E_{11}u_1 + I_1 f(t);$$

$$\dot{u}_h - \sum_{j=2}^{2r} E_{hj}\, u_j = E_{h1}\, u_1 + I_h f(t). \tag{29.210}$$

$$(h = 2, 3, \ldots, 2r).$$

Se va arăta mai întîi că acest sistem de $2r$ ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, de ordinul întîi în cele $2r$ funcţii necunoscute de timp reprezentate prin variabilele de stare u_i, ($i = 1, 2, \ldots, 2r$), poate fi înlocuit cu o singură ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, de ordinul 2r, într-o singură funcţie necunoscută de timp, reprezentată prin una, oarecare, — de exemplu, prin prima — dintre variabilele de stare.

Într-adevăr, prin derivarea succesivă în raport cu timpul a sistemului (29.210) de ecuații de stare, de la derivata de ordinul întîi pînă la derivata de ordinul $2r - 1$, se obțin următoarele $(2r - 1)$ sisteme de cîte $2r$ ecuații:

$$-\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, u_j^{(k)} = -\, u_1^{(k+1)} + E_{11}\, u_1^{(k)} + I_1 f^{(k)}(t); \quad (29.211)$$

$$u_h^{(k+1)} - \sum_{j=2}^{2r} E_{hj}\, u_j^{(k)} = E_{h1}\, u_1^{(k)} + I_h\, f^{(k)}(t),$$

$$(h = 2, 3, \ldots, 2r;\ k = 1, 2, \ldots, 2r - 1),$$

cu următoarele semnificații pentru expresiile $u_j^{(k)}$ și $f^{(k)}(t)$:

$$u_j^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k u_j}{\mathrm{d}t_k};\ f^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}, \quad (29.212)$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, 2r;\ k = 1, 2, \ldots, 2r - 1).$$

Este ușor de verificat că prin introducerea notațiilor

$$u_j^{(0)} \equiv u_j;\ f^{(0)}(t) \equiv f(t), \quad (29.213)$$

ansamblul format din sistemele (29.210) și (29.211), conținînd un număr total de

$$N_e = 2r + 2r(2r - 1) = 4r^2 \quad (29.214)$$

ecuații, poate fi retranscris sub următoarea formă concentrată:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, u_j^{(k)} &= -\, u_1^{(k+1)} + E_{11}\, u_1^{(k)} + I_1 f^{(k)}(t); \\ u_h^{(k+1)} - \sum_{j=2}^{2r} E_{hj}\, u_j^{(k)} &= E_{h1}\, u_1^{(k)} + I_h\, f^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (29.215)$$

$$(h = 2, 3, \ldots, 2r;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2r - 1).$$

Izolînd, din sistemul precedent, numai prima dintre ecuațiile (29.215) corespunzătoare valorii $k = 2r - 1$, adică ecuația

$$-\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, u_j^{(2r-1)} = -\, u_1^{(2r)} + E_{11}\, u_1^{(2r-1)} + I_1 f^{(2r-1)}(t), \quad (29.216)$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

restul de $4r^2 - 1$ ecuații vor forma un nou sistem, care va putea fi scris sub forma

$$\begin{aligned} &- \sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, u_j^{(l)} = -\, u_1^{(l+1)} + E_{11}\, u_{11}^{(l)} + I_1 f^{(l)}(t)\,; \\ &u_h^{(k+1)} - \sum_{j=2}^{2r} E_{hj}\, u_j^{(k)} = E_{h1}\, u_1^{(k)} + I_h\, f^{(k)}(t). \end{aligned} \tag{29.217}$$

$(l = 0, 1, 2, \ldots, 2r - 2\,;\ h = 2, 3, \ldots, 2r\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2r-1)$.

Acest din urmă sistem va putea fi considerat însă ca un sistem de $(4r^2 - 1)$ ecuații algebrice liniare neomogene în $(4r^2 - 1)$ necunoscute, reprezentate prin mărimile $u_h^{(k)}$, $(h = 2, 3, \ldots, 2r\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2r)$.

Întrucît determinantul format din coeficienții acestor necunoscute din sistemul (29.217) este, în general, diferit de zero, acest sistem va putea fi rezolvat în raport cu necunoscutele menționate mai sus, care vor putea fi exprimate astfel ca funcții liniare de mărimile $u_1^{(\lambda)}$ și $f^{(\lambda)}(t)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2r - 1)$, adică prin relații de forma

$$u_j^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{2r-1} \alpha_{j\lambda}^{k}\, u_1^{(\lambda)} + \sum_{\lambda=0}^{2r-1} \beta_{j\lambda}^{k} f^{(\lambda)}(t), \tag{29.218}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, 2r\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2r),$$

cu coeficienții $\alpha_{j\lambda}^{k}$ și $\beta_{j\lambda}^{k}$ depinzînd numai de mărimile E_{hj} și I_h, deci constanți.

Pentru valoarea $k = 2r - 1$, relația (29.218) ia forma

$$u_j^{(2r-1)} = \sum_{\lambda=0}^{2r-1} \alpha_{j\lambda}^{2r-1}\, u_1^{(\lambda)} + \sum_{\lambda=0}^{2r-1} \beta_{j\lambda}^{2r-1} f^{(\lambda)}(t) \tag{29.219}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, 2r)$$

și deci introducerea acestor expresii în relația (29.216) va conduce la egalitatea

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=2}^{2r} E_{1j} \left(\sum_{\lambda=0}^{2r-1} \alpha_{j\lambda}^{2r-1}\, u_1^{(\lambda)} + \sum_{\lambda=0}^{2r-1} \beta_{j\lambda}^{k} f^{(\lambda)}(t) \right) = \\ &= -\, u_1^{(2r)} + E_{11}\, u_1^{(2r-1)} + I_1 f^{(2r-1)}(t), \end{aligned}$$

sau încă, trecînd termenii ce conțin derivatele lui u_1 în membrul stîng și pe cei ce conțin derivatele funcției $f(t)$ în membrul drept, se mai poate scrie

$$u_1^{(2r)} - E_{11}\, u_1^{(2r-1)} - \sum_{\lambda=0}^{2r-1}\left(\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \alpha_{j\lambda}^{2r-1}\right) u_1^{(\lambda)} = I_1\, f^{(2r-1)}(t) +$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{2r-1}\left(\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \beta_{j\lambda}^{2r-1}\right) f^{(\lambda)}(t). \qquad (29.220)$$

Ordonînd termenii din membrul stîng al ultimei relații după ordinul derivatelor în raport cu timpul ale variabilei de stare u_1 și termenii din membrul drept după ordinul derivatelor în raport cu timpul ale funcției $f(t)$ — ultimele fiind mărimi cunoscute —, ecuația (29.220) va mai putea fi adusă, revenindu-se și la notațiile obișnuite ale derivatelor, la următoarea formă finală

$$\sum_{k=0}^{2r} A_k \frac{\mathrm{d}^k u_1}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{2r-1} B_k \frac{\mathrm{d}^k f(t)}{\mathrm{d}t^k}, \qquad (29.221)$$

cu coeficienții

$$A_h = -\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \alpha_{jh}^{2r-1};\quad A_{2r-1} = -E_{11}\sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \alpha_{j,2r-1}^{2r-1};\quad A_{2r} = 1$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots, 2r-2) \qquad (29.222)$$

și

$$B_h = \sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \beta_{jh}^{2r-1};\quad B_{2r-1} = I_1 + \sum_{j=2}^{2r} E_{1j}\, \beta_{j,2r-1}^{2r-1}$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots, 2r-2) \qquad (29.223)$$

constanți.

Datorită totalei echivalențe a ecuației diferențiale (29.221) cu sistemul (29.210) de ecuații de stare, studiul stabilității mișcării sistemului vibrant considerat va putea fi efectuat plecîndu-se și de la ecuația (29.221), așa cum se va proceda mai jos.

Aplicînd transformarea Fourier ambilor membri ai ecuației (29.221), se obține, extinzînd la cazul derivatelor de un ordin oare-

care proprietăţile acestei transformări ($\mathcal{F}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = (ip)^k \mathcal{F}[f(t)]$), egalitatea

$$\left(\sum_{k=0}^{2r} A_k(ip)^k\right)\mathcal{U}(p) = \left[\sum_{k=0}^{2r-1} B_k(ip)^k\right]\mathcal{F}(p), \qquad (29.224)$$

sau încă

$$\mathcal{U}(p) = \frac{\sum_{k=0}^{2r-1} B_k(ip)^k}{\sum_{k=0}^{2r} A_k(ip)^k}\mathcal{F}(p), \qquad (29.225)$$

în care prin

$$\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}[f(t)] \text{ şi } \mathcal{U}(p) = \mathcal{F}[u_1(t)]$$

au fost notate transformatele Fourier ale excitaţiei şi răspunsului, numite încă, respectiv, *transformata Fourier a mărimii de intrare* $f(t)$ şi *transformata Fourier a mărimii de ieşire* $u_1(t)$.

Funcţia conplexă $\overline{H}(ip)$, definită prin relaţia

$$\overline{H}(ip) = \frac{\sum_{k=0}^{2r-1} B_k(ip)^k}{\sum_{k=0}^{2r} A_k(ip)^k} = H(p)e^{i\varphi(p)}, \qquad (29.226)$$

cu

$$H(p) = |\overline{H}(ip)| = \sqrt{[\mathrm{Re}\,(\overline{H}(ip))]^2 + [\mathrm{Im}\,(\overline{H}(ip))]^2};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,[\overline{H}(ip)]}{\mathrm{Re}\,[\overline{H}(ip)]}, \qquad (29.227)$$

este numită *funcţie de răspuns în frecvenţă*, sau *funcţie de transfer*, a sistemului vibrant liniar considerat.

Prin introducerea notaţiei (29.226), relaţia (29.225) va putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\mathcal{U}(p) = \overline{H}(ip)\,\mathcal{F}(p)} \qquad (29.228)$$

și va reprezenta *ecuația de răspuns a sistemului vibrant liniar.*

Este ușor de înțeles din ultima relație că în cazul înregistrării unor valori mari ale funcției de transfer vor rezulta și valori mari ale mărimii de ieșire, deci manifestarea unor aspecte de instabilitate a mișcării sistemului vibrant liniar considerat.

Se va demonstra, în continuare, că variabila p din expresia funcției de transfer $\overline{H}(ip)$ este chiar pulsația excitației $f(t)$, atunci cînd aceasta din urmă este armonică, adică de forma

$$f(t) = f_0 \sin (pt), \tag{29.229}$$

situație întîlnită curent în tehnica vibrațiilor, fie în testările la vibrații ale utilajelor și structurilor elastice, fie în încercările de identificare a sistemelor vibrante.

Într-adevăr, în această situație ecuația (29.221) va lua forma

$$\sum_{k=0}^{2r} A_k \frac{d^k}{dt^k} (u_1) = \sum_{k=0}^{2r-1} B_k \frac{d_k}{dt^k} [f_0 \sin(pt)] \tag{29.230}$$

și determinarea soluției ei particulare, corespunzătoare răspunsului în regim permanent, va putea fi făcută prin metoda complexă.

Considerînd deci o a doua excitație armonică, de forma

$$f^*(t) = f_0 \cos (pt), \tag{29.231}$$

aplicată în aceleași condiții ca și excitația (29.229), mișcarea sistemului vibrant considerat va fi descrisă acum prin ecuația diferențială

$$\sum_{k=0}^{2r} A_k \frac{d^k}{dt^k} (u_1^*) = \sum_{k=0}^{2r-1} B_k \frac{d^k}{dt^k} [f_0 \cos (pt)], \tag{29.232}$$

unde u_1^* este funcția care va exprima evoluția variabilei de stare u_1 în condițiile noii excitații.

Înmulțind ecuația (29.230) cu numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$ și adăugînd-o, astfel înmulțită, ecuației (29.232), se obține egalitatea

$$\sum_{k=0}^{2r} A_k \frac{d^k}{dt^k} [u_1^* + iu_1] = \sum_{k=0}^{2r-1} B_k \frac{d^k}{dt^k} [f_0 (\cos(pt) + i \sin (pt)],$$

sau încă, introducînd variabila de stare complexă

$$\zeta_1 = u_1^* + iu_1 \tag{29.233}$$

şi excitaţia complexă

$$\overline{\Phi}(\mathrm{i}p) = f_0[\cos(pt) + \mathrm{i}\sin(pt)] = f_0 e^{\mathrm{i}pt}, \qquad (29.234)$$

se mai poate scrie următoarea ecuaţie diferenţială complexă

$$\sum_{k=0}^{2r} A_k \frac{\mathrm{d}^k \zeta_1}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{2r-1} B_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}[f_0 e^{\mathrm{i}pt}]. \qquad (29.235)$$

Cunoaşterea soluţiei particulare ζ_{if} a acestei ecuaţii diferenţiale neomogene va permite să se determine şi soluţia particulară corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (29.230), ea fiind dată de relaţia

$$u_{1f} = \mathrm{Im}\,\zeta_{1f}. \qquad (29.236)$$

După cum se ştie, soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (29.235) va avea forma

$$\zeta_{1f} = C_1 e^{\mathrm{i}pt}, \qquad (29.237)$$

C_1 reprezentînd o constantă, care va putea fi determinată impunîndu-se condiţia ca soluţia (29.237) să verifice ecuaţia (29.235); rezultă astfel egalitatea

$$\left[\sum_{k=0}^{2r} A_k(\mathrm{i}p)^k\right] C_1 e^{\mathrm{i}pt} = \left[\sum_{k=0}^{2r-1} B_k(\mathrm{i}p)^k\right] f_0 e^{\mathrm{i}pt}, \qquad (29.238)$$

din care, după simplificarea prin $e^{\mathrm{i}pt}$, se va obţine valoarea constantei C_1:

$$C_1 = \frac{\sum_{k=0}^{2r-1} B_k(\mathrm{i}p)^k}{\sum_{k=0}^{2r} A_k(\mathrm{i}p)^k} f_0, \qquad (29.239)$$

Se observă deci că această constantă este direct proporţională cu funcţia de transfer definită prin relaţia (29.226), putîndu-se scrie deci relaţiile

$$C_1 = \overline{H}(\mathrm{i}p)f_0 = H(p)e^{\mathrm{i}\varphi(p)}f_0 \qquad (29.240)$$

şi

$$\zeta_{1f} = \overline{H}(\mathrm{i}p)f_0 e^{\mathrm{i}pt} = \overline{H}(\mathrm{i}p)\Phi(\mathrm{i}p) = H(p)f_0 e^{\mathrm{i}(pt+\varphi)}, \qquad (29.241)$$

din ultima rezultînd consecinţa

$$u_{1f} = \mathrm{Im}\,\zeta_{1f} = f_0 H(p)\sin(pt+\varphi) = u_1^0 \sin(pt+\varphi), \qquad (29.224)$$

cu

$$u_1^0 = f_0 H(p) \qquad (29.243)$$

reprezentînd amplitudinea răspunsului.

Se poate trage deci concluzia că funcţia de transfer a unui sistem vibrant furnizează prin modulul ei

$$|\overline{H}(\mathrm{i}p)| = H(p) = \frac{u_1^0}{f_0}, \tag{29.244}$$

raportul dintre amplitudinea răspunsului şi amplitudinea excitaţiei şi prin argumentul ei

$$\arg[\overline{H}(\mathrm{i}p)] = \varphi = \varphi(p) \tag{29.245}$$

defazajul dintre răspuns şi excitaţie.

De aici rezultă şi posibilitatea de a studia stabilitatea mişcării unui sistem vibrant liniar excitat armonic prin urmărirea variaţiei funcţiei de transfer în funcţie de pulsaţia excitaţiei, urmărire care poate fi realizată prin construcţia — fie în baza formulelor stabilite pentru funcţia de transfer, fie prin determinări experimentale de moduli şi argumente ale funcţiei de transfer — a unor diagrame.

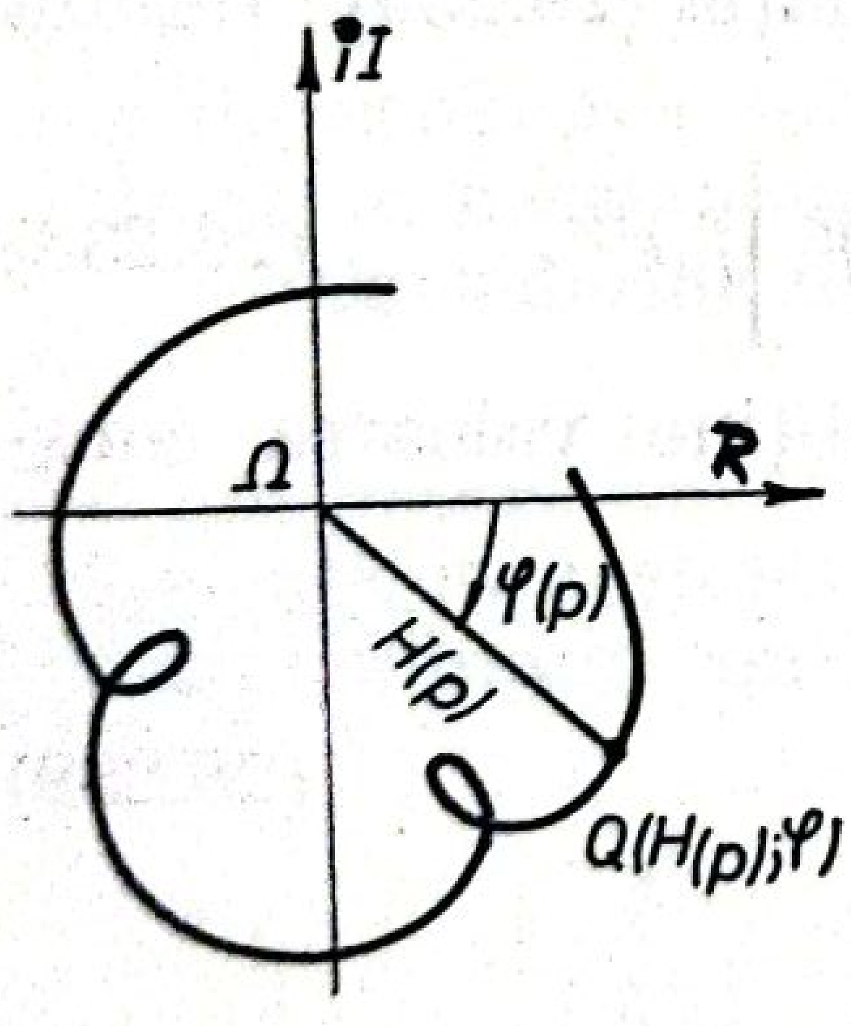


Fig. 29.25.

Diagrama cea mai frecvent folosită este diagrama Nyquist, construită în planul complex $\Omega \boldsymbol{R} iI$ cu ajutorul coordonatelor polare $H(p)$ şi $\varphi(p)$, (fig. 29.25).

Această diagramă va prezenta, ca şi diagrama polară din fig. 27.21 cu care se aseamănă, un număr de bucle egal cu numărull gradelor de libertate ale sistemului vibrant — acelaşi ca şi numărul modurilor sale proprii de vibraţie —, în fiecare buclă zonele de instabilitate corespunzînd porţiunilor din diagramă situate în vecinătatea punctelor de rază polară maximă; deosebirea faţă de diagrama polară din fig. 27.21 constă în aceea că, în funcţie de numărul gradelor de libertate ale sistemului vibrant liniar, diagrama Nyquist corespunzătoare lui va putea avea bucle nu numai în semiplanul $I < 0$, ci şi în semiplanul $I > 0$.

29.2.2. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neautonome neliniare

1°. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare neautonome prin metoda perturbaţiei. Considerînd şi acum numai

cazul sistemelor vibrante neliniare neautonome cu un singur grad de libertate, mişcarea unui asemenea sistem vibrant va fi descrisă printr-o ecuaţie diferenţială de forma (26.15), adică

$$\ddot{w} + G(w, \dot{w}) + F(t) = 0, \tag{29.246}$$

cu precizarea însă că funcţia $F(t)$, care reprezintă termenul datorat excitaţiei, va fi presupusă, în cele ce urmează, periodică, deci satisfăcînd relaţia

$$F(t) = F(t + T), \tag{29.247}$$

cu

$$T = \frac{2\pi}{p}, \tag{29.248}$$

unde T şi p sînt, respectiv, perioada şi pulsaţia excitaţiei, precizare justificată, pe de o parte, de faptul că aceasta este şi situaţia întîlnită obişnuit în tehnica vibraţiilor neliniare şi, pe de altă parte, de faptul că doar pentru asemenea situaţii au fost elaborate, pînă acum cel puţin, procedee concrete şi eficiente, bazate pe *metoda perturbaţiilor*, de studiu al stabilităţii mişcării.

Se va demonstra mai întîi că, folosindu-se metoda perturbaţiilor, studiul stabilităţii mişcării unui sistem vibrant neliniar, cu ecuaţia diferenţială a mişcării de forma (29.246), poate fi redus la studiul stabilităţii soluţiei ecuaţiei diferenţiale a vibraţiilor liniare parametrice ale unui sistem cu un grad de libertate, fapt care va justifica şi motivul pentru care analiza stabilităţii mişcării sistemelor vibrante liniare parametrice nu a fost prezentată în primul subpunct al paragrafului.

Într-adevăr, în condiţiile unei mişcări fără aspecte de instabilitate a sistemului vibrant neliniar considerat, soluţia ecuaţiei diferenţiale (29.246), care descrie mişcarea acestui sistem vibrant, va fi de regulă, datorită condiţiei (29.247), şi ea periodică, de aceeaşi perioadă T ca şi a excitaţiei; în consecinţă, dacă se notează cu $w_1 = w_1(t)$ această soluţie, care va verifica ecuaţia (29.246), adică se va putea scrie relaţia

$$\ddot{w}_1 + G(w_1, \dot{w}_1) + F(t) = 0, \tag{29.249}$$

ea va satisface condiţia

$$w_1(t) = w_1(t + T), \tag{29.250}$$

aceasta fiind singura situaţie luată în consideraţie în continuare.

Întrucît în cazul sistemelor vibrante neliniare aspectele de instabilitate ale mișcării survin, de regulă, în urma modificării parametrilor funcționali inițiali, se va admite că, datorită unor condiții inițiale diferite de cele care au condus la soluția $w_1 = w_1(t)$, parametrul lagrangeian a căpătat o perturbație $v = v(t)$, deci că mișcarea sistemului vibrant va fi determinată acum prin ecuația

$$w = w_1(t) + v(t) = w(t), \tag{29.251}$$

cu funcția $w(t)$ trebuind, de asemenea, să satisfacă ecuația diferențială (29.246), fiind valabilă deci relația

$$(\ddot{w}_1 + \ddot{v}) + G(w_1 + v\,;\ \dot{w}_1 + \dot{v}) + F(t) = 0, \tag{29.252}$$

deoarece atît parametrii constructivi ai sistemului vibrant, cît și excitația la care este supus acesta, nu au suferit schimbări.

În cazul unei perturbații $v(t)$ mici — situație întîlnită în cazul mișcărilor stabile —, se va putea dezvolta funcția $G(w_1 + v\,;\ \dot{w}_1 + \dot{v}) \equiv G(w_1\dot{w})$ în serie Mac Laurin în jurul valorilor $w = w_1$ și $\dot{w} = \dot{w}_1$, renunțîndu-se chiar în dezvoltare la termenii de ordin superior ordinului întîi în v și $\dot{v}$ (termenii neliniari), adică se va putea accepta aproximarea

$$G(w_1 + v\,;\ \dot{w}_1 + \dot{v}) \approx G(w_1, \dot{w}_1) + a_0(t)\,v + a_1(t)\dot{v}, \tag{29.253}$$

cu

$$G(w_1, \dot{w}_1) = G(w, \dot{w})_{\substack{v=0\\ \dot{v}=0}}\,;\ a_0(t) = \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)_{\substack{v=0\\ \dot{v}=0}}\,;\quad a_1(t) = \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{w}}\right)_{\substack{v=0\\ \dot{v}=0}}, \tag{29.254}$$

$a_0(t)$ și $a_1(t)$ fiind deci tot funcții periodice de timp de perioadă T, prin intermediul variabilei $w_1(t)$, care satisface condiția (29.250).

În aceste condiții, ecuația (29.252) va lua forma

$$[\ddot{w}_1 + G(w_1, \dot{w}_1) + F(t)] + [\ddot{v} + a_1(t)\,\dot{v} + a_0(t)v] = 0,$$

conducînd, prin considerarea și a relației (29.249), la următoarea ecuație diferențială liniară omogenă, cu coeficienți periodici, în perturbația $v(t)$:

$$\ddot{v} + a_1(t)\dot{v} + a_0(t)v = 0. \tag{29.255}$$

Efectuînd, în continuare, schimbarea de variabilă

$$v = y\,e^{-\frac{1}{2}\int a_1(t)dt}, \tag{29.256}$$

cu

$$\dot{v} = \left[\dot{y} - \frac{1}{2}\,a_1(t)\,y\right] e^{-\frac{1}{2}\int a_1(t)dt} \tag{29.257}$$

și

$$\ddot{v} = \left[\ddot{y} - a_1(t)\,\dot{y} + \left(\frac{1}{4}\,a_1^2(t) - \frac{1}{2}\,\dot{a}_1(t)\right) y\right] e^{-\frac{1}{2}\int a_1(t)dt}, \tag{29.258}$$

se va putea aduce ecuația (29.255) la forma

$$\ddot{y} + f(t)\,y = 0, \tag{29.259}$$

analogă ecuației (27.441) care modelează matematic vibrațiile liniare în jurul poziției de echilibru static ale unui sistem vibrant liniar parametric, cu funcția $f(t)$, determinată prin relația

$$f(t) = a_0(t) - \frac{1}{2}\,\dot{a}_1(t) - \frac{1}{4}\,a_1^2(t), \tag{29.260}$$

reprezentînd o funcție periodică de timp, de perioadă T.

Întrucît existența unei soluții stabile, sau instabile, a ecuației diferențiale (29.259) va putea atesta, în baza relației (29.256), caracterul stabil, respectiv instabil, al soluției ecuației diferențiale (29.255) a perturbației $v(t)$ și deci, prin aceasta, și caracterul stabil, sau instabil, al mișcării sistemului vibrant neliniar considerat, se justifică afirmația făcută la începutul subpunctului, privind posibilitatea reducerii studiului stabilității mișcării unui sistem vibrant neliniar neautonom la cel al stabilității mișcării unui sistem vibrant liniar parametric.

După cum s-a arătat în subpunctul 27.1.3 b, soluția generală a ecuației diferențiale (29.259) are forma

$$y = C_1 e^{\frac{t}{T}\ln|z_1|}\,\psi_1\left(\pi\frac{t}{T}\right) + C_2\,e^{\frac{t}{T}\ln|z_2|}\,\psi_2\left(\pi\frac{t}{T}\right), \tag{29.261}$$

cu

$$\psi_1\left(\pi\frac{t}{T}\right) = e^{i\varphi_1\frac{t}{T}}\,\Phi_1\left(\pi\frac{t}{T}\right);\quad \psi_2\left(\pi\frac{t}{T}\right) = e^{i\varphi_2\frac{t}{T}}\,\Phi_2\left(\pi\frac{t}{T}\right), \tag{29.262}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante de integrare, $\Phi_1\left(\pi\frac{t}{T}\right)$ și $\Phi_2\left(\pi\frac{t}{T}\right)$ este un set de soluții fundamentale, funcții periodice de timp, iar z_1 și

z_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare ecuației diferențiale (29.259), această ecuație caracteristică avînd forma (27.460), adică

$$z^2 - 2Cz - 1 = 0, \qquad (29.263)$$

cu coeficientul C definit prin relația (27.457).

Expresia (29.261) a soluției generale a ecuației diferențiale (29.259) permite să se observe că mărimile care determină caracterul stabil, sau instabil, al acestei soluții sînt reprezentate prin rădăcinile

$$z_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1} \qquad (29.264)$$

ale ecuației caracteristice (29.263), ceea ce înseamnă, în ultimă instanță, că stabilitatea soluției depinde de valoarea constantei C; recapitulînd observațiile făcute la sfîrșitul subpunctului 27.1.3 b) din § 27 cu privire la natura rădăcinilor z_1 și z_2, se vor putea trage următoarele concluzii în legătură cu stabilitatea soluției ecuației diferențiale (29.259):

— *soluția (29.261) a ecuației diferențiale (29.259) este stabilă* în cazul cînd coeficientul C satisface condiția

$$|C| \leqslant 1, \qquad (29.265)$$

sau încă

$$-1 < C < 1, \qquad (29.266)$$

pentru care rădăcinile ecuației caracteristice (29.263) sînt complexe și conjugate, cu modulul 1;

— *soluția (29.261) a ecuației diferențiale (29.259) este nestabilă* în condițiile

$$|C| \geqslant 1, \qquad (29.267)$$

adică

$$C \leqslant -1 \text{ sau } C \geqslant 1, \qquad (29.268)$$

pentru care rădăcinile ecuației caracteristice (29.263) sînt reale și distincte, cu una din rădăcini supraunitară în cazul inegalităților și cu rădăcinile avînd valorile $(+1)$ sau (-1) în cazul condițiilor exprimate prin egalități.

Odată stabilit caracterul stabil (simplu), sau instabil, al soluției (29.261), relația (29.256) va permite să se tragă concluzii și asupra caracterului stabil, sau instabil, al perturbației $v(t)$ și deci și asupra stabilității, sau instabilității, mișcării sistemului vibrant neliniar determinată prin ecuația diferențială (29.246).

Se reaminteşte însă observaţia făcută la sfîrşitul subpunctului 27.1.3 b) din § 27, cu privire la dificultăţile întîmpinate în construcţia ecuaţiei caracteristice (29.263).

2°. Studiul stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare cu caracteristică elastică cubică şi cu amortizare neglijabilă. Unul din tipurile de sisteme vibrante neliniare cu un grad de libertate întîlnite mai des în aplicaţiile tehnice este acela cu neliniaritatea datorată caracteristicii elastice cubice şi care funcţionează cu amortizare neglijabilă, ecuaţia diferenţială a mişcării unui asemenea sistem vibrant avînd forma (26.20) a ecuaţiei Duffing, dar fără termenul datorat amortizării, adică forma

$$\ddot{w} + (\alpha + \beta w^2)w = P^0 \cos(pt), \qquad (29.269)$$

cu $\beta > 0$ în cazul caracteristicii elastice tari şi cu $\beta < 0$ în cazul caracteristicii elastice moi.

Se va arăta în continuare, că studiul stabilităţii mişcării unui asemenea sistem vibrant se reduce la studiul stabilităţii soluţiei unei ecuaţii diferenţiale de tip Mathieu.

Într-adevăr, dacă $w_1(t)$ este o soluţie periodică a acestei ecuaţii — se vor face ulterior precizări în legătură cu forma ei —, soluţie care va satisface deci ecuaţia

$$\ddot{w}_1 + \alpha w_1 + \beta w_1^3 = P^0 \cos(pt) \qquad (29.270)$$

şi y este o perturbaţie mică a lui w_1, atunci mişcarea sistemului vibrant corespunzătoare acestei perturbaţii va fi determinată prin ecuaţia finită

$$w = w_1(t) + y(t) = w(t), \qquad (29.271)$$

cu funcţia $(w_1 + y)$ satisfăcînd, de asemenea, ecuaţia diferenţială (29.269), fiind valabilă deci şi egalitatea

$$(\ddot{w}_1 + \ddot{y}) + \alpha(w_1 + y) + \beta(w_1 + y)^3 = P^0 \cos(pt). \qquad (29.272$$

Dezvoltînd binomul de gradul trei şi neglijînd în dezvoltare, datorită valorii mici a perturbaţiei y, termenii neliniari în această perturbaţie, adică folosind aproximarea

$$(w_1 + y)^3 \approx w_1^3 + 3w_1^2 y,$$

va mai rezulta următoarea formă pentru ecuația (29.272) :

$$[\ddot{w}_1 + \alpha w_1 + \beta w_1^3 - P^0 \cos(pt)] + [\ddot{y} + \alpha y + 3\beta w_1^2 y] = 0,$$

care, prin considerarea și a condiției (29.270), va conduce la următoarea ecuație diferențială în perturbația y:

$$\ddot{y} + (\alpha + 3\beta w_1^2)y = 0. \qquad (29.273)$$

Întrucît, datorită formei membrului drept, soluția periodică a ecuației diferențiale (29.269) va putea fi considerată și ea de forma

$$w_1 = W \cos(pt), \qquad (29.274)$$

W fiind o constantă depinzînd de condițiile inițiale, se va putea efectua, în ecuația (29.273), înlocuirea

$$w_1^2 = W^2 \cos^2(pt) = \frac{1}{2} W^2[1 + \cos(2pt)],$$

în baza căreia ecuația menționată va putea fi adusă la forma

$$\ddot{y} + \left[\left(\alpha + \frac{3\beta W^2}{2}\right) + \frac{3\beta W^2}{2}\cos(2pt)\right] y = 0. \qquad (29.275)$$

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$\tau = pt, \qquad (29.276)$$

cu

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{d\left(\frac{\tau}{p}\right)^2} = p^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}$$

și introducînd și notațiile

$$\frac{1}{p^2}\left(\alpha + \frac{3\beta W^2}{2}\right) = a; \ \frac{1}{p^2}\frac{3\beta W^2}{2} = -2q, \qquad (29.277)$$

se va putea aduce ecuația (29.275) la următoarea formă finală

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (a - 2q\cos(2\tau)]y = 0, \qquad (29.278)$$

identică ecuaţiei (27.496) de tip Mathieu (cu $t^* = \tau$), fapt care atestă posibilitatea studierii stabilităţii mişcării sistemelor vibrante neliniare de tipul celor cu caracteristică elastică cubică şi cu amortizare neglijabilă, plecîndu-se de la o ecuaţie diferenţială Mathieu.

Întrucît ecuaţia diferenţială (29.278) reprezintă o particularizare a ecuaţiei diferenţiale (27.444), soluţia ei generală va putea fi prezentată şi sub forma (27.467), adică se va putea scrie

$$y = A\, e^{\frac{\tau}{\pi} \ln z_1} \Phi_1(\tau) + B\, e^{\frac{\tau}{\pi} \ln z_2} \Phi_2(\tau), \tag{29.279}$$

A şi B fiind constante de integrare, $\Phi_1(\tau)$ şi $\Phi_2(\tau)$ fiind funcţii periodice de τ, de perioadă

$$\tau = pT = p \cdot \frac{2\pi}{2p} = \pi, \tag{29.280}$$

iar z_1 şi z_2 fiind rădăcinile ecuaţiei caracteristice (27.460), sau (29.263), cu observaţia că în cazul de faţă coeficientul C al ecuaţiei caracteristice este o funcţie de parametrii a şi q ai ecuaţiei diferenţiale (29.279), adică de forma

$$C = C(a, q). \tag{29.281}$$

Fără a intra în detalii de calcul, se va face precizarea că stabilirea formei concrete a funcţiei precedente de variabilele a şi q poate fi făcută, în baza relaţiilor (27.457) şi (27.448), plecîndu-se de la un set de soluţii fundamentale $y_1(\tau)$ şi $y_2(\tau)$, care să satisfacă condiţiile (27.445).

Admiţîndu-se că această funcţie a fost determinată, se va observa că rămîn şi aici valabile concluziile de la sfîrşitul subpunctului 29.2.2.1. al paragrafului, privind posibilitatea de apreciere a caracterului stabil, sau nestabil, al soluţiei generale (29.279) în funcţie de valoarea modulului coeficientului C al ecuaţiei caracteristice (29.263).

În aplicaţiile practice se preferă însă să se studieze stabilitatea soluţiei generale (29.279) cu ajutorul unei reprezentări grafice a funcţiei $C(a, q)$, purtînd numele de *diagrama de stabilitate Ince-Strutt.*

Scanned with CamScanner

Ideea construcției acestei diagrame își are originea în observația că din analiza condițiilor (29.265) și (29.267) rezultă că pragul de trecere de la o soluție stabilă la o soluție stabilă a ecuației diferențiale (29.259) — și deci și a ecuației diferențiale Mathieu — îl constituie valoarea

$$|C| = 1 \tag{29.282}$$

a coeficientului ecuației caracteristice (29.263) și că deci reprezentarea grafică a funcției

$$|C(a, q)| - 1 = 0 \tag{29.283}$$

într-un plan Oaq, va permite delimitarea zonelor de valori ale parametrilor a și q pentru care soluția (29.279) este stabilă, de zonele pentru care soluția este nestabilă.

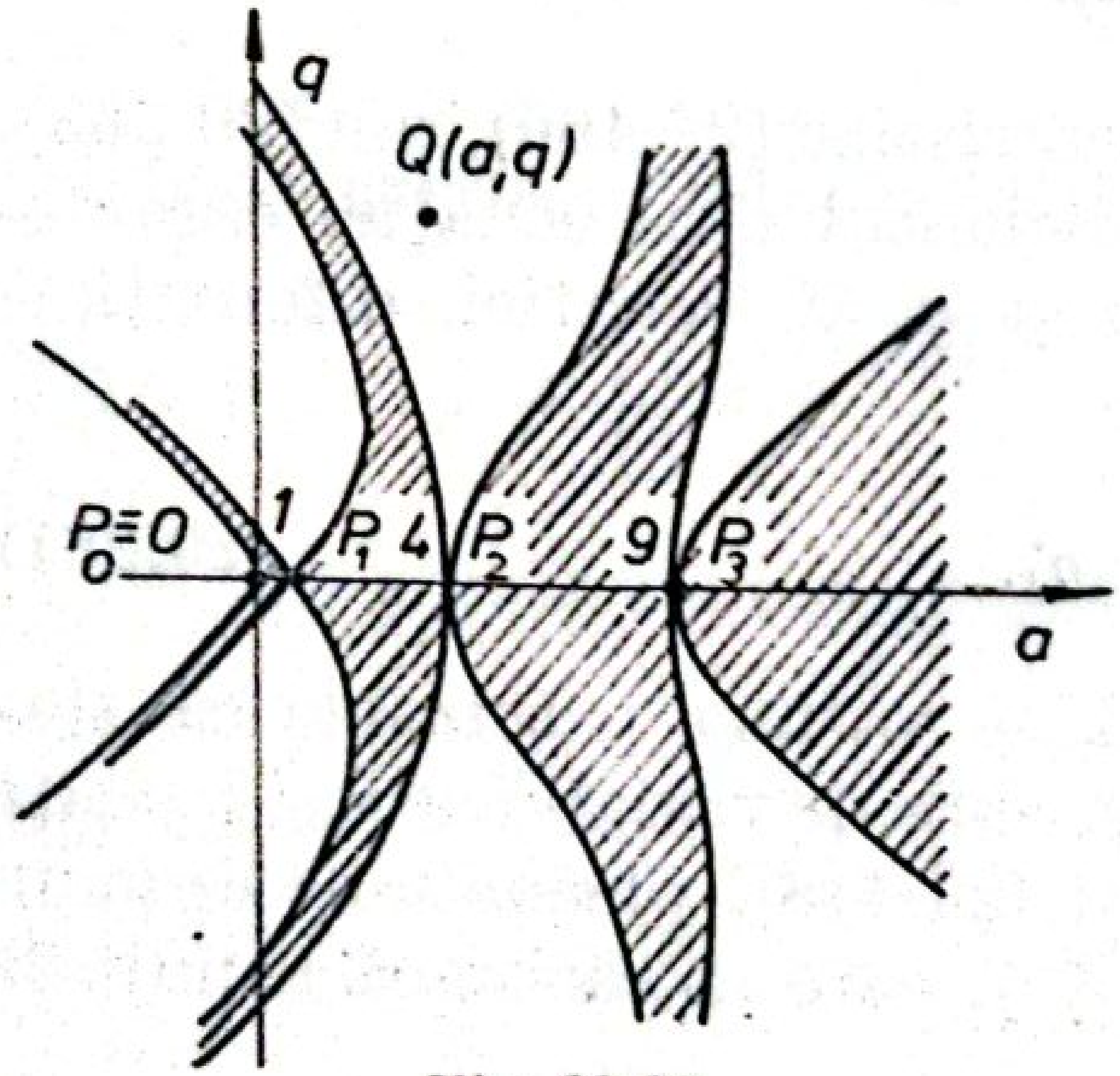


Fig. 29.26.

S-a demonstrat [22] că acest grafic este alcătuit dintr-o infinitate de ramuri de curbă de forma celor din fig. 29.26, aceste ramuri intersectînd axa Oa în puncte P_i $(a_i, 0)$, cu abscisele a_i avînd valorile

$$a_i = i^2, \ (i = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{29.284}$$

și împărțind planul Oaq în două categorii de zone, din care unele au fost hașurate, iar celelalte au fost lăsate albe în fig. 29.26.

Calculele au permis să se tragă următoarele concluzii privind legătura dintre poziția unui punct reprezentativ $Q(a, q)$ din planul Oaq și dintre valoarea coeficientului C al ecuației caracteristice (29.263), concluzii cu consecințe directe, în baza observațiilor de la sfîrșitul subpunctului 29.2.2.1°, asupra stabilității soluției (29.279):

— pentru poziții ale punctului $Q(a, q)$ situate pe una din ramurile diagramei rezultă condiția

$$|C| = 1, \tag{29.285}$$

care atestă caracterul nestabil al soluției (29.279);

Scanned with CamScanner

— pentru orice poziţie a punctului $Q(a, q)$ situată în una din zonele albe rezultă condiţia

$$|C| > 1, \tag{29.286}$$

care arată că şi în acest caz soluţia (29.279) este nestabilă;

— pentru orice poziţie a punctului $Q(a, q)$ situată în interiorul unei zone haşurate — nu şi pe ramurile de curbă care o delimitează, este valabilă condiţia

$$|C| < 1, \tag{29.287}$$

care confirmă caracterul stabil al soluţiei (29.279).

Se poate trage deci concluzia finală că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale Mathieu va fi stabilă numai pentru perechile de valori ale parametrilor a şi q pentru care punctul $Q(a, q)$ este situat în interiorul uneia din zonele haşurate ale graficului Ince-Strutt, numit, din motive uşor de înţeles acum, şi *diagramă de stabilitate*.

Observaţie

Bineînţeles că numărul modelelor matematice, adică al ecuaţiilor sau al sistemelor de ecuaţii, de regulă prin excelenţă *neliniare*, ale fenomenelor naturii şi, în particular, numărul unor atare modele sau ecuaţii din cadrul mecanicii vibraţiilor şi chiar şi al mecanicii vibraţiilor sistemelor de rigide creşte neîncetat, iar pe măsura vastităţii domeniilor în care aceste ecuaţii îşi găsesc aplicaţie li se atribuie noi şi noi nume proprii, odată cu elaborarea unor noi metode de studiu şi (sau) de programări adecvate la MEC pentru aceste noi modele matematice.

Încheind, autorii exprimă convingerea că studiul acestui volum va trezi dorinţe nestăvilite de abordare şi aprofundare a unor noi cercetări integrate de creaţie ştiinţifică şi tehnică, menite a smulge, în folosul omului, alte secrete ale naturii.

BIBLIOGRAFIE

1. *Babakov, I. M.*, **Teoria kolebanii**, Izdat. „Nauka ", Moskva, 1968.
2. *Bădescu, R.*, ş.a., **Integrale utilizate în mecanică, fizică, tehnică şi calculul lor**, Editura tehnică, Bucureşti, 1968.
3. *Bogoliubov, N. N., Mitropoliskii, Iu. A.*, **Asimptoticeskie metodi v teorii nelineinih kolebanii**, Gos. Izdat. tehniko-teoreticeskoi literaturi, Moskva, 1955.
4. *Bottema, O., Roth, B.*, **Theoretical Kinematics**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.
5. *Buzdugan, Gh.*, **Măsurarea vibraţiilor mecanice**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1964.
6. *Buzdugan, Gh.*, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1968.
7. *Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeş, M.* **Vibraţiile sistemelor mecanice**, Editura Academiei R.S R., Bucureşti, 1975.
8. *Crandall, S.*, **Random Vibration**, Massachusetts Institute of Tehnology Press, Cambridge, Mass., 1964.
9. *Dancea, I.*, **Programarea calculatoarelor numerice pentru rezolvarea problemelor cu caracter tehnic şi de cercetare ştiinţifică**, Editura „DACIA", Cluj-Napoca, 1973.
10. *Dankert, Jü.*, **Numerische Methoden der Mechanik**, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1977.
11. *Deacu, L., Pavel, Gh.*, **Vibraţii la maşini-unelte**, Editura „DACIA", Cluj-Napoca, 1977.
12. *Dincă, F., Teodosiu, C.*; **Vibraţii neliniare şi aleatoare**, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1969.
13. *Gabos, Z., Mangeron, D., Stan, I.*, **Fundamentele mecanicii**, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1962.
14. *Gille, J. Ch., Clique, Marc*, **La représantation d'état pour l'étude des systemès dynamiques**, Editions „EYROLLES", Paris, 1975.
15. *Goloskokov, F. G., Filippov, A.P.*, **Nestaţionarnîie kolebaniia mehaniceskih sistem**, Naukova Dumka, Kiev, 1966.
16. *Grumăzescu, M., Stan, A., ş. a., V.*, **Combaterea zgomotului şi vibraţiilor**, Editura tehnică, Bucureşti, 1964.
17. *Haimovici, A.*, **Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale**, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
18. *Hale, J. K.*, **Oscillations în nonlinear Systems**, (trad. în limba rusă), izdat. „MIR", Moskva, 1966.
19. *Harris, C M., Crede, E. CH.*, **Socuri şi vibraţii**, (trad. din limba engleză), Editura tehnică, Bucureşti, 1968.

20. *Ioriş. Iu., I.*, **Izmerenie vibraţii**, Gos. naucino-tehn. izdat. maşinostroitelinoi literaturî, Moskva, 1956.
21. *Jaeger, J. C., Newstead, G. H.*, **Introducere în teoria transformtei Laplace, cu aplicaţii în tehnică**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1971.
22. *Kauderer, H.*, **Nelineinaia mehanica**, Izdat. inostr. literaturî, Moskva, 1961.
23. *Kolesnik, I. V.*, **Ustranenie vibraţii maşin**, Gos. naucino-tehn. izdat. maşinostroitelinoi literaturî, Moskva-Leningrad, 1960.
24. *Kudinov, V. A.*, **Dinamica maşinilor-unelte**, Ed. tehnică, Bucureşti 1970.
25. *Mac-Lahlan, N. V.*, **Teoria i prilojeniia funcţii Mathieu**, Izdat, inostr. literaturî, Moskva, 1953.
26. *Maravall Casesnoves, D.*, **Ingenieria de las oscilaciones**, Editorial „DOSSAT", S.A., Madrid, 1959.
27. *Mitropolisckii, Iu. A., Martîniuk, D. I.*, **Lekţii po teorii kolebanii sistem s zapazdivaniem**, Kiev, 1969.
28. *Mitropoliskii, Iu. A., Martîniuk, D. I.*, **Periodiceskie i cvaziperiodiceskie kolebaniia sistem s zapazdivaniem**, Golovnoe izdat. izdateliskogo obiedineniia, „Vîşa şkola", Kiev, 1979.
29. *Myskiestad, N. O.*, **Fundamental of Vibration Analysis**, Mc. Graw Hill Book Company, Inc., New York — Toronto—London, 1956.
30. *Naslin, P.*, **Les régimes variables dans les systèmes linéaires**, Ed. Dunod, Paris, 1962.
31. *Radeş, M.*, **Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice**, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1979.
32. *Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D.*, **Curs de mecanică — Elemente de vibraţii mecanice**, Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti, 1970.
33. *Ripianu, A.*, **Mişcările vibratorii ale arborilor drepţi şi cotiţi**, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1969.
34. *Rosenwasser, F. N.*, **Kolebaniia nelineinîh sistem**, Izdat. „Nauka", Glavnaia redakţia fizico-matematiceskoi literaturî, Moskva, 1969.
35. *Savant, C. J.*, **Calculul sistemelor automate** (traducere din limba engleză), Editura tehnică, Bucureşti, 1967.
36. *Schmidt., G.*, **Parametererregte Schwingungen**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.
37. *Silaş, Gh.. Rădoi, M., Brîndeu, L., Klepp, H., Hegeduş, A.*, **Culegere de probleme de vibraţii mecanice**. Editura tehnică, Bucureşti, 1967.
38. *Silaş, Gh.*, **Vibraţii mecanice**, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
39. *Smirnov., A. F.*, **Ustoicivosti i kolebaniia soorujenii**, Gosud. transportnoe izdat., Moskva, 1958.
40. *Strarjinskii, V. M.*, **K teorii nelineinîh kolebanii**, Moskovskii gosudarstvenii universitet imeni „M. V. LOMONOSOVA", Moskva, 1980.
41. *Stepanov, V. V.*, **Curs de ecuaţii diferenţiale**, (traducere din limba rusă), Editura tehnică, Bucureşti, 1955.
42. *Szabo, I.*, **Einführung in die Tehnische Mechanik**, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1966.
43. *Tong Kin, N.*, **Teoria mehaniceskih kolebanii**, Gosud. naucino-tehniceskoe izdat. maşinostroitelinoi literaturî, Moskva, 1963.
44. *Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V.*, **Mecanica**, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
45. *Whittaker, E. T.*, **Treatise on the Analytical Dynamics of Particles, and Rigid Bodies**, Cambridge, at the University Press, 1937.
46. *Zubov, V. I.*, **Teoria kolebanii**, „Vîşaia şkola", Moskva, 1979.